
Stanford University Libraries
3 6105 001 367 973







Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Zwölfter Jahrgang.

Mit 8 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1867.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.



I.

Abraham Judaeus — Savasorda und Ibn Esra.

Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften im 12. Jahrhundert.

Von

M. Steinschneider.

Die Bedeutung des 12. Jahrhunderts für die Verpflanzung morgenländischer Wissenschaft auf europäischen Boden, namentlich durch jüdische und christliche Uebersetzer und Bearbeiter in Spanien, der Provence und Italien, ist seit Jourdain's grundlegenden Forschungen erkannt und auf verschiedenen Gebieten in Einzelforschungen beleuchtet worden. Wir sind aber noch weit entfernt von der Erkenntniss und Sicherheit, selbst in Bezug auf vorhandene Schriften und namhafte Autoren, welche für eine genaue Geschichte einzelner Wissenschaften wünschenswerth erscheint. Insbesondere sind die umfangreichen und wichtigen Ermittelungen der letzten 30 Jahre auf dem Gebiete der jüdischen Literatur des Mittelalters aus verschiedenen Gründen verhältnissmässig noch sehr wenig in weitere Kreise gedrungen, wie andererseits auf jenem Gebiete selbst noch Manches aus fernliegenden Kreisen zu holen ist. Eine gegenseitige Vermittelung anzubahnen, ist der Zweck der nachfolgenden Mittheilungen, welche natürlich zunächst für solche bestimmt sind, die an der philologischen Beschaffenheit der Texte kein Interesse haben, welche aber auch andererseits Orientalisten und Hebraisten auf weitere Quellen und Fragepunkte führen und ihnen die Bedeutung einiger technischen Ausdrücke nahe bringen sollen. Ich hielt es daher für dem letzteren Zwecke angemessen, dasjenige, was nur für jenen engeren Kreis bestimmt ist, vorläufig auszuschliessen, indem ich mir vorbehalte, dergleichen in einem besonderen Anhange zusammenzustellen.

§. 1.

Im 12. Jahrhundert lebten zwei Juden Namens Abraham, welche den ganzen Umfang der mathematischen Wissenschaften ihrer Zeit beherrsch-

ten, aus arabischen Quellen schöpfend, ihre Werke in hebräischer Sprache verfassten. Frühzeitig gelangte die Kenntniss derselben durch lateinische Uebersetzungen zu den Christen; aber die Beinamen wurden entstellt und zum Theil erst in neuester Zeit wieder erkannt. Durch ein drolliges Missverständniss, das ich weiter unten beleuchten werde, machte man im 13. Jahrhundert den einen zum Schüler des andern, was im eigentlichen Sinne des Wortes sicherlich nicht der Fall war.

Christliche Autoren des Mittelalters bezeichnen jüdische und arabische häufig mit blosem Vornamen oder mit den die Nation angebenden Wörtern: *Judaeus, Arabs*, welche sie zu dem blosen Vornamen setzen, wodurch bei gleichnamigen sehr leicht ein Zweifel entsteht, namentlich wenn andere Anhaltspunkte für die Unterscheidung: Zeit, Ort, Studienkreis und dergl. fehlen. Ausser den beiden Mathematikern des 12. Jahrhunderts hat es jedenfalls noch einen oder zwei oder gar drei Abraham im 13. Jahrhundert gegeben, welche mathematische, medicinische und andere Schriften aus dem Arabischen verdolmetschten, wahrscheinlich in der Weise, dass sie zunächst den arabischen Text in die Landessprache, wahrscheinlich das Spanische, übersetzten, und hiernach ein christlicher Gelehrter eine anderweitige Uebersetzung ins Lateinische besorgte. Ich habe die hierher gehörenden mir damals bekannt gewordenen Schriften in meinem *Catalogus libror. hebr. in bibl. Bodl. p.* 2747—2748 zusammengestellt, und halte es nicht für nöthig, die daselbst angeführten Quellen hier zu wiederholen. Die Untersuchung ist jedoch noch nicht abgeschlossen, und giebt es wahrscheinlich noch Handschriften, vielleicht auch seltene Druckwerke, welche neue Aufschlüsse bieten. Ehe ich jedoch die bisher gewonnenen Resultate im folgenden Paragraphen zusammenstelle, sind noch einige andere Abraham zu unterscheiden, welche man, nach den ungenauen oder verdächtigen Quellen, hierbei zu ziehen verleitet sein möchte (vergl. *Wolfius, Bibl. hebr. I.* p. 61 N. 85).

Bei Borellius (*Biblioth. chimica.* 12. Heidelberg 1656 p. 2) liest man:

Abraham Judaeus, apud Flamellum, ubi quaedam ab eo excerpta videntur.

Eundem MS. vidi, cum fig. et explicatione quadam, idq. Lutetiae in 4.

Idem de arte Cabalistica.

Abrahamus e portu (lies *porta*) *leonis, tres edidit libros de auro Venetiis* 1586 *in* 4. *apud Portam.*

Abraamo etiam, tribuitur liber Chemicus (!) *Jetsira, dictus, valde obscurus*

In dieser nicht gerade sehr systematischen Aufzählung scheinen drei Personen unterschieden zu sein, von denen die mittlere eine in der hebräischen Literatur bekannte; Abraham Portaleone ist der Verfasser eines im Jahre 1612 erschienenen antiquarischen Werkes, welches u. A. auch ein Stück aus Albertus Magnus: *de gemmis*, enthält (*Catalog. libr. hebr. in bibl. Bodl. p.* 704; vergl. Hebräische Bibliographie 1863 p. 48). Er ist es, welchen Kircher irrthümlich als Abraham ben Hannase citirt, und darnach die A

führung bei Th. H. Martin (*Observations sur les attractions et repulsations magnetiques etc. Rome* 1865 *p.* 4 des Sonderabdr. aus den *Atti dell' Acad.*) jedenfalls von geringem Werthe[1]).

Der zuletzt genannte „Abraam" ist der Patriarch, das Buch Jezira (Schöpfung) gehört nicht in die Chemie; aber die Alchemisten haben Alles, was das Mittelalter an dunklen und abergläubischen Disciplinen erzeugte, als congenial in ihren Bereich gezogen, und nur dadurch, sowie durch die Vervielfachung der Namen in ihren verschiedenen Entstellungen, ist die Anzahl angeblicher Autoren entstanden, welche man bei Borellius verzeichnet findet. Ich komme später darauf zurück. So ist denn der erstgenannte Abraham Judäus vielleicht nur ein Doppelgänger des Erzvaters, wenn es nicht etwa der in neuerer Zeit näher bekannt gewordene Schwärmer und Pseudoprophet Abraham Abulafia ist, der um 1271—1291 in Spanien und Italien verschiedene kabbalistische Schriften verfasste, welche mit Figuren und Zeichen versehen sind.

Auszuscheiden ist ferner *Abraham Judaeus* in Salamanca, welcher im *Catalogus Manuscr. Angliae II n.* 6142 vorkommt, im Index mit dem Homonymus (Ibn Esra) zusammengeworfen wird. Dieser ist der bekannte Astronom und Chronolog Abr. Zacut (Sakut u. s. w.), der 1472—1503 blühte und interessante, zum Theil noch nicht bekannte Mittheilungen zur Geschichte der Astronomie hinterlassen hat (vergl. D.M. Zeitschrift XVIII, 178).

§. 2.

Ich komme nunmehr zu dem Uebersetzer aus dem XIII. Jahrhundert, über dessen Identität mit andern noch nichts Sicheres ermittelt ist:

a) Abraham genannt *Tortuosensis*, also wohl aus Tortosa, wird zusammen mit Simon Januensis (oder Genuensis) genannt, welcher Leibarzt des Papstes Nicolaus IV. (1288—91) war. Er erscheint als Uebersetzer von medicinischen Schriften des Serapion und Zahrawi.

---

1) Ich habe noch nicht Gelegenheit gehabt, die von Martin (p. 9, A. 7) citirte frühere Abhandlung über den Magnet (*Mémoires présentés etc. t.* 6) zu lesen. Einiges auch zu der letzten Abhandlung Gehörige aus hebräischen und orientalischen Quellen habe ich erläutert in der Zeitschrift d. D. M. Gesellsch. V, 378; zur pseudepigr. Lit. S. 44; Hebr. Bibliogr. II, 10; V, 122, N. 786; VI, 94, Anm. 6; VII, 81, N. 626, A. 1. Es mag hier noch folgende Stelle aus Ibn Ridhwan's („Rodoam") Comment. zum Quadripart. I. Cap. 4 (fol. 1. Col. 9 der Ausg. 1519) Platz finden: *Et quia hoc non intellexit Albumasar credidit quod erraret* [*Ptol.*] *in dicto suo, dicens: quomodo potest fumositas humida ad lunam ascendere; cum fumositas ascendere nequeat ultra* 16 *stadia; et luna satis longius est. Ego vero risi de dictis talibus qualia haec sunt: et dixi qualiter intellexit hoc: quoniam Ptol. noluit dicere quod fumositas humida ascendat hinc ad lunam: sed dixit quod ascensus fumositatis humidae, qui est versus lunam, docet nos, quod trahit humores terrae et aliorum corporum eam sequentium sicut adamas trahit ferrum* etc.

Es fragt sich, ob er identisch ist mit:

b) Abraham, dem vermuthlichen Uebersetzer von *Johannitii* (*Honein*) *Sinopsis libri de simplic. medic.* oder Pseudo-*Galeni de plantis*, welches in *Galen's Opp. ed. Juntas VII*, 120 (oder *ed. Chart. XIII*, p. 1004) gedruckt ist. — Siehe Fabricius bei Wolfius, *Biblioth. hebr. I.* n. 153 und bei Kühn, *Opp. med.* (*Galen*) *I.* p. CLXXI.

Ferner ob identisch ist:

c) Abraham Judäus „*cujus aphorismi* (*nescio qui*) *latine versi MSS. Romae apud Alphonsum Cicarellum Medicum*": nach *Alph. Giaccorini Biblioth. univ. MSS.* bei Wolfius, l. c. III. p. 37 n. 876.

§. 3.

In Toledo finden wir unter den von Alfons X. beschäftigten Dolmetschern einen Juden Abraham, der, ausser einem, dem Muhammed zugeschriebenen Werke über die Nachtreise des Propheten, zwei mathematische Werke übersetzte, nämlich von Ibn Heitham (als „Alhazen" bekannt[2])) ein Compendium der Astronomie, welches im Original verloren scheint und meines Wissens noch nicht näher untersucht ist. Es hat sich handschriftlich erhalten in einer aus dem Spanischen geflossenen lateinischen und zwei hebräischen Uebersetzungen (aus den Jahren 1272 und 1322), letztere beide aus dem Original gemacht, die ältere von einem bekannten Astronomen, dem Jacob ben Machir — bekannt als Prophatius aus Montpellier — herrührend, beide in mehreren Handschr. öffentlicher Bibliotheken (*Catal. l. h. p.* 1232, 1856), ferner in einer aus der hebr. Uebersetzung geflossenen lateinischen des Abraham de Balmes für Cardinal Grimani[3]) (Anf. XVI. Jahrhundert), welche die lateinische Handschr. des Vatican 4566 enthält, und worüber ich dem

---

2) Die Identität des Astronomen mit dem Optiker hat in neuester Zeit u. A. auch Woepcke angenommen (*Recherches sur plusieurs ouvrages de Leonard etc. I, p.* 12.)

3) Grimani ist also anstatt Gammari zu lesen bei De Pomis, *Apologia pro medico hebr. p.* 71 (bei Wolf, *Bibl. hebr. p.* 45). Für denselben römischen Cardinal übersetzte auch De Balmis ein philosophisches Schriftchen des Avempace (*Cod. Vat.* 3897). Dominico Grimani, geb. den 19. Februar 1461, wurde Cardinal am 21. August 1493, Patriarch von Aquileja am 13. Februar 1497 und starb den 27. August 1523; sein Leichnam wurde zuerst in der Kirche St. Joh. und Paul in Rom beigesetzt, dann nach Venedig gebracht, wo Abraham de Balmes kurz vorher gestorben war (über Letzteren s. u. A. Mazuchelli, *Gli scrittori d'Italia, vol. II, P.* 1, Brescia 1758). Sein römisches Grab trägt folgende Inschrift: *Dominico Grimano Episcopo Portuensi cardinali Sancti Marci Patriarchae Aquilejensi inculpatissimae vitae omnium scientiarum peritissimo temporaneum depositum nepotes pientissimi posuerunt, luctu totius urbis. Vixit Annos LXII Menses VI Dies VIII obiit XXVII Augusti MDXXIII.* (Ughelli, *Italia sacra, T. V. Ven.* 1720 *col.* 131 *n. LXXXV*; nach Mittheil. des Herrn Narducci). Grimani's Namen tragen einige hebr. Handschriften in München.

Fürsten Boncompagni nähere Mittheilungen des Herrn Narducci verdanke. Ueber das andere Werk von Zarkali mag ich mich hier nicht auslassen, da ich darüber weitläufig zu handeln habe in einem weiteren Briefe an den Fürsten Boncompagni, jenen Autor betreffend. Ich warte nur auf das Eintreffen des 3. Bandes der in Madrid erscheinenden, durch Alfons X. bewirkten spanischen Bearbeitungen astronomischer Schriften auf der hiesigen k. Bibliothek, da jener Band das betreffende Werk vollständig enthält. Doch sei mir gelegentlich eine Frage an die gelehrten Leser dieser Blätter gestattet: Wer ist Gerbertus Geometra, dessen Namen unter Nummer XXX der Probleme sich findet, welche den Schluss bilden des lateinischen: *Sapheae recentiores doctrinae Patris (!) Abrusahk Azarchelis etc. a Io. Schonero etc.* (4. Nürnberg 1534)? Ist es etwa Silvester?[4])

§. 4.

Ich komme nunmehr zu den beiden Gelehrten des 12. Jahrh.: Abraham bar Chijja und Abraham Ibn Esra, welche in ihrer Bedeutung für die Geschichte der Mathematik erst dann gewürdigt werden können, wenn ihre Schriften näher bekannt geworden. Es soll also eine Uebersicht und zum Theil eine Charakteristik ihrer literarischen Thätigkeit auf dem speciellen Gebiete versucht werden, in welcher neben den bereits gesicherten Resultaten der neuesten Forschungen auch Untersuchungen über Zweifelhaftes und Unbekanntes einen Platz finden.

Zu Anfang des 12. Jahrhunderts lebte der Spanier Abraham bar (Sohn des) Chijja (oder Hijja, Chajja, Haya u. s. w.[5]). Von seinen Lebensverhältnissen ist wenig mit Sicherheit ermittelt, das Wichtigste in Frage gestellt, und mit Themen von allgemeinerer Bedeutung in Verbindung gesetzt, welche die Auseinandersetzung in diesen Blättern einigermassen erschweren, aber nicht überflüssig machen, besonders da man Conjecturen, Hypothesen und gewagte Behauptungen für Biographie und Geschichte ausgegeben hat. Als primäre Quellen dienen uns, ausser den wissenschaftlichen Werken, welche weiter unten ausführlich besprochen werden, noch Fragmente zweier unedirten Schriften, welche uns hier eben nur als Quellen interessiren. Die eine, A., betitelt *Megillat ha-Megalle etc.*, beweist,

---

4) Ueber ein dem Gerbert fälschlich beigelegtes Schriftchen, das Astrolab betreffend, folgt später eine Notiz.

5) Quellen über Abraham bar Chijja s. in meinem *Catal. Codd. hebr. Bibl. Lugd. Bat. p* 149; Hebräische Bibliographie IV, 109 in der Anzeige eines in Leipzig 1860 erschienenen ethischen Schriftchens mit biographischen Erörterungen von S. L. Rapoport; und bei Boncompagni in den *Atti dell'Academ.* 1863 (*t. XVI*) *p.* 935 flg. — Das Argument Rapoport's (p. LIII) für die Lesart Chajja ist ungenügend, da es bei dem Verse, auf den er sich stützt, nicht auf die vorletzte Silbe ankommt. Man hat auch keine ausreichenden Gründe für die Vocalisation: Chijja, s. jedoch Anm. 6.

dass der Messias im Jahre 5118 (1358) erscheinen werde[6]), hauptsächlich aus astrologischen Gründen — doch ist sie sicherlich nicht die Abtheilung des systematisch angelegten wissenschaftlichen Cyclus, von welchem unten die Rede sein wird; noch scheint sie dem spätern Alter anzugehören (vgl. weiter unten); doch möchte ich ohne Kenntniss des Ganzen hierüber nicht entscheiden. Die Tendenz des Werkchens war vielleicht eine polemische gegen das Christenthum; indem seit Petrus Alphonsi (1105) wohl mehrere Juden, welche als Vermittler arabischer Wissenschaften dienten und zum Christenthum übergetreten waren, den früheren Glaubensgenossen den von ihnen bekannten Erlöser predigten.

B. Eine apologetische Epistel für astrologische Stundenwählerei, gerichtet an den Rabbiner Jehuda ben Barsillai al-Barzelloni[7]) „und die Weisen des Ortes". In demselben interessiren uns zunächst die Schlussworte: „Von meiner Jugend auf bis heute studirte ich die Wissenschaft der Sterne und beschäftigte mich damit[8]), forschte und dachte darüber nach, und glaubte, Wissenschaft und Kenntniss erlangt zu haben, an welcher weder Sünde noch Vergehen ist. Nun da ich sehe, dass weise und bescheidene Männer, gelehrte und kenntnissreiche, nicht meiner Ansicht beistim-

---

6) Anführungen des Buches bei Asarja de Rossi (Cap. 43) und daraus Gedalja Ibn Jahja, vergl. Wolf, *Bibl. hebr.* I, p. 51 und III, p. 31, G. B. de Rossi, *Della vana aspettazione p.* 129 (vergl. Jewish Lit. p. 316, N. 15; Catal. p. 1912 und CXVII, wo für Alf. lies Paulus de Burgos und Wolf 3 anstatt 2). Aus den ersten Quellen neuerdings in einem angefangenen Artikel über Abraham, im Litbl. des Orient X, 426; zwei Citate aus Abravanel und Narboni (zu verbessern nach Zarzah, Bl. 84, Col. 3) bei Kirchheim und im *Catal. Codd. h. Lugd. p.* 148, wo jedoch Jakob ben Reuben's Citat sich in dem ethischen Schriftchen findet, hingegen Prophiat Duran (*Chescheb ha-Efod,* HS. München 299, Bl. 18, Kap. 14) hinzuzusetzen ist. Ohne Namen und Titel anzugeben polemisirt gegen das Schriftchen schon Maimonides in Aegypten im Jahre 1172 (geb. in Cordova 1135); aus derselben Schrift stammt aber auch ohne Zweifel die Angabe des ebenfalls um 1170 in Nordfrankreich schreibenden Josef Bechor Schor (Cod. München 52, Bl. 198, zu Deuteron. 31, 18; auf die Stelle machte mich Hr. A. Berliner aufmerksam), wo der „*Sa'hib esch-Schorta* (so ist das verstümmelte Wort zu lesen) das ist Rabbi Abraham bar Chijja aus Barzellonia" genannt ist. Die frühe Verbreitung der Schrift nach den entgegengesetzten Richtungen der jüdischen Kulturgebiete ist auch für den Ort der Abfassung nicht ohne Bedeutung, und mag gleich hier hervorgehoben werden, dass auch Alfons de Spina bei seinen Anführungen dieser Schrift von dem Verfasser einmal sagt: *Abrahamus filius Hyae* (vergl. Anm. 5) *qui habitabat Barchinone,* einmal ihn irrthümlich *Salomo Barchinonensis* nennt. (Wolf, l. c. III, 31, vgl. *Catal. Codd. h. Lugd. p.* 149.) Die älteste, bisher unbekannnte Anführung bei einem christlichen Autor findet sich im Prolog des Henr. Bates (*ex dictis Abrahae principis in* 5 *particula libri redemptionis israel*); vergl. unten Anm. 20.

7) Auch er heisst *ha-Nasi* (s. weiter unten) bei Ibn Latas (Lattes), aus welchem die betreffende Stelle „aus einer alten Handschrift" bei Asulai. Vergl. über ihn *Catal. libr. hebr.* p. 1298.

8) Das heisst wohl: wendete sie practisch — astrologisch — an.

men, verachte ich meine Kunst (mein Thun?) und spreche: In meiner Kindheit und Jugend (Mannesalter?) beurtheilte man mich nachsichtig, wegen der Ehre, welche ich vor Fürsten und Königthum erworben[9]) und nun zur Zeit des Alters sollte es mir ein Zeichen zur Anklage sein? Es ist wohl gut, dass ich nach ihren (der Wissenschaft?) Urtheilen forsche und ihre Vorzüge aufzähle, auf dass der Zorn ihrer Feinde entbrenne, welche die Uebel derselben verkünden, damit sie ihren Tadel vollständig aussprechen; vielleicht wird die Macht ihrer Worte mich überzeugen, ihnen zu folgen".

Dieses Schriftchen gehört jedenfalls der späteren Lebensperiode des Verfassers an. Nach Zunz (Zur Geschichte S. 483), welcher jetzt die vollständige Handschr. besitzt, lebten Abraham und Jehuda an demselben Orte, vermuthlich Marseille. Auch bei dem Schriftchen A. vermuthet Geiger (Mose bei Maimon S. 70, vergl. *Catal. libr. hebr. p.* 1912), dass es in der Provence verfasst sei. Diese heutige Provinz Frankreichs wurde damals von einem Grafen von Barcelona beherrscht und blieben die dortigen Juden mit dem christlichen Norden Spaniens lange in näherer Verbindung. Hier, an der Grenze arabisch-muhamedanischer und christlich-romanischer Herrschaft, Sprache und Bildung, entstand zuerst unter den Juden das Bedürfniss der Vermittelung und Uebersetzung, und wir werden diese Thätigkeit als das Hauptverdienst Abrahams kennen lernen. Er weist selbst in den meisten seiner Schriften auf den Mangel arabischer Sprache und Wissenschaft in „diesen Ländern" oder in „Zarfat" hin, worunter man bis jetzt vorzugsweise Nordfrankreich verstanden hat.[10]) Rapoport (*l. c. p. XXXVIII—XL*) meint jedoch, dass Abraham in Spanien geboren und gestorben sei, in der Provence höchstens nur vorübergehend sich aufgehalten, mit Jehuda ben Barsillai habe er „ohne Zweifel" nur eine Hochzeitsreise

---

9) Vielleicht rührt daher sein, freilich arabischer Titel: Sa'hib asch-Schorta — welchen übrigens auch einer seiner jüngern Zeitgenossen, wahrscheinlich aus der Familie Ibn Esra führte (s. *Catal. l. h.* p. 1808, vergl. p. 1802) — und der bei Plato aus Tivoli zu Savasorda geworden (s. weiter unten). Die hebräische Benennung ha-Nasi (der Fürst) findet sich nicht selten in Barcelona und sonst im 12. und 13. Jahrhundert.

10) In der von Geiger benutzten Münch. Hdschr. fehlt wahrscheinlich das Wort, auf welches es hier ankommt. Auch im Buch Ibbur (unten N. 5) wird der Aberglaube des Blutfallens in den Quatembern „diesen Ländern" zugeschrieben (vergl. Hebr. Bibliogr. 1865, S. 50). Asarja de Rossi (Add. II zu Bl. 136; Bl. 312 ed. Wien) schaltet in einer Anführung dieser Stelle die Worte ein: „Das ist Zarfat, seine Geburtsstätte" (oder „sein Vaterland"), was jedenfalls unrichtig ist, da Abraham überall als ha-Sefaradi, d. h. der Spanier, bezeichnet wird. Ja es scheint, als ob diese Bezeichnung auch ohne Nennung des Namens an einzelnen Stellen bei Ibn Esra auf unsern Abraham zu beziehen sei; die Erörterung würde jedoch hier zu weit abführen.

dahin gemacht[11]); aber von dortigen Gelehrten sei die Anregung zu seinen mathematischen Schriften ausgegangen.[12]) Bequemer macht es sich Graetz (Geschichte der Juden VI, 120) durch die Behauptung, der Name Zarfat bedeute das christliche Nordspanien (Catalonien), welches bei den Arabern *al-Frang* heisse. Es kann hier nicht der Ort sein, die angebliche Parallele zu beleuchten, auf welche sich diese Behauptung stützen soll[13]), noch die Tragweite desselben zu verfolgen; doch mag die eine Folgerung gezogen werden, dass alsdann die in Abrahams Schriften sich wiederholenden Klagen wegen Unwissenheit in den mathematischen Wissenschaften sich auf die Bewohner Nordspaniens allein oder vorzugsweise beziehen würden! Mag aber Abraham in der Provence geschrieben haben oder nicht, so waren jedenfalls seine Schriften hauptsächlich für die Juden Frankreichs im weitesten Sinne des Wortes berechnet, wo noch beinahe ein Jahrhundert später ein berühmter Erklärer der Mischna, Simson aus Sens (nach Palästina ausgewandert) die Gültigkeit gewöhnlicher geometrischer Theoreme bezweifelt[14]). — In dem zu besprechenden Werke über Kalenderwesen (S. 119) ist eine Tabelle überschrieben: „Tafel zu wissen den Neumond nach dem Mittellauf in Soria“ (sic!). Daraus möchte der Herausgeber (in der Anm.) schliessen, dass Abraham sich dort aufgehalten, oder gar

---

11) Die Stelle aus Zunz giebt er S. XL noch ungenauer als der Herausgeber S. X, der schon das Wort Zarfat hinzusetzt, freilich im heutigen Sinne von Frankreich, also die Provence einschliessend. Das gedruckte Excerpt (Jahrb. *Kerem Chemed* VIII, 58) ist unberücksichtigt geblieben.

12) Rap. sieht sich dabei veranlasst, die Angaben de Rossi's zu Cod. 1170 weitläufig zu besprechen, indem er den Worten desselben: (*ipsi ad hanc provinciam adsumendam deduxerunt me, eo quod non esset in universa Gallia etc.*) einen verkehrten Sinn unterlegt, nämlich dass man Abraham von einer fruchtlosen Reise nach Frankreich habe abhalten wollen; in der That stehen schon jene Worte der Ansicht Rapoport's nicht entgegen. Der Text, der mir vorliegt, ist etwa so zu übersetzen: „Nicht aus freien Stücken (*lirezoni*) bin ich eingetreten (*nechnasti*, d. h. in die Arbeit) und nicht meiner Ehre willen, um mir darauf Etwas zu Gute zu thun, sondern viele der Grossen meines Zeitalters, deren Rath (Ansicht) ich anzunehmen verpflichtet bin, brachten mich zu allen Diesem, weil im ganzen Lande Zarfat (Frankreich) über diese Wissenschaften kein Buch in hebräischer Sprache geschrieben war, und nach ihrem Munde (Wunsche) übersetzte ich aus den Schriften Ismael's u. s. w.“ Beachtenswerth sind noch die Worte in der Einleitung zur Geometrie: „Ich sah, dass die meisten Gelehrten unseres Zeitalters im Lande Zarfat nicht in der Geometrie bewandert sind“, und am Schlusse derselben (s. mein *Mischnat ha-Middot* p. 7, Z. 1): „Du fällst in die Grube, in welche die Männer dieser Länder gefallen“ u. s. w.

13) Gegen Grantz S. 83 s. Zunz, Zur Geschichte S. 187. Zu beachten ist auch die Stelle in dem Werke *Zurat ha-Arez* unter Alinea 5: „nach Spanien (*Aspamia*) und den christlichen Ländern in Frankreich (*França*)“.

14) *Jewish Literature p. 362 n. 90.*

(Vorr. S. VII) dort geboren sei![15]) Mir ist das Wort (in) Soria in der Ueberschrift überhaupt verdächtig, es kann sehr wohl von einem dortigen Abschreiber herrühren[16]). Es findet sich nämlich S. 120 eine Tabelle über Länge und Breite von 23 Städten, meistens aus Spanien (auch einiger aus der Provence), an deren Spitze ebenfalls Soria steht, was bisher von den Biographen unbeachtet geblieben. Lelewel[17]) legt diesem Täfelchen eine Bedeutung für die Geschichte der Geographie bei und emendirt es aus den Parallelen des Marokkaners Abu'l Hasan, bemerkt jedoch (p. LI, N. 12) *„Soria, separé de la suite progressante de longitudes et placé en chef de toute la liste, est peut-être la patrie ou le séjour d'Abraham"*, wohl nicht ohne Hinblick auf die, freilich nicht ausdrücklich erwähnte Conjectur des Herausgebers. Es bemerkte aber schon Dav. Cassel[18]): „Woher der Herausgeber diese kleine Tabelle, die doch nicht zum Sefer ha-Ibbur zu gehören scheint, genommen, ist nicht gesagt"; zugleich erkennt er in demselben Buche eine Verweisung (S. 15) auf ein anderes Werk, in Bezug auf solche specielle geographische Angaben, als Interpolation. Das Täfelchen ist aber wohl der Oxforder Handschr. entnommen, da ich in meinen Notizen darüber finde, dass die letzten 4 Blätter (40—43, in Folio) Tabellen enthalten. Das beweist freilich noch nicht die Zugehörigkeit zu dem Werke über Kalenderwesen, ja nicht einmal die Autorschaft Abraham's. Aber die seltsame Isolirung Soria's erklärt sich durch die Annahme, dass der Abschreiber diese Stadt an die Spitze gestellt, oder die ganze Tabelle nicht von Abraham herrühre. Es ist das freilich auch nur eine Hypothese, aber eben nur als solche hingestellt, um nachzuweisen, wie wenig der isolirte Name Soria's für das Leben Abraham's massgebend sei. Hingegen ist Abraham bar Chijja sicherlich in Barcelona literarisch thätig gewesen, und zwar ist das jüngste Datum, welches ihn mit Barcelona in Verbindung setzt, das Jahr 1136, wofür die von mir entdeckte Beziehung zu Plato's Uebersetzungen entscheidend ist. Das Todesjahr Abraham's ist unbekannt, sein Geburtsjahr kaum annähernd zu conjiciren, da das Alter, von welchem er selber spricht, und zwar in einer Schrift, deren Datum unsicher, einen weiten Spielraum zulässt.

15) Auch in dieser Beziehung ist die Angabe Rapoport's p. XXXVIII ungenau; Luzzatto und Zunz wissen nichts davon; bei Graetz ist das freilich schon geschichtliche Thatsache.

16) Ueber die Varianten der aus Spanien herrührenden Oxforder Handschrift (Oppenh. 1143 fol., vom Jahre 1476, die Hand ist eine spanische, wie ich aus Autopsie weiss) und der Pariser (447, s. Litbl. des Orients IX, 795) s. die Bemerkung des Herausgebers p. XI.

17) *Géographie du moyen-âge I. p. L—LII* (vergl. *Epilogue p.* 94).

18) In einer Recension des Werkes Abraham's in Frankel's Monatschr. Bd. I. (1852) S. 65.

§. 5.

Wenden wir uns nun zu den mathematischen Schriften Abraham's, und zwar zuerst zu den hebräischen.

1. Für die des Arabischen unkundigen, in den profanen Wissenschaften wenig bewanderten Juden in Zarfat (oben Anm. 12) bearbeitete Abraham eine Art Encyklopädie, betitelt: *Jesode ha-Tebuna u-Migdal ha-Emuna* („Die Grundpfeiler der Einsicht und der Thurm des Glaubens"). Von diesem in seiner Art bedeutenden, für die Geschichte der Mathematik vielfach interessanten Werke haben sich, wie es scheint, nur Fragmente des ersten Haupttheils, meistens unter falscher Ueberschrift, erhalten. Der Verfasser beschränkt sich in denselben auf allgemeine Begriffe, Grundlehren u. dergl. der Arithmetik, Geometrie und Optik, worauf Musik und Astronomie folgen sollten. Die übrigen, in der Einleitung angegebenen Disciplinen übergehen wir hier. Nähere Angaben enthält ein Specialartikel in der „Hebr. Bibliographie" 1864 (No. 40.) S. 84 flg. Die für Mathematik genannten Quellen sind in der Zeitschrift für Mathematik, Bd. X. S. 466 mitgetheilt. — Es beruht wohl auf einem Irrthum eines Abschreibers, wenn man die allgemeine Einleitung zu diesem Werke vor der speciellen Geometrie (unter No. 6) in der Handschrift De Rossi's findet; obwohl es möglich ist, dass der Verfasser die zu nennenden ganz speciellen und ausführlichen Werke, die ebenfalls einen zusammengehörigen Cyklus zu bilden scheinen, an die Stelle der ganz allgemeinen Umrisse gesetzt hat.

2. *Zurat ha-Arez* (Form der Erde[19]), astronomische Geographie und

19) Dieser Titel ist, mit geringen synonymischen Veränderungen, für kosmographische Schriften (abgesehen von wirklichen Abbildungen, Karten, Sphären, deren Zusammenhang mit geographischen Erläuterungen hiermit nicht geleugnet wird) stereotyp geworden, und kommt bei den Arabern schon für die Geographie des Ptolemäus vor (s. Reinaud, Einleit. zu Albufeda p. 45, 132; hebr. Titel bei Abr. Zakut, *Juchasin* f. 143, Ausg. Crac.; unrichtig ist die Mittheil. Carmoly's bei Lelewel, Geogr. I, 19 [vgl. *Epilogue* p. 46]; die Ausg. London p. 245 ist hier corrupt; bei Narboni zu Maimonides II, 30, Bl. 41 liest man: „Ptolemäus im Buche der Welt"; *liber de mappa mundi* bei Ibn Ridhwan [„Rodoam"] im Vorwort zum Comm. über das *Quadripartitum*, Bl. 1, Col. 3, ed. 1519; vgl. *mappa antiqua* und *mappa nova* das. II, 3, Bl. 27, Col. 4). Doch wird es nicht überflüssig sein, zu bemerken, dass zur Zeit des Abraham noch kein Werk des Ptolemäus ins Hebräische übersetzt war, die Geographie auch später nicht. Die vielfach wiederholten Angaben von hebräischen Uebersetzungen griechischer Autoren beruhen auf Irrthümern, deren Beleuchtung hier nicht beabsichtigt sein kann (vgl. *Jew. Lit. p.* 353, *Catal. L. h. p.* 2487). Hingegen mögen einige christliche Verfasser von Schriften *de imagine mundi* genannt sein, die ich zufällig notirt habe, ohne deren Zeitalter genauer verfolgen zu können. Ausser dem bekannten, auch in Reimen vorhandenen *Image du monde*, welches auf Walther *(Gauthier)* von Metz (um 1245) zurückgeführt wird, auch in hebräischer und jüdisch-deutscher Bearbeitung existirt (s. die Citate im Serapeum 1863 S. 101, vgl. Lelewel l. c. II, 7) und Peter aus Ailly (um 1410, s. Reinaud, Einl. zu Abulf. p. 115, vgl. Lelewel, Epil. 124), fand ich Petrus de Casa, Patriarch von Jerusa-

Astronomie in 10 „Pforten" (Abschnitten). Der Verfasser spricht sich über den Inhalt in der Vorrede folgendermassen aus:

Die Sternkunde zerfällt in zwei Haupttheile: 1) über Form des Himmels, Gestalt der Erde, Lauf des Himmels und der Sterne, eine eigentliche Wissenschaft. Die Astronomie zerfällt in zwei Theile: *a*) Form oder Construction von Himmel und Erde u. s. w. nebst den Beweisen, *b*) Berechnung der Läufe und Bestimmung des Standes der Sterne zu jeder Zeit. Das vorliegende Werk enthält nur den ersten Theil, der zweite ist einem anderen Werke vorbehalten. — Der zweite Haupttheil: Die Astrologie, ist keine eigentliche Wissenschaft, empirisch und ohne stringente Beweise. Der Verf. will jedoch, wenn er den ersten Haupttheil beendet hat, sich auch dem zweiten zuwenden — wahrscheinlich der Vollständigkeit halber. Es scheint jedoch, als sei er nicht dazu gekommen; wenigstens hat sich keine Spur eines solchen selbstständigen Werkes selbst in Citaten der jüdischen Astrologen des 12. und 13. Jahrhunderts erhalten, welche im Namen des Abr. bar Chijja fast nur astronomische Specialitäten anführen.[20])

---

lem (Cod. Digb. 16 im *Catal. Mss. Angl. I*, 77), und Ludovicus de Angulo (der auch das Buch der Nativitäten des Ibn Esra aus dem Spanischen übersetzte), in Cod. Paris 6561. Ueber ein, dem Werke Abraham's ähnliches, aber mehr astronomisches anonymes Compendium: „Form des Globus" *(Temunat ha-Kaddur)*, nur in hebräischen Handschr. erhalten, s. Hebr. Bibliographie 1864, S. 27„ 47 (1862 S. 108). — Hingegen ist das mit Abraham's Werke gleich betitelte des Isak Lathif bei Heilbronner p. 476, §. 492 ein kabbalistisches (herausg. Wien 1862).

20) D. M. Zeitschr. XVIII, 122. Dass man die eschatologische Schrift nicht hierher ziehen könne, ist schon oben (S. 6) bemerkt worden. In den astrologischen Schriften des Ibn Esra ist unser Abraham nur an äusserst wenigen Stellen genannt, abgesehen von einigen Missverständnissen des lateinischen Uebersetzers Henricus Bates, die zu weiteren Irrthümern geführt haben. In dem Buche *de mundo* (Bl. 78, col. 4) übersetzt derselbe ungenau: *dicit Abraham magister noster*; auf dergleichen Stellen beruht seine Behauptung im Prolog (vgl. oben Anm. 6), dass Ibn Esra unseren Abraham als seinen Lehrer bezeichne, was dann von *Pico de la Mirondola* und bis zu unserer Zeit (unten Anm. 38) wiederholt worden, ohne dass man die Quelle kannte. Ich komme anderswo darauf zurück; hier ist nur zu bemerken, dass an jener Stelle wahrscheinlich Ibn Esra selbst der Abraham ist (im Cod. München 304, Bl. 2 liesst man: „Ich Abraham"). Auch im hebr. Text selbst haben die Abschreiber manchmal dem Namen Abraham den Ehrentitel „Rabbi" vorgesetzt, so dass man ohne Vergleichung von Handschriften die Worte des Verf. selbst für Citate halten möchte. Bald darauf liest man bei Bates zweimal „Abraham", einmal *abratam*, wo der hebr. Text richtig „Abarchas", d. i. Hipparchos hat! In der unedirten Recension des Buches der Ursachen *(Taamim)*, welche ich für die ältere halte (Hebr. Bibliographie 1860, S. 33), bemerkt Ibn Esra, dass „Abraham ha-Nasi" bereits die „Leitungen" *(Nihugim = Directiones*, arab. *Tasjirât)* angegeben, welche er selbst also nicht anzugeben brauche, ferner dass der „Nasi" die Methode angegeben, die Grade des Sternes zu finden, wenn er eine Breite hat. Aber diese Berechnungen der Astrologie bilden einen Theil der unter 3, 4 zu nennenden Werke; und dort wird auch wohl das zu finden sein, was Ibn Esra in der von ihm gestellten Nativität be-

Von unserem Werke wurde ein Auszug des Textes mit lateinischer Uebersetzung von Münster (1546) herausgegeben, der vollständige Text mit Anmerkungen erschien, nebst zwei Bearbeitungen von *Sacrobosco*'s Buch über die Sphäre — deren zweite bisher nicht als solche erkannt worden (*Catal. l. h. p.* 2255) — erst 1720 und ist in nichtjüdischen Kreisen wenig bekannt geworden [21]), obwohl es weit früher die Aufmerksamkeit eines italienischen Fürsten auf sich gezogen, wie folgende, bisher unbekannte Nachweisung ergiebt. Die lateinische Handschrift *Ottobon.* 2079 des Vaticans enthält nämlich auf 51 Blättern eine wahrscheinlich vollständige lateinische Uebersetzung des Werkes. Im März 1863 theilte mir Fürst Boncompagni Folgendes aus dem Anfang und Ende mit:

In noīe dei. Liber de forma terrae et de figuratione celestium nec non de ordine motus stellarum: *Dixit Abraham patriarcha* (!) *filius Rabi chagia* [lies *chayia*] *hispanus scientia astrorum juxta horum* [l. *hominum*] *opinionem in duas maximas dividitur partes* (Bl. 1, Z. 1'—6). Diese Worte stimmen mit dem eigentlichen Anfang des hebr. Textes, nach den einleitenden Eulogien. Ende: *Oramus itaque deum ut adiuvet nos atque animet ad observandum ac firmiter tenendum dicta et praecepta ipsius legis omnibus diebus nostris amen.* [Fehlen nur drei unwesentliche Worte der Schlussformel des Originals.] *Expletus ést hic perutilis ac preciosus tractatus de astrologia quem traduxit ex hebraeo in latinum magister Hysaach hebraeus francogena ad compascentiam magnanimi ac sapientissimi principis domini Alberti Sij de Sabaudia.* Ueber die Zeit dieses Albert von Savoyen habe ich bis jetzt keine Auskunft erhalten können; Magister Isaak (vielleicht Zarfati, Franzose genannt) ist mir sonst unbekannt; Männer Namens Isaak Zarfati lebten zu verschiedenen Zeiten.

Vielleicht giebt es auch eine französische Uebersetzung unseres Buches. In dem Artikel *Aben Hezra* der *Biogr. univers. T. I.* (1843) *p.* 64 von Derenbourg, liest man: *La bibliothèque.. Sorbonne possedait une traduction française de la Sphère d'Aben Ezra faite en* 1273 *par maitre Deïade.* Wenn hier nicht Ibn Esra's Schriftchen über das Astrolab gemeint ist, so wäre eine Verwechslung des Autors anzunehmen. — Das Verhältniss des

---

merkt (s. unten zu Ende des Artikels), und woraus ich nur die Worte excerpirt habe: „Wozu soll ich noch weitschweifig sein über (d. h. in Bezug auf) den Nasi; die Worte sind lange (viel), und es ist gut, den kurzen Weg zu gehen und zu bemerken" u. s. w. — In meiner Handschrift der Tafeln (s. Anm. 24) Bl. 65ᵇ liest man: „Die meisten Dinge, welche am Ende dieses Buches erwähnt sind, beziehen sich auf die Rechenkunst nur entfernt, hauptsächlich gehören sie zur Erfahrungskunst (Astrologie); wir sind aber veranlasst worden, sie in diesem Buche zu erwähnen, um die Methode der Berechnung und was damit zusammenhängt, vollständig zu geben. Ich schliesse also an dieser Stelle" u. s. w.

21) Delambre (*Hist. de l'astr. du moyen-âge p.* 211) und Lelewel a. a. O. I. p. II, gründen ihre Angaben auf das Compendium, das mir jetzt nicht vorliegt.

Werkes zu dem bekannten ähnlichen von Alfergani verdient nähere Untersuchung[22]).

3. *Cheschbon Mahlechot ha-Kochabim* (Berechnung der Läufe der Sterne), der zweite Theil der Astronomie, welcher in 20 Pforten die versprochene specielle Ausführung enthält. Der Anfang des Vorwortes ist in dem unter 5 zu nennenden Werke p. VIII. abgedruckt. An denselben schliesst sich die Inhaltsangabe, dann bemerkt der Verfasser, dass man hier manches, schon im ersten Theile Vorgebrachte wieder finden werde; er habe nicht die Absicht, Dinge zu wiederholen, sondern es sei dies zur Begründung der Berechnung nöthig. Es versteht sich von selbst, dass diese, wie alle ähnlichen Schriften der Araber und Juden der älteren Zeit, auch die Berechnung von Themen darbietet, die nur für die Astrologie einen Werth haben. So ist die 18. Pforte gewidmet der Berechnung des aufgehenden (*Horoscop*) und des im Zenit („Hälfte des Himmels") stehenden Gestirnes, sowie der Berechnung der sogenannten „Häuser", nach welchen bekanntlich die Nativität gestellt wird. Ich habe noch nicht Gelegenheit gehabt, letztere näher zu untersuchen, an welche sich ein besonderes Interesse knüpft. Schleiden (Studien 1855, S. 251) findet nämlich in dem *liber nativitatum* des „Juden Abraham", Venedig 1485, eine „ganz seltsame, nirgends erwähnte Eintheilung des Horoscops, welche ausdrücklich als indisch bezeichnet wird"[23]). Dieses Buch hat Abraham Ibn Esra zum Verfasser, auf dessen Verhältniss zu indischen Doctrinen noch näher einzugehen sein wird. Es gehört hierher auch eine Stelle bei Delambre (*Hist. de l'astr. du moyen-âge p.* 496): *La manière de construire un theme, emprunté d'Abraham Aben-Esra par Regiomontanus, a paru préferable à toutes les autres. On croit qu'elle se rapproche beaucoup de celle de Ptolemée.* In einer hebräischen Handschrift der Bodleiana (Reggio 47) findet sich hinter einer

22) Ueber die abweichende Angabe der Klimata s. Lelewel l. c. — In der IX. Pforte ist von der Erdmessung unter Ma'amun die Rede. — Die betreffende Stelle im Alfergani ist stereotyp geworden, vgl. die Bemerkungen Reinaud's (Einleit. zu Albufeda p. L. und sonst) mit der Literatur bei Riccioli, *Almag. nov. I. p.* 61. — In demselben Abschnitte wird in der Ausgabe Albattani (auch in Pf. X citirt) als derjenige genannt, welcher die kleinste Zahl für den Himmelsumfang angab; in der mir vorliegenden Handschrift aus Reggio's Sammlung, welche jetzt Herr Schorr besitzt, liest man Alfergani für Albattani. Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, dass in der Astronomie des Isaak Israeli IV, 7 (vgl. *Jew. Lit.* p. 354, Note 20a, wo das Citat ungenau) von israelitischen Weisen im Lande *Elum* die Rede ist, aber wohl „ismaelitische" zu emendiren. Vgl. auch D. M. Zeitschr. XVIII, 121, Anm. 5.

23) Nach Schleiden, S. 256, hätte Maschallah, „ein Araber, der ungefähr gegen Ende des X. Jahrh. gelebt haben muss", zuerst die künstlichen „Häuser" angewendet. Der Jude Maschallah, auf welchen sich fast alle uns zugänglichen arabischen Astrologen berufen, lebte schon unter Mansur und Maamun, also im VIII. Jahrhundert.

Abhandlung über das Astrolab, nach Josef Taitazak (Anfang 16. Jahrh.), vielleicht von einem Schüler desselben niedergeschrieben, eine Anweisung, das aufgehende Gestirn (*Zomeach*) und die 12 Häuser zu finden (Bl. 176), an deren Schluss es heisst: „Diese Eintheilungsweise der Häuser folgt der Ansicht des Ibn Esra und des Levi ben Gerschom [um 1330—40], auch der Ansicht des seligen Mordechai Finzi [blühte Mitte 15. Jahrh.]. Allein nach der Ansicht des Ptolemäus und aller Aelteren, auch nach der Ansicht des weisen Rabbi Abraham Zacut, des gelehrten, in unserer Zeit, auf den man sich verlassen darf, ist die Methode eine andere, die ich dir mittheilen will, es ist die des Alfons [Randnote: in seinen Tafeln, welche die genauesten sind, die sich in unserer Zeit finden], und nach derselben richtete sich mein Lehrer Josef Taitazak, den Gott beschütze.“ (Vgl. Hebr. Bibliographie 1864. S. 27. Anm. 2). Es wäre demnach von einigem Interesse, zu wissen, welche Methode der astrologischen Himmelstheilung unser Abraham vorbringt.

Von diesem unedirten Werke finden sich Handschriften u. A. in der Medicea (Plut. 88. Cod. 28[5], und Cod. 30[6], bei Biscioni ed. in 8. pag. 483, 494), im Vatican 379 (s. weiter unten), Paris a. f. 464 und sonst (nach Dukes, im Litbl. des Orients 1849, S. 430), woraus eine Abschrift Goldberg's jetzt in der Bodleiana (Oppenheim Add. Oct. 5), in Leyden (Warner 37, s. meine Beschreibung im Catalog der dortigen Handschriften p. 150); die Handschrift, welche der jüngst verstorbene Luzzatto besass, ist wohl von Herrn Halberstamm in Bielitz erkauft, die Handschrift Almanzi 212. I. ist jetzt im Brit. Museum in London. In der Turiner Handschr. (66 bei Pasinus p. 24) soll dem Werke eine Vorrede des Jakob ben Machir vorangehen. Die Münchener Handschr. 36 enthält auf Bl. 142[b] und 143 nur bis Ende der ersten Pforte. Die von Wolf und De Rossi (Wörterbuch deutscher Uebers. S. 81, n. 3: „Astrologische (!) Berechnungen“) angeführte Handschrift Oppenheim ist 1665 Qu., wo auf Bl. 97 bis 99 unter der incorrecten Ueberschrift: *Misefer* (oder *Mispar?*) *Cheschbon* eine Aufzählung der 48 Sternbilder, beginnend: „Anzahl der Sterne. Die Fixsterne, deren Orte die Alten in ihren Büchern angeben, sind 1022“ u. s. w. Ob dieses Fragment wirklich aus unserem Werke excerpirt sei, vermag ich zur Zeit nicht anzugeben. Vielleicht ist hiermit identisch das Fragment „Anzahl der Sterne“ in einer Handschrift in Meseritz (s. Hebr. Bibliogr. 1864. S. 112, n. 2). — Die Stelle bei Christmann zu Alfergani p. 195 (angeführt von Boncompagni in den *Atti dell' Acad. pontif.*, A. XVI, 1863 p. 927) aus einer pfälzischen Handschrift des *computus motuum coelestium* von Abraham bar Chijja, ist jetzt im Vatican. Cod. 379 zu suchen, da bekanntlich die hebräischen Handschriften Heidelbergs im dreissigjährigen Kriege nach Rom wanderten.

4. *Luchot*, astronomische Tabellen, gewöhnlich als Tabellen des

„Nasi“ bezeichnet, oder Tabellen nach Ptolemäus[24]), können eigentlich nur als eine Art von Anhang zu dem vorangehenden Werke betrachtet werden; allein die Handschriften, die sich erhalten haben, scheinen nicht mehr die ursprünglichen, wenigstens nicht in Bezug auf die begleitenden Regeln, was sehr begreiflich ist, da es scheint, dass sie noch lange, jedenfalls bis tief ins 13. Jahrhundert, als mustergiltig betrachtet, vielleicht ausschliesslich benutzt wurden. Solche Tabellen werden aber gewöhnlich von gelehrten Abschreibern oder Bearbeitern mit Zusätzen ausgestattet, namentlich mit solchen, welche den Gebrauch für eine spätere Zeit erleichtern, mitunter werden auch die inzwischen verflossenen Zeiträume weggelassen, so dass die „Radix“ (das Ausgangsjahr) nicht immer für die ursprüngliche Abfassung massgebend ist. Nun wissen wir zwar aus einem Citat des Spaniers Josef ben Elieser (zu Genesis 32 n. 30), dass auch Ibn Esra zweierlei astronomische Tabellen verfasst habe, nämlich in Lucca in der Lombardei[25]) und in Narbonne, in welchen er ein verschiedenes System in Bezug auf den Anfangspunkt der Erdlänge befolgte[26]), und das Zeugniss ist um so zuverlässiger, als der betreffende Autor selbst ein kundiger Mathematiker war und im Jahre 1335 astronomische Tafeln verfasste, nach Assemani's Catalog der Vatican'schen Handschriften[27]). Allein Ibn Esra hat auf seiner Wanderung einen grossen Theil seiner zahlreichen Schriften aller Art blos in veränderter Gestalt wieder herausgegeben, und da meines Wissens kein einziges

---

24) So z. B. bei Mordochai Finzi (1446) in der Handschrift Michael 570 (*Jew. Lit.* p. 189 und 360, Anm. 70). In meiner zu erwähnenden Handschrift Bl. 63b, wo es sich um die Berechnung der sogenannten Revolutionen (*Tekufot*) der Jahre handelt, liest man: ... „nach Ansicht des Ptolemäus, nach welchem die Läufe in diesem Buche berechnet sind“; vgl. auch Bl. 65. Allein Bl. 65b (diese Stelle ist in meinem Catalog der Leydener Handschriften p. 151, A. 1 gemeint) bemerkt der Verf., dass Manche, die sich mit der Berechnung [des Laufes] der Sterne abgeben, mehr der Ansicht des Albattani zuneigen, der zur Zeit Alma'amun's lebte u. s. w., mehr als 700 Jahre nach Ptolemäus u. s. w. Viele Berechner unter den Ismaeliten verliessen sich auf Albattani; darum wolle er die Unterschiede zwischen Ptolemäus' und desselben Berechnung des Laufes der 7 Planeten und des Kopfes und Schwanzes des Drachen angeben. Es folgen später auch Tafeln nach Albattani. Sollten sich auf Abraham's Tafeln die Worte Ibn Esra's im Buch *de mundo* (lat. Uebers. Bl. 97, Col. 3, vgl. D. M. Zeitschr. XVIII, 161) beziehen: „Man muss sich über einen grossen Mann wundern, welcher Tafeln über den Mittellauf nach Albattani verfasste, und behauptet, dass es Tafeln des Ptolemäus sind“? Anderswo (Randnote Ms München 304, s. D. M. Ztschr. XVIII, 161, A. 57) werden die Tafeln des Battani geradezu mit denen des Nasi identificirt!

25) In einer Aufzählung von Städten und ihrem Sternbild im Zodiak in der bisher unbekannten Recension des *liber de mundo* (Cod. Münch. 202, Bl. 139b) heisst es bei Lucca: „Wie ich zweimal (oder mehrmal?) erprobt.“

26) Auf dieses, für die Geschichte der Geographie und des jüdischen Kalenderwesens interessante Thema werde ich anderswo ausführlicher eingehen.

27) Vgl. Hebr. Bibliographie 1863, S. 115.

Exemplar oder Fragment aus den Tafeln des Ibn Esra bis jetzt aufgefunden worden: so haben wir kein Urtheil über das Verhältniss der beiden Recensionen zu einander und beider zu den Tafeln des Abraham bar Chijja, von welchen die wenigen bis jetzt näher bekannten Handschriften Zusätze oder Citate aus Ibn Esra enthalten, ohne dass man auch nur mit Wahrscheinlichkeitsgründen entscheiden kann, ob Ibn Esra selbst etwa bei seiner Bearbeitung die Tafeln bar Chijja's bereichert habe (*Catal. Codd. Lugd. p.* 151), oder ob Andere aus den Tafeln des Ibn Esra Zusätze zu denen des Nasi gemacht. Nähere Untersuchung verdiente die alte Handschrift in Cesena, welche nach Muccioli's Angaben (Catal. II, p. 194) mit meiner im Leydener Catalog p. 151 erwähnten in Bezug auf die Anordnung übereinstimmt.

Die letztgenannten 3 Schriften bilden äusserlich und innerlich ein zusammengehörendes Ganzes, obwohl keine einzige bisher bekannte Handschrift sie sämmtlich und in gehöriger Aufeinanderfolge enthält. Die Radix der Berechnung und der Tafeln ist der Cyclus 257, das sind die Jahre 4865 bis 4883 (oder 1104 bis 1123). Dennoch ist in dem Werke 2 (Kap. 5, auch in der Handschrift Reggio, jetzt Schorr's) von „diesem Jahre" 1444 der seleucid. Aera die Rede, welches 989 nach Ptolemäus sei, also schrieb der Verfasser um 1133. Ferner haben verschiedene Handschriften von Werk 2 und 3 das Datum der Beendigung Barcelona Mai und April 1136, jedoch mit einer, den Autor als verstorben bezeichnenden Eulogie, die freilich von jüngeren Copisten hinzugesetzt sein kann[28]). Andererseits habe ich aus den Leydener Handschriften (*Catal. Lugd. p.* 150) nachgewiesen, dass Nachträge zu Werk 3 und 4 existiren, welche vielleicht einer zweiten Redaction angehören.

5. *Sefer ha-Ibbur*, Buch der Kalenderrechnung, erschien zuerst London 1851 mit einem englischen Titel: *Abraham bar Chyiah the prince, who flourished in Spain in the* 11*th* (!) *century on the mathematical and technical chronology of the Hebrews, Nazarites, Mahommetans (sic) etc. ed. and printed by H. Filipowski.* In dieser Schrift wird (z. B. S. 112 [vergl. S. 106]) das Jahr 1124 als das kommende bezeichnet[29]). Wenn dieses Werk auch nicht das „erste" über den Gegenstand ist, wie der Herausgeber auf dem hebräischen Titelblatt drucken liess, so ist es doch das älteste bekannte in hebräischer Sprache, und für die noch immer an Dunkelheiten leidende Geschichte der

---

28) *Catal. Codd. h. Lugd.* p. 150; vgl. auch Cassel l. c. p. 64 und Rapoport p. XLVII, welcher für Werk 2 das Schlussdatum 1133 emendiren möchte.

29) Dass diese (specifisch jüdische) Monographie nicht etwa als planmässiger Theil der vorangegangenen (allgemeinen) astronomischen Schriften anzusehen sei, hat Cassel l. c. S. 65 richtig erkannt.

jüdischen und christlichen Kalenderberechnung von Wichtigkeit [30]), und ist Manches, was durch spätere Autoren bekannt geworden, aus diesem Buche geflossen.

Im Catalogus MSS. Angliae I p. 78, N. 1641 Digb. 40 wird angegeben: *Abraham Judaeus de re Astronomica. Floruit iste Auctor A. D.* 1100. Daselbst p. 161, N. 3338,[19] (Seld. N. 8): *Abrahami Judaei Astronomia, Latine, transscripta e Cod. MS. Bodleiano.* Eine andere Handschrift Selden finde ich nicht. Näheres über Inhalt und Autor ist nicht bekannt; denn die Einreihung beider Nummern unter Aben Esra im Index jenes Catalogs hat für uns nicht den mindesten Werth. Wolf (*Bibl. hebr. I, p.* 84) bemerkt, dass Ed. Bernard in seiner beabsichtigten Synopsis alter Mathematiker eine Astronomie des Ibn Esra aus einer Handschrift Digby und Selden aufnehmen wollte, und das Werk als *eximium* bezeichne. Wolf zweifelt nicht, dass es die oben angegebenen seien — für Selden hat er N. 508, aber eine solche Ziffer kommt bei der Selden'schen Sammlung gar nicht vor. Er bemerkt jedoch mit Recht, dass das angebliche Jahr 1100 nicht für Ibn Esra, sondern Abraham bar Chijja angemessen sei. Ich füge hinzu, dass auch die Bezeichnung *Astronomia* auf keine der bekannten Schriften Ibn Esra's passe — welche Gegenstand eines weiteren Artikels sein werden, — wenn man nicht etwa seine Abhandlung über das jüdische Kalenderwesen darunter verstehen will, welche in der Bodleiana früher nur in einer Handschrift des „Museum" (bei Uri 438) vorhanden war. Es fragt sich also, ob nicht in der That eine der obengenannten Schriften in jenem Codex enthalten ist?

Eine Handschrift des Werkes über den Kalender, welche sich in der Casanatensischen Bibliothek des Klosters St. Maria sopra Minerva der Dominicaner in Rom (Cod. in 4. H. V, 10[1]) befindet, soll „Correctiones" des Ibn Esra enthalten, nach dem handschriftlichen Verzeichnisse, aus welchem mir Herr Narducci soeben (Mitte Juli) die Stellen (p. 730) mittheilt, welche sich auf hebräische wissenschaftliche Handschriften beziehen. Allein die sämmtlichen Angaben jenes Verzeichnisses bekunden so wenig Sachkenntniss, dass ich der obigen insbesondere wenig Glauben schenke. Vielleicht hat Jemand am Rande Excerpte aus dem betreffenden gleichbetitelten Werke des Ibn Esra notirt, in welchem in der That Abraham bar Chijja citirt wird.

6. *Chibbur ha-Meschicha we-ha-Tischboret*, eine Geometrie, auf deren Bedeutung ich in der Zeitschr. f. Math. X, S. 494 aufmerksam gemacht habe. Eine genaue Schilderung dieses Werkes in seinen beiden Recensionen, deren eine vielleicht ursprünglich der Encyklopädie (oben 1)

---

30) Ich verweise, der Kürze halber, auf die vor Kurzem erschienene zweite Ausgabe des *Jesode ha-Ibbur* von Slonimski (Szytomir 1865), eines Compendiums der jüdischen Chronologie mit besonderer Rücksicht auf die Entwickelungsgeschichte.

angehörte, muss einem andern Orte vorbehalten bleiben. Für den Zweck dieses Artikels wird eine summarische Mittheilung genügen.

Das hebräische Original findet sich mehr oder minder vollständig in folgenden Handschriften, und zwar unmittelbar hinter der Einleitung zur Encyklopädie in *Cod. de Rossi* 1170, ohne diese, aber dieselbe Recension in Cod. München 256; eine andere Recension, die ich durch B. bezeichnen werde, im Vatican n. 400, München 290 und in Paris, vielleicht Orat. 160, aber jedenfalls ein bedeutendes Stück in *anc. fonds* 449, wie sich weiter unten ergeben wird. Im *Serapeum* 1858 (N. 3 und 6) habe ich zuerst die Identität dieses Werkes mit dem von Plato aus Tivoli übersetzten *liber Embadorum* des Juden „Savasorda" als Vermuthung ausgesprochen, welche nunmehr zur Sicherheit erhoben ist. Aus dieser Identification ergeben sich verschiedene specielle und allgemeine Momente von einiger Bedeutung. Boncompagni hat in seiner Abhandlung über Plato aus Tivoli (1851) aus 5 Handschriften in Paris, Florenz und Bologna[31]) das Schlussdatum 15 Saphar 510 der Flucht — das ist 29. Juni 1116[32]) nachgewiesen. Allein dieses Datum kann nicht ohne grosse Schwierigkeit auf die Uebersetzung des Plato bezogen werden, dessen Zeitalter freilich bisher, wie es scheint, eben nur nach dieser Uebersetzung fixirt worden. Wir haben gesehen, dass der hebräische Verfasser noch 1124 und 1133 bis 1136 literarisch thätig war, und wir werden ihn weiter unten mit Plato zusammen in Barzellona im J. 1136 finden. Es frägt sich nun: ist das Datum 510 ein falsches? Bezieht es sich auf das Original? Wenn letzteres der Fall ist, warum findet sich in den obenwähnten Werken Abrahams nirgends eine Beziehung auf das ältere, auch seiner Natur nach vorangehende, während es sonst an gegenseitigen Citaten nicht fehlt? Ich bin daher sehr geneigt, das Datum 510, trotz des Zeugnisses der Abschriften, für einen Irrthum zu halten, und bitte ich diejenigen, welche im Stande sind, das Datum aus dem beigesetzten Standpunkt der Planeten zu verificiren, sich dieser Mühe zu unterziehen. Ich habe mich früher durch die incorrecten Angaben Guglielmini's bei Boncompagni (Versioni di Platone p. 37) verleiten lassen zu glauben, dass Fibonacci selbst in seiner Geometrie den *liber Embadorum* oder das Epigraph aufgenommen habe; in der That befinden sich nur beide Werke in derselben Handschrift Isolani's, wie Boncompagni in den *Atti* 1863, p. 944 berichtigt, nachdem schon Libri (Hist. II, 38) bemerkt hat, dass die von Guglielmini angeführte Stelle über Savasorda sich in beiden pariser Handschriften des Fibonacci nicht finde.

---

31) Par. 7224 und Suppl. 774 (jetzt 11246); Flor. in der Maglial. Scaff. 2. Palch. IV, n. 36 und St. Marco 184; Bol. Handschrift des Grafen Isolani. — Vergl. auch *Atti dell'Acad.* XVI, p. 93, 943, 944; das. p. 941 ist auch noch eine Handschrift in Dublin berüchsichtigt, auf welche ich in meiner (noch unvollst.) Abhandlung: *Les ouvrages du Prince Boncompagni* (Rom 1859) aufmerksam gemacht.

32) Vgl. *Atti* l. c. p. 938 und Wüstenfeld's Tabellen.

In Bezug auf den Umfang des Werkes muss wiederholt auf die Berichtigung von Chasles (*Comptes rendus XIII*, 510; vergl. D. M. Zeitschr. XVIII. 124, A. 11) hingewiesen werden, dass nämlich die Fragmente über Algebra, Höhenmessung durch ein Instrument, mit Citaten aus Macrobius und Eratosthenes (vgl. Zeitschr. f. Mathem. X, 478 N. 40), in einer der pariser Handschriften, woraus Libri (II, 275, 480) allerlei Schlüsse gezogen, gar nicht zum *liber Embadorum* gehören. Es erledigen sich hiermit auch die Fragen Veratti's (*De' Matematici Italiani etc.* Modena 1860 p. 12), ob etwa Plato Zusätze aus Gerbert's Geometrie gemacht, oder gar Gerbert das hebr. Original gekannt habe (was nach den neuesten Forschungen über Gerbert wohl mehr als unwahrscheinlich ist), wie eine kurze Analyse des letzteren noch deutlicher machen wird.

Die specielle Vorrede, welche im J. 1859 aus einer anonymen pariser Handschrift sehr uncorrect abgedruckt worden, und nach Benutzung der Römischen, Münchener und Parma'schen Handschriften (De Rossi's) gelegentlich nochmals mitgetheilt werden soll, ergiebt, dass der Verfasser dieses Werk hauptsächlich für seine Glaubensgenossen in Zarfat (Frankreich) verfasst habe, welche bei der Theilung von Aeckern u. dergl. unwissenschaftlich verfuhren, und von einem vermeintlich fromm-conservativen Standpunkte aus eine wissenschaftliche Belehrung zurückwiesen[33]). Plato hat von dem Inhalt dieser Vorrede keinen Gebrauch machen können, er beginnt[34]) mit der Schlussbemerkung derselben: Der praktischen Geometrie müssen gewisse Grundlehren der Rechen- und Maasskunst vorangehn. Desshalb zerfalle das Werk in IV. „Pforten":

I. Gründe (Theoreme) der Maass- und Rechenkunst.
II. Messung von Erde und Feld nach ihrer Figur: Vierecke, Dreiecke, Kreise u. s. w.
III. Theilung aller genannten Figuren.
IV. Messung von Gruben, Höhlen, Hügeln u. s. w. (Tiefen und Höhen) in geometrischer Weise (Tischboret).

Pf. I beginnt mit der Bemerkung, dass jede Wissenschaft und Kunst technische Ausdrücke habe, welche gewöhnlich gar nicht oder in verschiedenem Sinne gebraucht werden, weshalb jeder Verfasser eines wissenschaftlichen Werkes die Erklärung solcher Wörter vorauschicken müsse. Demnach beginnt Abr. mit dem Worte *Erech*, welches hier im allgemeinen Sinne von „Grösse" genommen scheint, angewendet auf „Maass, Zahl, Gewicht und

---

33) Den Widerspruch der orthodoxen Muselmänner gegen die mathematischen Disciplinen, aber mehr wegen der demonstrativen Methode, erwähnt ein Zeitgenosse unseres Abraham, der berühmte Araber Gazzali (bei Schmölders, *Essai sur les écoles philos. chez les Arabes*, Paris 1842, p. 31 ff.).

34) Bei Boncompagni p. 33 (aus Cod. Magliab.): *Qui omnes mensurandi dividendique modos recte nosse desiderat.* Ich folge dem hebr. Original.

alles Aehnliche".[35]) Dann folgt *Nekuda* (Punkt) als Etwas, was keinerlei Grösse hat, weder Länge, noch Breite, noch Tiefe, noch irgend ein Maass, aber zusammenhängt mit dem Maass, weil er das Ende der Linie und deren Anfang ist u. s. w. Diese ganze weitläufige Auseinandersetzung hat der lateinische Uebersetzer Plato zusammengezogen in die Worte: *Punctus est, cujus nulla pars est,* mit welchen er überhaupt beginnt[36]). Gegen Ende der ersten Pforte hat gerade die Recension *A* zweimal eine längere Ausführung.

Die zweite Pforte beginnt ebenfalls mit einigen terminologischen Bemerkungen, worauf eine Unterabtheilung in 5 Theile folgt.

1. Messung des gleichseitigen und des rechtwinkligen Vierecks;
2. Messung der Dreiecke;[37])
3. Messung der nicht gleichseitigen und nicht rechtwinkligen Vierecke;
4. Messung der Felder, welche kreisförmig, halbkreisförmig, grösser oder kleiner als letztere;
5. Messung der polygonalen Felder.

Im 4. Theile wird Euclid angeführt, und den Schluss desselben bildet (in B.?) eine, in 28 Reihen getheilte Tafel der Sehnen und Chorden. Diese Chordentafel findet sich in der pariser hebräischen Handschrift (a. f. 449), in deren Beschreibung Terquem (*Notice sur un ms. hebreu du traité d'arithmetique d'Ibn Esra, p.* 1 des Sonderabdrucks aus dem *Journ. de Mathémat. pures etc. T. VI,* 1841) u. A. Folgendes angiebt:

1. *Sepher hamispar* (1 *à* 29). *C'est le traité d'Arithmetique.*

2. *Tischboret* (30 *à* 50). *Evaluation des aires polygonales et circulaires; ouvrage entièrement différent du précedent. A la page* 48 *on trouve une table des cordes (double sinus) de Abram bar Chaié, maitre d'Ibn Esra.*[38]) *Nous en rendrons compte.*[39]) *C'est à tort que [de] Rossi croit que ce sont deux titres differents d'un même ouvrage (Dizionario storico, vol. I, page* 13). Was die letzte Bemerkung betrifft, so wird ihre Beleuchtung folgen, wenn von der

---

35) Bei Ibn Esra bedeutet dieses Wort: Verhältniss, und zwar vorzugsweise das Verhältniss des Kleinen zum Grösseren, worauf ich anderswo zurückkomme.

36) Fibonacci (Geom. p. 1 ed. Boncompagni) beginnt: *Punctus estid quod nullam habet dimensionem, id est quod non potest dividi.*

37) Libri (II, 481) bemerkt, dass der Beweis für das Flächenmaass als Function der Seiten nicht gegeben sei, und citirt die Worte: *Haec quidem in geometriae demonstrationibus est intricata; quapropter tunc leviter explanari posse non existimo. Hunc usque de secunda parte deinceps vero ad tertiam transitum faciamus.* Leider habe ich es versäumt, die hebräischen Handschriften an dieser Stelle zu vergleichen. Sollte ich vor dem Abdruck dieses Artikels noch aus München Auskunft darüber erhalten können, so werde ich dieselbe nachtragen (s. Nachtrag).

38) Ueber diesen Irrthum s. oben Anm. 20.

39) Mir ist nicht bekannt, wo, und überhaupt ob, Terquem dieses Versprechen erfüllt habe.

Arithmetik des Ibn Esra gehandelt werden wird. Hier mag nur bemerkt werden, dass in Montucla's Tabelle (I, 421) unter Abr. ben Esra die Geometrie, unter Abr. ben Chijja *de arithm. libr.* 2 zu streichen ist. Mir scheint es klar, dass hier ein unvollständiges Exemplar der Geometrie des Abraham vorliegt, während die Handschrift 397 des Vatican die Arithmetik des Ibn Esra enthält. Die Chordentafel erwähnt auch ausdrücklich *Libri* (Hist. II, 482). Die des Fibonacci (Geom. ed. Boncompagni, p. 96) geht von 1 bis 66.

Am Schluss der IV. Pforte weichen wieder die Recensionen von einander ab. *B* hat einen langen Nachtrag, nämlich einen leichteren Weg der Berechnung mittelst des Quadranten (*Keli ha-Rabua* oder *Tablat* [d. h. *tabula*] *ha-Rabua*). Die lateinische Uebersetzung hat in den beiden florentinischen Handschriften Nichts vom IV. Cap., weshalb Zachariae (bei Boncompagni, Plato p. 37) nur 3 Capitel angiebt. Allein auch in den beiden pariser Handschriften nimmt das ganze Capitel 4 (*In dimensionibus corporum secundum longitudinem et latitudinem et altitudinem*), welches mir Fürst Boncompagni im Jahre 1861 copiren lies, kaum eine halbe Druckseite ein, es umfasst etwa 6 mal so viel als die Schlussworte, welche in den *Atti* p. 937 mitgetheilt sind. Es beginnt: *Quod si duo perpendiculares in quinto quadrilatere etc.* und kann auch dort nur stark defect sein. Die obigen Schlussworte finden sich in der Handschrift München 299, Bl. 99a und Vatican 400, Bl. 58. Unmittelbar darauf folgt der Epilog, welchen ich im Jahre 1864 als Anhang zu *Mischnat ha-Middot* aus den genannten Handschriften mitgetheilt habe. Derselbe wendet sich wieder gegen die „Männer dieser Länder" (vergl. oben Anm. 12), welche unwissenschaftlich verfahren und sich auf die alten Rabbiner berufen, und wird gelegentlich die abweichende Maassbestimmung des sogenannten Meeres Salomon's in den Büchern der Könige und der Chronik in Uebereinstimmung gebracht, wie der Verfasser auch in seinen andern allgemeinen (profanen) Schriften zum Schlusse gern an die heilige Literatur anknüpft. Solche exegetische Versuche, so wie die Auseinandersetzung des Verfassers mit seinen Glaubensgenossen, waren für den lateinischen Uebersetzer Plato natürlich ein *hors d'oeuvre*. Aber das ganze Werk scheint, nach den Proben, die mir vorliegen, nicht eigentlich übersetzt, sondern in Auszug gebracht, wenn nicht etwa eine kürzere hebräische Fassung vorlag, oder der Verfasser selbst bei der Uebersetzung als Dolmetsch diente? (s. unten §. 5). Jedenfalls wird bei einer etwaigen Vergleichung mit Fibonacci die Benutzung des hebräischen Originals unentbehrlich sein, und bin ich gern bereit, denjenigen beizustehen, welche einzelne Stellen des *liber embadorum* im Auge haben.

Es wird nicht überflüssig sein, zu bemerken, dass Assemani in seinem Cataloge (p. 375) ohne allen und jeden Grund unserem Abraham die Stücke beilegt, welche in der Vatican'schen Handschrift auf die Geometrie folgen, und die er als *Propositiones de triangulis sphaericis* (!), *conversione angulorum*, *et circulis*, *deque Musica* bezeichnet. Ich verdanke der Güte

des Fürsten Boncompagni eine Durchzeichnung der ersten Seite (Bl. 61), welche folgendermaassen beginnt: „Fragen über das ungleichseitige Dreieck. Ein ungleichseitiges spitzwinkliges Dreieck, dessen Flächenmaass (*Tischbarto*) 84, und dessen Basis (*Toscharto*) grösser ist als die Höhe (*Ammud*), welche von der Spitze des Dreiecks herabfällt [um 2]: wie viel beträgt die Länge der Basis und die der Höhe? Die Methode, es zu erfahren ist die, dass du verdoppeltst das Flächenmaass, und es wird 168 sein, addire das Quadrat des halben Ueberschusses der Basis über die Höhe, d. i. 1, macht zusammen 169, nimm [ziehe] die Wurzel, d. i. 13, addire den halben Ueberschuss u. s. w., d. i. 14, und das ist die Länge der Basis, subtrahire den halben Ueberschuss u. s. w. von 13, bleibt 12 und das ist die Höhe u. s. w.“ Folgt die geometrische Probe; dann kommen ähnliche Fragen; am Ende der Seite liest man: „Dreieck in Bezug auf die Zahlen, das ist zusammengesetzt aus Zahlen, die aufeinander folgen, nemlich ... (Lücke) in [von ?] der Form des gleichseitigen Dreiecks, welches genannt wird in der römischen Sprache *triangle* (טריאנגלו)“.

Es möchte hier Veranlassung gegeben sein, auf die Bedeutung dieser sämmtlichen Schriften für die Entwickelung einer hebräischen Terminologie der mathematischen Wissenschaften, zum grossen Theil nach arabischen Mustern, einzugehen. Allein eine solche Betrachtung würde zu tief in das philologische Gebiet eindringen. Es genüge daher die Bemerkung, dass diese Schriften als die ältesten bekannten in hebräischer Sprache, insofern sie fast alle Disciplinen umfassen, für die Terminologie zum grossen Theil die Grundlage bilden, dass aber die bald darauf folgende Periode hebräischer Uebersetzer von Profession Manches anders gestaltete. Vergl. *Jewish Literature p.* 66.

§. 6.

Wir wenden uns nunmehr zu den Schriften, welche in anderer als hebräischer Sprache vorliegen, und bei denen die Untersuchung zum Theil eine mehrfache ist; nämlich welcher Abraham der dabei betheiligte sei, welchen Antheil er als Uebersetzer oder Verfasser gehabt, event. in welcher Sprache das Original verfasst worden. Der Bequemlichkeit halber mag die Ziffer der aufgezählten Schriften hier fortlaufen. Was die Reihenfolge betrifft, so schliessen sich zunächst diejenigen an, welche mit Sicherheit oder grösserer Wahrscheinlichkeit dem älteren Abraham, also dem Savasorda angehören.

7. *De horarum electionibus* (oder ähnlich) Hali ben Hahamet Enbrani (oder Ebrani, mit Weglassung des Nasalzeichens). Auf dieses schon von Libri (Hist. II, 399) erwähnte Werk habe ich bereits in meinem *Catalogus libr. hebr. p.* 2747 hingewiesen (vergl. auch D. M. Zeitschr. XVIII, 124), und so gleichgültig auch der eigentliche astrologische Inhalt für uns sein mag: so giebt ihm doch seine bibliographische Beschaffenheit einige

Bedeutung, namentlich für das Verhältniss zwischen dem Juden Savasorda und dem Christen Plato. Es wird daher eine genauere Angabe hier am Orte sein. Derselben liegen Abschriften und Durchzeichnungen zu Grunde, welche ich der Liberalität des Fürsten Boncompagni und der Geschicklichkeit und Genauigkeit des Herrn E. Janin in Paris verdanke.

Der arabische Verfasser ist Ali ben Ahmed el-Imrani[40]) (nicht Omrani), ein gelehrter Mathematiker zu Mossul, Liebhaber von Büchern (vgl. Casiri I, 340), zu welchem Schüler aus der Ferne zuströmten, starb im Jahre 344 H. (954/5). Er verfasste u. A. einen Commentar über die Algebra des Abu Kamil Schudscha ben Eslem[41]). Es sind mir bis jetzt mehr als 10 Handschriften dieses Werkes bekannt, z. B. Cod. St. Galae 319 (*Catal. Manuscriptorum Angl. II*, 2, *p.* 192 *n.* 6153: Hali ben Achmet: *de electionibus*), Cod. Laud. 594,[25] (bei Coxe: *Catal. Codd. bibl. Bodl. II p.* 425: Haly: *de electionibus*, angeblich mit dem Titel: *Libellus de inveniendo secreto*, und Ueberschrift: *de inveniendo ducem;* Anfang: *Omnis judicanda res ut primum necessariam habet certissimam ducis inventionem*); *Canonic. misc.* 396,[2] (bei Coxe l. c. P. III p. 424); 3 Handschriften sind im Index des Pariser Catalogs p. LVII irrthümlich unter Haly ben Rodoham (d. i. Ibn Ridhwan) angegeben, nämlich N. 7346, 7413, 7440; hingegen N. 7438 unter Haly Abenragel! die Handschriften Sorbonne 979 und 980 schon von Libri (Hist. II, 299) und Chasles (*Comptes rendus XIII*, 508, 509). In der That giebt es astrologische Fragmente und Citate unter dem blosen Namen Ali („Haly"), bei denen es nicht leicht ist, sich für einen der 3 astrologischen Schriftsteller zu entscheiden. Wo jedoch von *Electiones* die Rede ist, wird man ehesten an unsern Imrani denken. Hiernach ist u. A. auch der Index auctorum bei Coxe l. c. III p. 893 zu berichtigen, wo jedenfalls die Regulae in Cod. 517 zu „Haly fil. Achmet" zu ziehen waren. Das Buch oder Fragment *de impressionibus*[42]) kenne ich nicht näher. Eben

---

40) Abgeleitet von Imranijje bei Mossul, nach Sujuti, *Nom. relat.* p. 182. Ich vermuthe, dass bei Hagi Chalfa I, 199 (VII, 1034 n. 1253) anstatt Ali ben Ahmed el-Hemdani zu lesen ist el-Imrani.

41) Ueber diesen angeblich ersten arabischen Algebraisten s. Nedim (D. M. Zeitschr. XIII, 632); el-Kifti bei Casiri I, 411; Ibn Chaldun bei Woepcke, *Recherches sur quelques ouvrages etc.* I (1856) p. 7 (vgl. Narducci's *Catalogo* p. 185); Hagi Khalfa VII, 1119 n. 4482; Nicoll u. Pusey, *Catal.* p. 601 zu CMXVIII, 1; Sedillot, *Materiaux* p. 447; Hammer, Litgesch. IV, 306; vgl. auch Zeitschr. für Mathem. X, 493 unter n. 6; meinen *Catalogus Codd. h. Lugd.* p. 369, und den kürzlich erschienenen III. Band des Catalogs der Leydener arab. Handschrift p. 58. — Die hebräische Uebersetzung der Algebra in der Münchener hebr. Handschrift 225 wird in dem von mir bearbeiteten Catalog näher beschrieben werden.

42) *Impressiones* entspricht dem arabischen *A'athar* und *Ta'athir*, kann also Meteore (sonst auch *operationes*, vgl. unten Anm. 63) oder astrologische Einflüsse bedeuten; die entsprechende hebräische und arabische Terminologie stelle ich zusammen in einer (noch ungedruckten) Abhandlung über Alfarabi im Kapitel: Mathematische Schriften, Anm. 6.

so wird es wohl richtig sein, wenn die, in dem unter 8 zu erwähnenden Cod. zu Cesena — hinter Almansor — vorkommenden *Significationes Planetarum* und *horarum* in der Tafel des Schrankes einem Alli (sic) zugeschrieben werden, der im Index bei Muccioli II p. 297 fehlt.

Ich theile zunächst in der Anmerkung[43]) den Anfang des Werkes nach den 3 pariser Handschriften N. 7346 [*A*] Bl. 149 *verso*, N. 7440 [*B*] Bl. 17 und Sorbonne 979 [*C*] Bl. 507 so mit, dass ich die bedeutungslosen Varianten, und solche bieten meistens die beiden erstgenannten Handschriften, unbeachtet lasse. Nach dem Prolog zerfällt der erste Tractat oder Buch I in 5 „Differentias" (ein Arabismus für *Fusul*, Capitel). Die Sorbonner Handschrift 980 [*D*] enthält in der That nur den II. Tractat auf Bl. 71 bis 75 v., obwohl der Anfang — ähnlich wie in Cod. *A*. Bl. 157, *B*. Bl. 23, *C*. Bl. 521 — lautet: *liber I electionum Explicit. Incipit lib. II de electionibus particularibus* (*sicut introitus et exitus ville*, für diese, wahrscheinlich aus dem Anfange entnommenen Worte haben die andern 3 Handschriften: *habens capitula* 13). Es folgt in der Anmerkung[44]) der Anfang dieses II. Buches oder Tractats. Das Ende

43) Incipit liber Haly de electionibus horarum laudabilium. In nomine domini dixit Haly filius arimeth (azimeth, ahameth) embrani. [Diese einleitenden Worte sind in Cod. 7440 umgestellt.] Rogasti me carissime, ut tibi librum de horis eligendis componerem secundum rationem astrologorum in omni initio operum. Idioque *(Ideo quia)* hunc librum collegi ex melioribus (*meliorem)* hiis in quibus convenerunt antiqui posuique in eos [lies eo?] duos tractatus (*contractus!*). Tractatus **primus** est in utilitatibus horarum electionum et quomodo eligendum sit (*his*) quorum nativitates ignote (*innote, nocte!)* sunt vel quomodo illis qui faciunt suas interrogationes super his que incipere volunt queve *(quando)* etiam sint hore in quibus terminatur quodcunque inceptum fuerit. Tract. **secundus** in electionibus particularibus sicut est introitus in villas et exitus ab eis vel iter incipere et his similia. Ordinavique istum (*eum)* librum ordine patenti quatinus (*sic*) cito reperiamur (*-antur)* quodcumque invenire voluerimus. Hic (*et*) enim liber secundus (dafür *scilicet*) electionum non est similis libro (*sic*) nativitatum in quibus differre possumus donec libros revolvamus. In hac vero scientia quandoque accidit ut tanta sit festinatio eligendi (*eligenda*) ut libros respicere non liceat (*voleant*). Et ego satis credo quod non (*tibi in!*) modicum placebit hujus modi tractatus (*hic modus tractandi*) postquam tibi patuerit (*placuerit!*). *Tractatus primus* est 5 differentiarum quarum *prima* est utrum electiones utiles sint, secunda (*que*) in electionibus omnium inceptionum. *Tertia* in electionibus hominum quorum nativitates note sunt. *Quarta* in scientia utrum de quo queritur (*utrum*) bene vel male terminatur, et in eius dictiones post factam interrogationem. *Quinta* in quibus horis consideremus quidem (*quod)* id quod in eis inceptum sit termimetur vel fuerit vel perficiatur. Prima differentia utrum electiones sint utiles. Opera judiciorum astrorum certa esse a *Ptholomeo* patenti (*patenter!*) ratione probatum est et ego quidem addidi quasdam probationes in libro meo (*nostro !*) dum verba Ptholomei exponerem. Huius ergo partem sapientie partem videlicet electionum utilem (*rationalem*) esse necesse est etc.

44) Quoniam premisimus in precedenti capitulo regulas utiles (*universales*) de electionibus commemorare debemus in sequenti (*capitulo*) exempla eorum que premisi-

desselben fehlt in *B*, in *A* ist das Epigraph sehr kurz. Die letzten Textworte (bei Coxe III p. 734 und Handschrift *D*) sind: *Sed quia neminem ex antiquis reperi, qui hoc testaretur* (bei Coxe *testantur*) *non feci* [*ejus?*] *mentionem.* Dann folgt das bei Libri aus *D* (unvollständig) und bei Coxe mitgetheilte Epigraph, welches in *C* am vollständigsten aber weniger correct zu lesen ist. Es handelt sich für uns hier um die Person des Uebersetzers, Ort und Zeit der Uebersetzung. Ersterer heisst bei Coxe blos Abram Judeus Ispanus, aber *D* setzt hinzu: *qui dicitur Sauacorda*, wofür in *C Salvacorda.* Der Ort heisst in allen Handschriften *Barchinona* oder *Barichinona*, *Barchilonia* (in *A*) u. s. w., also Barcelona. Das Datum ist in *C*: „*die lune et* 8. (*octavo* in *D* [bei Coxe VII]) *Kalendas octobris et* 8. [*XXIII J* in *D*] *die mensis lunans qui dictus est dulheida* [in *D dulchida*] *hora* 3ª [12ª in *D* und bei Coxe] *ascendente aquario anno domini* 1131 [1134 in *D* und bei Coxe] *anno alexandri* 1555 (!) *anni arabum* 531". Bei Coxe fehlt die Angabe des arabischen Monats und Jahres, so wie die alexandrische Aera, letztere und das arabische Jahr fehlen auch in *D*. Es stimmen aber auch die Angaben in *C* nicht untereinander. Für 1555 ist wohl 1455 zu lesen, entsprechend 1134; aber das Jahr 531 H. begann (nach Wüstenfeld's Vergleichungstabellen, Leipzig 1854) am 29. September 1136. Man kann aber auch nicht an DXXIX (für DXXXI) denken. Dieses Jahr begann am 22. October 1134, der Monat Dsu'l Kada am 13. August 1135, Dsu'l 'Hiddscha am 12. September 1135. Der Sonntagsbuchstabe für 1135 ist *F*, also war der 1. October (wie 1. Januar) 1135 ein Dienstag, der 23. September ein Montag, aber zu-

---

mus ut leviora videantur (*officiantur*). Cumque opus fuerit eligere aliquid nec poterimus omnia (*necesse*) perscrutari omnia que premisimus inveniemus in eo (*hoc*) tractatu paratum (*parata*) et in primis (*pre*-)diximus quod electio perfecta in omni re quam (*optare*) volumus etc. etc. — Die nachfolgende Stelle der Eintheilung gebe ich bloss nach einer Durchzeichnung von *Sorb.* 980:

Et in hoc libro sunt *XII* capitula in quibus sunt *LXV* differentie. Et non est mirandum si commemoraverimus in aliquo eorum aliquid quod et commemorandum sit in aliquo etc. Capitulum in initio rerum que pē (*proprie?*) pertinent ad reges et principes secundum maiorem partem. prima [differentia] in confirmatione dignitatis, sēa in puatione dignit., tertia in edificatione urbium et castrorum, quartum (*sic*) in edificat. domorum et ceterorum que non sunt urbes et castra. Quint*um* in destructione [et] minutione inimicorum. Sexta in eductione fontium et fluminum. Septima in compositione navium ad expugnandos inimicos. Octava in exitu ad prelium sive ad aliud. Nonam in reconciliatione inimici. decima in revisione. undecima in venatione. duodecima in cursibus equorum. tertia decima in ludīs. Cap. I. in initio rerum ad regum (*sic*) et principum [lies principium?] pertinentia. In omni ope regum sive principium (sic) aut quod pro illis sit etc. — Das XII. Cap. (Bl. 7b verso Col. 1) ist überschrieben: de domo XI et primum de his per quia optamus adipisci laudem et bonam famem. Aber es folgt noch Cap. XIII de domo XII et primum cum impedire voluerimus quemlibet inimicum sive regem sive quamlibet personam. Die letzte Differentia beginnt mit einem Citat aus Albumasar, und endet: Sed quia neminem etc.

gleich der 11. des Dsu'l 'Hiddscha, und schon im Jahre 1456 des Alexander. Ob die Bestimmung *ascendente aquario* zur Berichtigung diene, weiss ich nicht.

8) Astrologische Aphorismen von oder an Almansor, deren Uebersetzung von Plato aus Tivoli in Barcelona am 18 Dsu'l 'Hiddscha 530 (17. September 1136) beendet wurde, vielleicht unter Mitwirkung unseres Abraham, bedürfen einer eingehenden Besprechung, da selbst die wenigen eben angegebenen Daten erst das unsichere Resultat längerer Nachforschung sind, während noch Manches der Aufklärung bedarf, wie sie oft nur ein glücklicher Zufall herbeiführt.

Es wird hier zweckmässig sein, einzelne Punkte hervorzuheben.

a) Ausgaben des Schriftchens sind in keiner mir bekannten Quelle vollständig angegeben. In Grässe's Literaturgeschichte ist unsere Schrift in der Zusammenstellung arabischer Astrologie (Band V, S. 938) gänzlich übergangen.

Sie erschien zuerst hinter dem Centiloquium des Hermes, fol. *Ven.* (Dedication vom Jahre 1492); ferner beide hinter dem Quadripartitum und Centiloquium des Ptolemäus 1493, 1519 (letztere benutze ich), ausserdem mit Albubather 4. *Ven.* 1501[45]). Diese 3 (resp. 4) Ausgeben beschreibt Boncompagni (Plat. p. 24 ff.) Ferner erschien es in dem Sammelwerke: *Astrologia aphoristica ex variis auctor.* 4. *Ulmae* 1641 und in den Ausgaben des Julius Firmicus fol. *Bas.* 1533 und 1551[46]).

b) Handschriften finden sich fast in jeder grösseren Bibliothek, sie bieten allerlei beachtenswerthe Varianten, abgesehen von der abweichenden Zählung der Aphorismen, z. B. 134 in Cod. Coll. Corp. Chr. 101,4 (bei Coxe p. 35), 164 in Cod. Mar. Magd, 182,8 (bei Coxe p. 83), indem die Zahl

---

45) Ich kann leider auf der hiesigen k. Bibliothek keine Ausgabe der Astrologie Albubater's ausfindig machen, welcher Autor nach Junctinus (bei *Riccioli, Almag. I.* p. XXIX) um 500 *ante* (!) *Chr.*, nach Lalande (*Bibliogr. astr.*) um 500 lebte, also vor Muhamed! Ich kann daher auch noch nicht an die Untersuchung gehen, ob dieser Abu-Bekr identisch sei mit dem bei Boncompagni (Plat. p. 30) erwähnten, welchen Coxe (*Catal. Codd. Mss, qui in collegiis etc.,* Coll. Corp. Chr. p. 35 Cod. 101, 6) ohne weiteres mit dem berühmten Arzte Rhazes identificirt! Es könnte auch der Astrologe mit dem Verfasser der Geometrie, in der latein. Uebersetzung *Deus* (!) oder *Heus* genannt (*Mischnat ha-Middot* S. 21, Anm. 10) identisch sein. Ich würde mich Jedem zu Dank verpflichtet sehen, der mir eine, wenn auch sehr schleunige Benutzung des Albubater ermöglichte.

46) Vergl. *Catal. libr. impr. in bibl. Bodleiana* I, 50 u. II, 48. Bei Lalande l. c. fehlt im Index p. 882 das Jahr 1551; p. 51 u. 72 ist das Format 8vo (nach Maittaire) unrichtig; in der Anmerkung ist von einer angebl. Ausg. *Ven.* 1597 die Rede; ich vermuthe, dass es 1497 sein soll, unter welchem Jahre p. 21: Firmicus *de nativit.* und *Almansoris lib. nonus* angegeben ist; letzteres ist freilich ein gar nicht dahin gehöriges medizinisches Werk des Rhazes, s. unten S. 28.

150 der Ausgaben und einzelner Handschriften wohl als runde — gewissermassen 1½ Centiloquium[47]) — vorgezogen worden. Die letzte gedruckte ist: *Cum fuerit Jupiter (sic) in Ariete directus ... et regnum in quo nulla fiet injustitia.* Es frägt sich jedoch, inwieweit etwa Einschaltungen oder Weglassungen stattgefunden haben. In N. 100 heisst es: *Hoc quidem capitulum narravit Alchindus*, d. i. el-Kindi. Die Worte *In hoc autem capitalo nullus ita perfecte locutus est* (N. 147, wohl auch auf 146 zu beziehen) gehören doch wohl nicht dem Autor? Sie klingen überhaupt sonderbar, wenn man sie nicht auf den blosen Ausdruck bezieht. N. 104 lautet: *Vita omnium animantium est secundum gradum solis et lune, et hoc ab altissimo datum secundum astapham.* Schwerlich ist *astapham* ein arabisches Wort (etwa *Istifâ*, Auswählung), sondern wohl der arabisirte Name Stephan, auch bei Bonatti *Astaphan* (s. D. M. Zeitschr. XVIII, 193), und vielleicht in verschiedenen ähnlichen Entstellungen bei Ibn Ragel (s. weiter unten). Welcher Stephan gemeint sein könne, will ich hier nicht untersuchen, um nicht zu weit abzuschweifen, es genügt die Bemerkung, dass das Vorkommen dieses Namens in einer älteren arabischen Schrift nichts Auffallendes hätte. Ueber die Worte *hoc ab altissimo datum* mag ich mich nicht in Vermuthungen verlieren, namentlich ohne Beihülfe von Handschriften.

c) Der Titel ist gewöhnlich *Capitula*, entsprechend dem arabischen *Fusul*, welches Aphorismen und Capitel bedeutet, für letzteres mitunter: *Differentia* bei den lateinischen Uebersetzern, wie z. B. oben im Werke des Imrani, also *Capitula stellarum oblata etc.* Die Ausgaben haben die Bezeichnung *Judicia seu propositiones*, und noch zu Anfang *Aforismorum compendiolum.* Die Handschrift *Canon. misc.* 517 (bei Coxe p. 829) hat die Ueberschrift: *Libellus de signorum dispositione*, und so bei Bartolocci aus einer Handschrift des Vatican[48]): *Epistola de signorum dispositione et astrorum judiciis.* Diese Bezeichung ist ohne Zweifel dem Anfang der 1. Aphorisme entnommen: *Signorum dispositio est* [falsch *et* bei Coxe aus Mar. Magd.] *ut dicam ab Ariete;* so in den Handschriften Laud. und Cesena; in den Ausgaben: *Sign. dispositionum, ut dicam ab Ariete fit initium*, und vorher noch folgendes Vorwort: *Mi rex petivisti ut tuis satisfaciam votis; laborem nequaquam subire recusavi. Scripsi equo animo accipias queso.*

d) Das Datum der Beendigung der lateinischen Uebersetzung durch

---

47) Beispiele von Anwendung der Zahl 100 und 1000 s. in meiner Abhandl.: Zur pseudepigr. Lit. S. 48, Anm. 33; vgl. noch 1000 Erzählungen bei H. Kh. II, 8; Dschahitz sammelt 100 und verfasst 1000 Sprüche; 100 Fragen aus 100 Wissenschaften bei H. Kh. I, 466 n. 1384; 100 Traditionen das. V, 380 (Münchener arab. Handschr. 125, S. 29 des Catalogs) u. dgl. m.

48) Diese Handschrift konnte Herr Narducci aus den Catalogen des Vatican nicht ausfindig machen, wie er auf meine Anfrage mir mittheilte.

Plato aus Tivoli in Barcelona (*Bardonia*, in Handschriften *Barchinonia etc.*) ist in den Ausgaben (s. Boncompagni p. 27, 29, 31) 18 Dullugida [*dulgrigida* in der Handschrift Boncomp.] des Jahres 1530, was aber 530 sein muss, und so richtig in Boncompagni's Cod. 312 vom Jahre 1268 angegeben ist (vergl. D. M. Zeitschr. XVIII, 124, Anm. 9). Die Hinzufügung der Zodiakalstellung von Sonne und Mond erinnert an die noch weitergehende astrologische Angabe im *liber Embadorum*.

e) Den Verfasser des arabischen Originals habe ich noch nicht mit Sicherheit ermitteln können; wohl aber glaube ich die Confusion der Bibliographen, welche auch nur nach der zweideutigen Ueberschrift in den Ausgaben, ohne Zuziehung von Handschriften, ihre Angaben gemacht zu haben scheinen, einigermassen aufklären zu können. Ich muss bei der complicirten Untersuchung die Nachsicht des Lesers in Anspruch nehmen.

Gewöhnlich wird Almansor (el-Men'sur u. s. w.) selbst als Verfasser der Aphorismen betrachtet. So spricht noch die jüngste mir bekannte Autorität, Delambre (p. 4) von den „150 *propositions de l'astrologue Almansor, adressées au roi des Sarrazins.*" Mit diesem Almansor werden dann allerlei Identificationen oder Unterscheidungen vorgenommen ohne kritische Prüfung der Quellen. So identificirt ihn Muccioli (*Catal. Cesen.* II. p. 17[illegible] *nota* c) mit einem angeblichen medicinischen Schriftsteller, obwohl er an der bezüglichen Stelle (I, p. 86) richtig angegeben, dass die betreffende Schrift von dem bekannten Arzt Rhases (starb 932 oder 923) an Almansor gerichtet sei; freilich versetzt er den letzteren wieder irrthümlich nach Cordova, während es Mansur ben Ishak, Beherrscher von Khorasan ist (vergl. Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte S. 43). Aehnliches bei Lalande ist schon oben unter *a* (A. 46) berichtigt worden. In Delambre's Index p. LXXVI unter Arabes sind die Artikel „*Abougiafar*, *Aboulmansor*, 93, *Almansor*, 1, 4, 6" incorrect; denn p. 87 (aus Ibn Junus) liest man: *Aben Manshour* (*sic*) *Jesafar* (*sic*) *ebn Mohammed al-Bashki*: p. 1 ist vom Khalifen die Rede; p. 6 wird der Astrolog ausdrücklich identificirt mit einem angeblichen Autor des XII. Jahrhundert, dessen astronomische Tafeln sich in einer Bodleianischen Handschrift finden sollen, und wovon Del. eine correcte Ausgabe wünscht! Letztere erwähnt auch Montucla (I, 368 *ed. II*) ohne Quelle. Die Identification hat auch Lalande's Index p. 882, und p. 5 unter 1150 werden *Almansoris tab. astr.* angegeben nach Weidler p. 21[illegible] Da mir Weidler's Hist. astr. (Wittemberg 1741) hier nicht zugänglich war, so bat ich den Fürsten Boncompagni um Abschrift der betreffenden Stelle und mit seiner gewohnten Zuvorkommenheit fügte er noch zwei andere Citate hinzu, die mir um so willkommener waren, als das von Cantor (Math. Beitr. S. 377) gerühmte Buch von Vossius auf der hiesigen k. Bibliothek gar nicht vorhanden ist. Um das Verhältniss der Quellen anschaulich zu machen, gebe ich diese 3 Citate, und ein viertes aus Heilbronner, schon hie[r]

vollständig in der Anmerkung[49]), ohne auf den ganzen Inhalt derselben sofort eingehen zu können. Hingegen sind wir bereits in den Stand gesetzt, die Quelle über die angeblichen astronomischen Tafeln weiter zu verfolgen. Die Handschriften des Erbischofs Narcissus (Marsh) sind im *Catalogus MSS. Angliae* (*II*, 2, 52) verzeichnet, darunter auch mathematische. Der Besitzer legirte sie nach seinem Tode (1713) der Bodleiana, wo sie 1714 aufgenommen wurden (vergl. meinen *Conspectus Codd. Mss. hebr. in Bibl. Bodl.* 1857, p. VIII). Daselbst (p. 54 N. 1156, 9, und daraus bei Heilbronner p. 646 §. 462 N. 7) wird angegeben: *Al-Mansuri Epistola Astronomica* 8vo. Der Index unter *Mansurius* confundirt wieder diesen Autor mit dem Helden einer Geschichte und dem obenerwähnten Mäcen des Rhases. Ueber das (unvollständige) Schriftchen (jetzt Marsh N. 25) erfährt man auch aus den Catalogen von Uri (p. 285, N. 77, 5) und Pusey (II, p. 618) nicht viel; der Index (p. 691) nennt ihn Mansuri, ob mit Recht weiss ich nicht, und noch weniger, wie diese Epistel bei Weidler zu astronomischen Tafeln geworden! Ein Jude in Kairowan[50]) verfasste für al-Mansur Ismail ben Kaim (starb 952) ein dreitheiliges Werk über Astronomie, dessen zweiter Theil

---

49) a) Almeon Almansorius Arabs, post Arzaelem ann. 70. anno Domini 1140. declinationem Solis maximam reperit 23, 33. (*Jos. Blancanus*, de mathematicorum natura &c. una cum claror. mathematicor. Chronologia, Bonon. 1615, p. 57). — b) Aliqui Thebitium vixisse ajunt anno CIↃCCLXX. Sed cum hoc solum sit annorum XXX intervallum, facile ea concilientur. Non item, quod Josephus Blancanus tradit, floruisse anno CIↃCXL. Nec bene cum eo convenit quod vixisse refert annis L post Almeonem Almansorium. Nam si Almeon, ut ipse ait Blancanus, claruit anno CIↃCXL; non tantum L, sed CXXX annorum fuerit intervallum. (*Ger. Jos. Vossii*, de universa matheseos natura etc. subjungitur Chronologia mathematicorum etc. 4. Amst. 1650, p. 180, §. 35). — c) Almansor (*) in indaganda eclipticae obliquitate, elaboravit. Bulliald l. c. p. 15. eamque 23. gr. 33. m. 30. s. definivit. 10. *Blanchini* praefatio canonibus tabularum praemissa. novas *tabulas astronomicas* condidit, quarum Codex Ms. in Bibliotheca Bodleiana asservantur. (*sic*) vid. catalogus codicum Ms. quos Narcissus Marsh .. academ. Oxon. donavit. Congessit etiam *propositiones astrologicas* ad Saracenorum Regem. — (*) Eum claruisse a. 1140 *Blancanus* statuit. vid. *Vossius* c. 35, §. 35, p. 181. *Bullialdus* p. 15. ponit annum 1150. *Reinhold* ad Theoricas Peurbachii f. 238, Arzachele 70 annis iuniorem dixit. (*Weidleri*, Histor. astron. Vitemb. 1741, p. 216). — d) Ich füge hierzu noch folgende Stelle aus Heilbronner's *Hist. Mathes.* (4. Lips. 1742) p. 428, §. 379: Almaeon filius Albumasaris, ut habet Christmannus, vel Almansoris, ut habet Reinholdus in Theor. oct. Spherae, observasse dicitur Solis maximam declin. A. D. 1140 vel alii 1500 [lies 1150], gr. 23. min. 23. sec. 20. *Vossius* confundit eum cum Almamone (§. 366)! Allein §. 366, 369, 380, 381 liest man Aimoin u. §. 378 Maimon für Almamun.

50) Vergl. Zeitschr. für Mathem. XI, 237, A. 2, und Woepcke, *Mémoire sur la propag.* etc. p. 59 des Sonderabdr. — Derselbe kennt auch die Knöchel- oder Fingerrechnung (*Jew. Lit.* p 363 n. 93), von welcher Cantor (Mathem Beitr. S. 209) handelt. Vergl. die Zeitschrift *Jeschurun* her. von Dr. Kobak, Jahrgang V (1866), S. 179.

jedoch eine Widerlegung der Astrologie enthält[51]), so dass derselbe nicht wohl der Verfasser der Aphorismen sein kann. Welches Werk unter *Mansurii Astronomia* (in einer Handschrift Huntington) bei Heilbronner p. 616 §. 313 N. 20 gemeint sei, kann ich ebenfalls noch nicht angeben.

Nimmt man an, dass die Aphorismen einem Almansor gewidmet seien, so wäre zunächst an den bekannten zweiten Khalifen aus dem Hause der Abassiden, Abu Dscha'afer al-Man'sur, den Erbauer Bagdad's (792) zu denken, dessen Vorliebe für die Astrologie u. A. in den Drohversen ausgedrückt ist, welche er angeblich vor seinem Tode an die Mauer geschrieben fand[52]) — eine Nachahmung des biblischen *Mene Mene*! Im Index des Pariser Catalogs der lateinischen Handschriften ist das Schlagwort *Almansor, Astrologus filius Abrahae Judaei!* Der Titel der Ausgaben lautet nämlich: *Capitula oblata regi magno Saracenorum ab Almansore astrologo*: aber fast alle Handschriften, von welchen Näheres bekannt ist, haben nicht dieses *ab*, welches Almansor zum Verfasser macht, manche setzen zu *regi* (*magno*) *Saracenorum* ein Wort, dessen Abkürzung oder Verstümmlung vielleicht zu *ab* geworden, und zu Almansor noch eine nähere Bestimmung. Man liest *Abahacha* [was ich aus Abu Dscha'afer ableitete im Catal. p. 1678, N. 18] *Almansori fil. Abrach* in Cod. de Rossi lat. 61; — *Alhacam* [kann der Name Hakem sein, oder Hakim: Gelehrter heissen] *Almansor Astrologo Filii Abialle Jud.* (so abbrevirt), in Cod. Malatest. des Minoritenklosters in Cesena P. II Pl. 27 Cod. 3 (p. 176 bei Muccioli); — *Acham, fil. Abrahami Judei* in Cod. Par. 7287,[10]; hingegen *Alchacham ab Almansor Astrologo filii Abrahae Judaei* in Cod. Mar. Magd. 182,[8] (bei Coxe p. 83). Ferner ohne Hacham u. s. w. *Almansori astrologo, filio Habrahae Judaei* in Cod. Laud. 594,[18] (bei Coxe P. II fasc. 1, p. 424); — *cuidam Astrologo fil. Abenezrae* in Cod. Par. 7309,[2]; — *regi Almansori ab Astrologo Abrahae Judaei* in Par. 7316 A[5]; — *regi magno Sarac. ab Astronomo filio Aben Ezrae Judaei* in Par. 7320,[1]!

Diese Lesarten lassen einen weiten Spielraum für die Conjectur, da noch dazu der Name Abraham aus Ibrahim, Jud. aus Judicis entstanden sein könnte. Den Namen Aben Ezrae in den beiden Pariser Handschriften aus dem XIV. Jahrhundert möchte ich am ehesten für eine falsche Deutung eines gelehrten Abschreibers halten, welcher keinen andern Abraham Judäus kannte. Nachdem wir aber gesehen, dass Plato in Barcelona de

51) Auch ein mathematisches Werk von Samuel Ibn Abbas, einem jüdischen Renegaten des XII. Jahrhunderts, wird in einer gefälschten Ueberschrift einem *Almansuri* beigelegt (Pusey, *Catal.* p. 603). Vgl. die Zeitschrift *Jeschurun* a. a. O.

52) Khondemir bei d'Herbelot III, 304, deutsche Ausg. 1780. — Vergl. auch Hagi Khalfa I, 81, 178 (Gründung Bagdad's nach astrolog. Zeitwahl), III, 91; und unten Anm. 67.

Savaçorda als Dolmetscher benutzt hat, liegt es wohl sehr nahe anzunehmen, dass auch hier Abraham Judäus kein anderer sei, und könnte man höchstens an einen Sohn desselben denken, der freilich bis jetzt nirgends vorgekommen. Begiebt man sich aber auf das Gebiet der Conjecturen, so könnte man auch so emendiren, dass der arabische Astrolog *Abi Almansoris filius* heisse. In dem Dienste des Khalifen Almansor stand ein Perser (Mager), welcher den arabischen Namen Abu Man'sur erhielt[53]). Sein Sohn, Abu Ali Jahja ben Abi Man'sur trat auf Veranlassung des Khalifen Maamun zum Islam über, und wurde dadurch eine Art von Client (*Maula*). Er machte sich berühmt als Redacteur oder Hauptmitarbeiter der aus Beobachtungen und Messungen hervorgegangenen astronomischen Tafeln, welche die „probaten" genannt werden. Ob er identisch sei mit einem Jahja ben Abi Man'sur „aus Mossul", der bei Hagi Khalfa als Verfasser von Schriften über Kochkunst, Poesie, Rhetorik und Musik erscheint, lasse ich dahin gestellt. In Flügels Index (VII., 1247 n. 9148) und bei Narducci (zu Ristoro d'Arezzo p. 3) ist der Umstand unbeachtet geblieben, dass unser Jahja in den älteren Quellen nicht „aus Mossul" heisst, dass Fihrist und el-Kifti Nichts von jenen Schriften wissen. Auf d'Herbelot (II., 705 deutsche Ausg. 1790) ist hier freilich kein Gewicht zu legen, der zuerst Jahja Abu Mansur (so) als Verfasser der Liedersammlung nennt, dann Jahja ben' Abi Mansur als Astronomen. Dieser Astronom und Astrolog wurde der Stammvater einer zunächst im Dienste der nachfolgenden Khalifen bleibenden Familie von Gelehrten, über welche ich anderswo genauere Nachrichten geben werde. Delambre (p. 4) macht „Yahya ebn Abit [l. Abi'l?] Mansour" zu einem Bewohner von Mekka! Ein Urenkel unseres Jahja, Namens Abu'l Hasan Ahmed ben Jahja ben (Abu'l Hasan) Ali ben Jahja schrieb eine Genealogie und Geschichte seiner Familie, deren Auffindung von Interesse wäre[54]). Derselben Familie gehört wahrscheinlich auch ein Astronom, Astrolog und Instrumentenmacher in Bagdad an, welcher am 9. April 987

---

53) Quellen, namentlich über Jahja, sind: El-Kifti, abgekürzt bei Casiri I, 425 und Sédillot, *Prolegomenes*, p. VIII; bei Hammer III, 262 n. 1157 = IV, 309 n. 2414 (vergl. S. 509)! bei Slane zu Ibn Khallikan II, 366. El-Kifti (Handschrift Berlin, Bl. 134) giebt zum Schluss des Artikels, nach einem Bericht des Abu Maaschar, eine Anecdote von einem Pseudopropheten, welche „Muhammed ben Musa der Astronom, der Gesellschafter, verschieden von dem Khowarezmier," von Jahja gehört und dem Abu Maaschar mitgetheilt hatte. Diese Anekdote hat aus el-Kifti nach Abu'l Farasdch p. 161, und abgekürzt Hammer III, 262. Hiernach beantwortet sich meine Frage, und bestätigt sich meine Conjectur in der Zeitschr. f. Mathem. X, 496. — In dem Stammbaum der Familie el-Muneddschim bei Hammer IV, 509 ist Abul Hasan ben Ali n. 2689 wahrscheinlich zu streichen.

54) Ibn Khallikan n. 812; Hagi Khalfa VII, 2035 n. 929; Hammer IV, 514 n. 2690 = S. 180 n. 2155. — Weil, Gesch. der Chalifen II, 603, scheint sich das genealogische Verhältniss nicht vollständig klar gemacht zu haben.

im Alter von 74 (arabischen) Jahren starb, und dessen Namen bei Ca
(I, 424, bei Hammer V, 312 n. 4069) lautet: Harun ben Ali ben Jahja b
Abi [so im arabischen Texte, Casiri lässt Abi weg] Mansur (unvollstän
in Sedillot's chronolog. Tabelle: Proleg. p. CLII n. 56). Wenn das Dat
richtig ist, welches auch in den Handschriften des Kifti vorkommt, so dürf
auch in der Aufzählung der Ahnen einige Homonyma übersprungen se
Gewöhnlich wird die Reihe bis zum Stammvater hinaufgeführt und da
el-Moneddschim („der Astronom") hinzugesetzt, was wohl auf Jahja
beziehen ist; oder man bleibt bei irgend einem Gliede stehen und setzt I
el-Moneddschim, d. h. Abkömmling des Astronomen, eine bekan
Formel für Familiennamen. Durch Weglassnng des „Ibn" entsteht da
sehr leicht die Voraussetzung, als ob die betreffende Person selbst, oder
zuletzt genannte Ahn, bei welchem die Aufzählung stehen geblieben,
Astronom bezeichnet werden solle, und es bedarf darüber stets speciel
Untersuchung. Ein wirklicher Enkel unseres Jahja, Namens Harun b
Ali — wie aus Ibn Challikan's Biographie hervorgeht, sein Beiname ist A
Abdallah (starb 900) — erscheint im Index zu Hagi Khalfa VII, 1082 n. 3
schlechtweg als „Harun ben Ali"; aber unter dem Schlagwort „Ha
(Hero junior)[55]) Astronomus" (n. 3015) ist an den Stellen III, 134 und
509 derselbe Gelehrte gemeint, also wohl Ibn al-Moneddschim zu lesen
Ibn Khallikan's 784, Hammer IV, 493 n. 2668 = S. 313 mit falschem Datu
Daselbst VII, 1140 n. 5285 erscheint ein „Abu Man'sur Jahja ben Ali";
der Stelle selbst II, 9 n. 1622 folgt noch das Wort: *Astronomus*. Aus
Vergleichung von Ibn Khallikan n. 812 (Hammer, Litgesch. IV, 315
2428 = S. 511 n. 2688) ergiebt sich aber, ausser einer Berichtigung
Textes, dass dieser Jahja der Bruder des obenerwähnten Harun sei,
Beiname war Abu Ahmed (starb im October 912); also ist wohl zu le
Ibn Abu Mansur, und Ibn el-Moneddschim, und hiernach Flügels Art
in Ersch, und Gruber (S. II, Bd. 14, S. 240) und Hammer (V, 294,
derselbe Autor zum dritten Mal!) zu berichtigen. — Man verzeihe d
gelegentlichen Bemerkungen, die auch unserer Untersuchung nicht g
fremd sind, insofern die mögliche Bedeutung des *Astrologi filius* um so nä
gerückt wird.

In Bezug auf den zuerst genannten Astronomen Jahja dürften n
folgende Nachweisungen nicht überflüssig sein. Der *liber de judiciis astro*
von Abu'l Hasan Ali Ibn er-Ridschal (vulgo *Aben Ragel*), einem ma
bitischen Autor des XI. Jahrhunderts[56]) bietet eine grosse Anzahl von

55) Hero heisst bei den Arabern gewöhnlich Iran; s. Zeitschr. f. Mathen
463, Anm. 22.

56) In der Zeitschrift d. D. M. Gesellsch. XVIII, 155 habe ich angedeutet,
sein Zeitalter sich aus einigen Stellen des Buches ergeben. Es sind dies solch
denen der Verf. aus seiner eigenen astrologischen Praxis erzählt, und die ich eben

führungen, die in den lateinischen Ausgaben leider sehr verstümmelt sind, und die ich anderswo zu erläutern beabsichtige, da sie zum Theil von historischem Interesse sind. Der darin vorkommende Abraham Judäus ist freilich höchst wahrscheinlich ein unächter Zusatz (Zeitschrift der D. M. Gesellschaft XVIII, 156, vrgl. Fabricius IV, 161, Harless), auf welchen ich später zurückkomme. Die Stelle, welche nach Cantor (Mathem. Beitr. S. 60, 373) von Kircher, einem höchst unzuverlässigen Autor, aus Aben Ragels „*Liber de introductione ad astronomiam*“ über indische Ziffern angeführt wird, ist mir äusserst verdächtig. Ein Buch dieses Titels von demselben Verfasser ist nicht bekannt, und in der Astrologie, die ich flüchtig durchgesehen, kein angemessener Platz für jene Bemerkung[57]).

Die Stellen, welche hier in Betracht kommen, finden sich im IV. Buche Kap. 6, p. 155, Col. 1 und p. 156. An ersterer Stelle heisst es: *Joffiae fil. Aben nanzer per Aozafan et per Aztaratum et per eos qui fecerunt librum experimentorum, dicit quod quando inveniebant planetam in suo termino etc.* Ich lasse dahingestellt, ob Aozafan nicht der oben erwähnte Stephan sei; aber *lib. experimentorum* halte ich für die „probaten“ Tafeln, welche gegen Ende des Werkes erwähnt scheinen (p. 409): „*secundum tabulas Ptolomei sed per tabulas Daemdilut* (?)[58]) ... *et per tabulas Dalmohtaban*“: letzteres scheint nämlich *el-mumta'han* (vgl. auch Hagi Khalfa III, 466 mit Bar Hebraei Hist. Dynast. p. 264 der Uebersetz.). P. 156 liest man: ... *exemplo intelligibilium sapientum de Nayraz* [lies *Feriz*, wie sonst für *Persia?*], *ex quorum numero Jahie filius Aben masor* [*l. mansor*] *et Mahomet filius Algeh et Aza-*

---

anderswo mittheilen werde. Er nennt u. A. den Habus Sohn des Maksin (der im J. 420 H. nach Afrika ging), den Sohn des Badis und den Mutawekkil. Lalande p. 859 giebt noch die Jahre 950 oder 1250 an; ersteres wahrscheinlich nach Riccioli p. XXXV, wo *natus A.* 956 *Februarii* 12. *hora* 10 *etc.* Ich vermuthe jedoch hier eine Confusion mit Ali Ibn Ridhwan, dessen Nativität am Ende des Comment. zum Quadrip. auf das Jahr 356 Jezdegerd's angegeben ist. In einer Nachbemerkung (eines Abschreibers?) ist das Jahr 986 erwähnt.

57) In der Astrologie beruft sich Ali auf zwei andere Schriften; die betreffenden Stellen lauten: Filii cuisdam gentis dicunt, ... Ego in meo libro quem nominavi *Librum signalium seu notarum, quia loquitur per signa et notulas*, habet quinque capita de hylech et alcochoden: et tibi adduxi ex illis quos nominavit *Zaradest* [d. i. Zoroaster] et alii quos extraxi ex suis hylech pro virili cogitatione, et considertione mea. (IV, Ende Cap. 3, f. 148, Col. 4, ed. 1551); — „sicut distinximus et divisimus in tabulis nostris, quas ex tenui ingenio nostro fecimus et nominare voluimus *Tabulae solvendi nodos et exponendi adspectus* quoniam ibidem ascensiones hujusmodi sunt distinctae (IV, C. 7, f. 157, Col. 2). Es handelt sich in diesem Kapitel um *athazir* (vgl. D. M. Zeitschr. XVIII, 194).

58) Ich weiss für dieses corrumpirte Wort keine naheliegende Conjectur; sollte es aus *el-Dschami we-el-Sali* zusammengezogen sein? So heissen bei Hagi Chalfa III, 563 n. 6942 die Tafeln des Kuschjar ben Labban, eines Autors des X. Jahrhunderts (vgl. Woepcke, *Mémoire sur la propag.* etc. p. 161), von dessen Arithmetik in hebräischer Uebersetzung später die Rede sein wird.

roni (später *Azaroen*, scheint dennoch Muhammed fil. Geber Albategni, wie z. B. p. 352, 365).

Auch Abraham Ibn Esra nennt unseren Jahja ben Abi Mansur in verschiedenen Schriften; so z. B. als Verfasser von Tafeln in der Vorrede zur Uebersetzung des Werkes von al-Matani (?) über die Chowaresmi'schen Tafeln — wovon später die Rede sein wird. Zwei sachlich nicht uninteressante Citate in den astrologischen Schriften des Ibn Esra gebe ich nach dem hebräischen, bisher unedirten Texte wieder, zugleich als Nachweis, wie wenig brauchbar die edirten lateinischen Uebersetzungen des Peter von Abano und Heinrich Bates seien. Im Buch der Nativitäten, im Schlussabschnitt über die „Revolutionen" (hebr. *Tekufot*, arab. *Tahavil*) der Jahre, welcher im Lateinischen als „*tractatus secundus*" (Bl. 58, falsch LX gezeichnet) bezeichnet wird, ist von den verschiedenen Massbestimmungen der Dauer des Jahres oder Vierteljahres die Rede, nämlich nach Ansicht der Inder, Perser, des Thabit (lat. *Tabahas!*), des Abraham Zarkil oder Zarkala (lat. *attarcas!*), des Hipparch (lat. *Abetam!*) und des Ptolemaeus. Dann heisst es: „Grosse Gelehrte nach ihm, wie Jahja bei Abi Mansur (lat. *Ychagij fil. david* (*!*) *menassour*), el-Merwadsi (lat. *almerudeçi*), Ibn al-Mokaffaa (lat. *evenalmapkaye*) und el-Battani (*Albategni*) stimmten darin überein, dass der fehlende Theil $^1/_{106}$ Tag sei, so dass zwischen einem Quatember und dem andern $86^0\ 24'$ wären. Ibn Esra erklärt, dass nach der Beobachtung der letzten 200 Jahre unfehlbar 87^0 (var. 86) $15'$ anzunehmen sei.

In dem Buche *de mundo etc.* (lat. Bl. 78, Col. 4 bis Blatt 79) handelt Ibn Esra von den Massbestimmungen der Schiefe der Ecliptik[59]). Es ist wieder die Rede von Indern (beim Lateiner: *antiqui sequentes!*), von Ptolemaeus, Hipparch (hebr. Abrachos, beim Lat. *Abraham!*[60]); die Zahlen variiren), dann heisst es: „die Weisen Ismaels [Araber] bestimmten genauer als alle [Andern], und sie stimmten überein, dass der Bogen der Neigung $23^0\ 35'$ [lat. $23^0\ 23'$], ausgenommen Jahja ben Abi Mansur und Ibrahim ben Zarkal, welche noch genauer bestimmten als alle [Andern] (lat. *praeter Yahagi filium eumanasour: et abraham: et* [*!*] *azarchel. qui magis ingeniati sunt*) und $23^0\ 33'$ annahmen. Wahrscheinlich war dies die Quelle für Ristoro d'Arezzo (p. 3): *e secondo la considerazione provata da Iovanni figliuolo delalmansore* [für *d'Abilmansore*], *con moltitudine d'altri savi, alli die del re Mannone* [*Maamun*] *è trovata venti e trè gradi e trentacinque* (*!*) *minuti.* Der Zusatz *Joh. Damasceno*, welchen Narducci durch die bei Damascus stattgefundenen Beobachtungen motivirt, scheint mir eher eine falsche Conjectur eines gelehrten Abschreibers. Alfergani giebt für die „probate"

---

59) Eine Zusammenstellung der wichtigsten Angaben darüber s. bei Riccioli, *Almag. nov.* I, 161; vgl. Delambre, *Hist. ... moyen âge* p. 100; Sedillot, *Tables astr. d'Oloug*, p. 253.

60) S. oben Anm. 20.

Messung, welche durch Maamun veranstaltet wurde, 23, 35, so auch in der hebräischen Uebersetzung, und daher bei Christmann p. 26. Letzterer bemerkt in der Note (p. 27): *Thebilius et Almehon filius Albumasaris (!) invenit 23 grad. 33 min. prima et 30 secunda.* Die alte lateinische Uebersetzung hat 33′, wie Christmann und Golius (vgl. Casiri I, 443) bemerken.

Dies führt uns schliesslich auf die Variante Almeon für Almansor bei Boncompagni (Plat. p. 24), deren Quelle nicht angegeben ist. Dass der eben erwähnte *Almehon fil. Albumasaris* kein anderer als Jahja ben Abi Mansur sei, kann wohl kaum bezweifelt werden, obwohl eine directe Verstümmelung von Jahja zu Almehon ungewöhnlich ist. Vielmehr scheint hier ein Wort ausgefallen, etwa *Astrologus*, und der Sohn des Abu Man'sur als Astrolog des Khalifen Maamun bezeichnet zu sein. Christmann selbst bemerkt, dass in der gedruckten lateinischen Uebersetzung des Fergani (*in omnibus vulgatis editionibus*) *Almehon* für „*Almamon*" stehe. Die hebräische Uebersetzung, welche Christmanns lateinischer zu Grunde liegt (s. D. M. Ztschr. XVIII, 148), hat nämlich אלממון, ohne Elif. Ob diese Bemerkung zugleich die Tendenz hatte, eine Identificirung des Khalifen mit dem Astronomen zu verhüten, ist nicht zu entscheiden; Christmann selbst deutet Nichts derart an. Eine Unterschiebung ist es jedenfalls, wenn man in *Riccioli's* alphabetischem Chronicon (*Almag. nov. Bonon.* 1651, *p. XXIX*) unter *Almamon* („*seu Alamon, seu Maimon*" *!*) liest: „*Kristmannus* (so schreibt Ricc. stets) *adnotat, a plerisque* (*!*) *hunc confudi cum Almaeone, de quo mox*". Der unmittelbar folgende Artikel lautet: *Almaeon filius Albumasaris, ut habet Kristmannus, vel Almansoris, ut habet Reinholdus in Theorica Octavae Sphaerae*[61]), *observasse dicitur Solis maximam declinationem A. D.* 1140, *vel ut alii,* 1150, *gr.* 23, *min.* 33, *sec.* 30". Auch bei Bullialdus (*Astron. philol.*, Par. 1645, Prol. p. 15) liest man: *Arabes etiam in Hispania* (*!*) *hanc scientiam colere non cessant et inter alios Almeon fil. Almansoris, cuius observatio de maxima obliquitate signiferi facta ad nos pervenit; vixit hic Almeon cir. A. Chr.* 1150. Hier wird Almeon gar zum Spanier! Eine Quelle kann ich auch hier nicht finden. Bei Montucla (I, 368) heisst es: *Almansor, autrement Alméon, ou peut-être Almeon fils d'Almansor, observa dit on, au milieu du douzième siècle, la declinaison de l'écliptique, et la trouva de* 23°, 33′ 30″ (in der Anmerkung wird Bulliaud citirt, der jedoch, wie wir gesehen, keine Zahl der Grade angiebt). *Nous ne comptons pas trop sur cette date; car nous ne connaissons point les auteurs originaux, sur lesquels on la fonde.* Dann kommt er auf die astronomischen Tafeln in Oxford (s. oben). Dennoch liest man bei Delambre (p. 6): *Dans le XII. siècle, Almansor trouva l'obliquité* 23°, 33′ 30″; *ceci nous prouve que, si les Arabes avaient peu ajouté aux théories des Grecs, ils avaient du moins observé beaucoup mieux etc.*

---

61) Es sind Reinhold's Scholien zu Peurbach's Theorica (Witeb. 1542) gemeint, s. z. B. Riccioli I, 444, §. 2 und sonst; vgl. oben Anm. 49.

Almeon hatte einmal in den chronologischen Uebersichten bei *Blancanus*, *Riccioli*, Voss, Weidler und wohl noch Andern das Bürgerrecht erhalten, und in Lalande's allgemeinem Index (p. 882) sich bereits vervielfältigt, denn ausser dem Khalifen Almamon erscheinen noch: „Almaon 1140, Alméon 830, Alméon, Almanzorius 1142"; von ihnen ist jedoch p. 4, 5, Nichts zu finden. Aber auch dabei hat es noch nicht sein Bewenden. In Sedillot's chronologischer Tabelle (Prolog. d'Oloug Beg. p. CLIV n. 88) erscheint unter 1140 neben *Almaeon* noch in Parenthese المعون, eine mir unbekannte arabische Namensform, durch welche ein, nach meiner Ueberzeugung nicht existirender Autor das arabische Indigenat erhält! — Ferner vermuthe ich, dass aus dem vermeintlichen Astronomen auch ein Alchemiker fabricirt worden, nämlich: „*Almeon*, *a* [*Pet.*] *Bono Ferrariensi laudatus*" in Borell's *Biblioth. Chim.* p. 9. Dass in den Verzeichnissen der Alchemiker eine Anzahl vielfach verstümmelter Namen arabischer Aerzte, Astronomen und namentlich Astrologen figurire, werde ich anderswo nachweisen.

Für das Datum 1140—50 weiss ich freilich keine andere Entstehung zu vermuthen, als Irrthum und Confusion. Ibn Esra, welcher die Nachricht von der Schiefe der Ecliptik nach Jahja Ibn Abu Man'sur mittheilt, verfasste seine astrologischen Schriften um 1148, und erscheint in den chronologischen Tabellen bei Weidler (Bibliogr. p. 5) und Lalande (p. 5) unter 1150, mit der Bemerkung: *Sphaerae Ptolemaei cum Persia et Indica comparatio*, was sich auf die astrologischen Excerpte Scaligers zu Manilius bezieht[62]). Wir haben oben (A. 49) gesehen, dass Reinhold, und nach ihm Blancanus u. A. den Almansor 70 Jahre nach „Arzachel" d. i. Zarkala leben lassen. Ebenso behauptet *Riccioli* (p. XXXI, vgl. I, 157, 166), dass Ibn Esra selbst im Buche *Initium sapientiae* (?) den Arzachel 70 Jahre früher leben lasse. Das Zeitverhältniss an sich ist hier allerdings richtig, auf das Quellenverhältniss werde ich anderswo eingehen. Es soll sich hier blos ergeben, dass das Zeitalter des Ibn Esra auf den von ihm erwähnten Autor übertragen worden; es konnte dies um so leichter geschehen, als im Epigraph der Aphorismen *Almansor filius Abrahae Judaei* und das Jahr 530 der Flucht vorkommt.

So bleibt denn der Autor der Aphorismen noch immer fraglich, und für Abraham Judäus nach Lage der Sache keine andere plausible Vermuthung, als dass er der Dolmetscher bei der Uebersetzung Plato's ge-

---

62) Vgl. Montucla I, 418. — Ich habe die Ausg. des Manilius 4. Argent. 1655 vor Augen, wo p. 316: *Sphaerarum Persiae Indicae et Barbaricae ortus ex libro Aben Ezrae Judaeorum doctissimi* nichts Anderes enthält, als die phantastischen Figuren der s. g. Decane (D. M. Zeitschr. XVIII, 146) aus dem hebr. Buche *Initium sapientiae*; vgl. auch Ricius, *de motu octavae sphaerae* f. 42 b. — Sollte deshalb missverständlich dem Ibn Esra „die Eintheilung des Zodiak in 12 Zeichen" (Heilbronner, *Hist. math.* p. 456) beigelegt sein?

wesen, und im Epigraph ursprünglich *Abr. Judaeo interprete* oder dergleichen gestanden habe, wie im Epigraph des oben besprochenen Werkes von Imrani.

9. Das Datum 530 der Flucht findet sich auch am Schlusse der lateinischen Uebersetzung des Commentars zum Centiloquium des (Pseudo-) Ptolemaeus, nämlich: „17 *die mensis Martii*, 12 *die gumadi secundi*". In der That fiel der 12. Dschum. II des Jahres 530 auf den 18. März 1136 — da, nach Wüstenfeld's Tabellen, der 1. auf Sonnabend den 7. März traf; es ist jedoch möglich, dass das Epigraph nach Sonnenuntergang geschrieben und daher nach jüdischer Weise bereits der folgende Tag gezählt worden; abgesehn von der Differenz durch Ansetzung der Flucht am 16., da es fraglich ist, ob die Datirung durch Ausrechnung geschah. Uebrigens ist auch eine einfache Verwechslung der Ziffern 7 und 8 leicht denkbar. Hiernach ist in meiner Abhandlung in der Ztschr. f. Mathem. Bd. X S. 493, Z. 7 anstatt 1116 zu lesen 1136. Aber auch am Ende derselben Seite hat sich ein für die Autorschaftsfrage sehr wesentlicher Fehler eingeschlichen, den ich im Catalog der Leydner Handschr. p. 370 durch Verwechslung einer Ziffer begangen habe. Es hat mich dieser Irrthum veranlasst, den Commentar zum Centiloquium, der mir freilich jetzt nur in der lateinischen Uebersetzung vorliegt, bis auf Anfang und Ende, die ich auch aus drei Handschriften der hebräischen excerpirt habe, durchzublättern, um die Frage nach dem Autor zur Entscheidung zu bringen. Es sei mir gestattet, hier das betreffende Material übersichtlich zusammenzustellen.

Zunächst sind einige Stellen auszuscheiden, welche ausdrücklich als *Additio* (N. 90) oder *Expositio addita* (64) bezeichnet werden, und es fragt sich, ob etwa auch andere, nicht als solche bezeichnete dem Original angehören. Namentliche Anführungen sind: *Aristoletes*, *de operibus altis* (100), — eine ungenaue Uebersetzung des Titels der *Meteora*[63]) — *Galenus*, *lib. dierum creticorum* (42), *Dorotheus* (88), d. i. Dorotheus Sidonius, *hi qui exposuerunt lib. afo* [*rismo*] *Hippocratis* (60), *Zahel in libro electionum* (6, vgl. meinen Catal. p. 2261) und ohne Angabe des Buches (57), *Indi* (n. 38, 95). — Der Verfasser erwähnt auch seine eigenen astrologischen Schriften: *Et uniuscunquarum istarum partium proprietatem patefecimus jam in libris nostris judiciorum* (n. 87), eine unbestimmte Citation, s. unten (aus n. 30).

Nicht selten beruft er sich auf seine eigene Erfahrung (z. B. 40, 95) und nennt auch bestimmte Personen, deren Namen jedoch theilweise derart verstümmelt sind, dass das Aufsuchen derselben in orientalischen Quellen sehr erschwert ist. Andererseits sind einige Mittheilungen, als die eines Zeitgenossen, von historischem Werthe. Beachtenswerth ist es, dass dieselben sich vorzugsweise auf Aegypten beziehen. Eine Mittheilung dieser

---

63) Nämlich für *operationes*: vgl. oben Anm. 42.

Stellen dürfte also, mit Rücksicht auf die Seltenheit des Buches, in mancher Beziehung nützlich sein.

Ich beginne mit der für uns wichtigsten, am Schlusse des Buches, wovon ich auch die hebräische Uebersetzung aus 2 Bodleianischen und einer Leydener Handschrift copirt habe und hiernach in den beigesetzten Abweichungen benutze:

Reminiscor enim: quoniam in nocte 290 anni arabum[1]) *diffuse sunt asub multe. Occupaveruntque aerem et*[2]) *extincti sunt homines: duravitque plus quatuor horis:*[3]) *transacto non* (!) *modico tempore ejusdem anni: immoderatam*[4]) *sitim passi sunt homines: et pervenit nilus egyptä ad* 13 *cubitos. Et minuta est*[5]) *ad incommodum* (!) *hominum quantitas* 4 *cubitorum, crevitque pretium annonae et turbati sunt populi turbatione vehementi et terminatum est regnum*[6]) *Ptolo* (!) *regis egypti.*

[1]) es verbreitete sich die Flamme;
[2]) es erschracken darob;
[3]) es verging nur ein kleiner Theil;
[4]) wegen Wassermangel dursteten;
[5]) und es fehlten von dem Bedürfniss;
[6]) *Altoloni* in Aegypten.

Hier ist ohne Zweifel von dem Untergang der Dynastie der Tuluniden in Aegypten die Rede, welche mit dem Tode Harun's (s. weiter unten) im Jahre 904 endete; es heisst unmittelbar darauf:

Similiter in anno 300 *arabum: diffusae sunt in omni parte aeris: et minutus est iterum nilus: et* [1]) *via aperta est super egyptum ab occidente i.* [*id est*] *a terra arabum per heubaça* (*sic*) *et post hunc per claraamem. Acciditque impedimentum magnum repugnantibus: insurgentibus cum illis. s. egyptiis. Ex habentibus vero comam ascendit una habens crines s. duanebai:* [2]) *egypti passi sunt multum. Et fuit in angulo ex angulis conjunctionis: in quo inceptum est regnum filiorum abeç*[3]). *Obiit ergo abeç aneçir*[4]). *In anno vero* 92[5]) *quidam ascendit habens comam*[6]) *et duravit* 11 *noctibus: movebaturque omni nocte*[7]) *motu sensibili. Intravit igitur filius alchalig*[8]) *post hoc brevi tempore: et profuit egypto et ejus partibus. Acciditque tunc in egyptum quicquid dixit Ptolo.*

[1]) und es wurde in Aegypten (Kahira?) geöffnet das Thor der Aegypter, und es wurde erobert von Abd or-Rahman, und erstarkte die Ansicht [Parthei] derjenigen, die mit ihnen in jener Zeit waren. [Ueber Hobascha oder Habasa s. Weil, Gesch. d. Khalifen II, 595.]
[2]) diese Worte *egypt* ... *multum* finden sich nicht und stören den Zusammenhang;
[3]) Abbas;
[4]) Abu Ahmed an Na'sir;
[5]) 292 (nicht 393);
[6]) „Besitzer der Zunge“ d. h. gezüngelter;
[7]) einen westlichen Weg;
[8]) *Alchalig* in Cod. Uri, die anderen beiden *Al'salig* [wahrsch. Muhamed ben Ali al-Chalendschi bei Weil II, 525].

Es mögen nun noch die übrigen historischen Stellen der Reihe nach folgen, zu deren erschöpfender Behandlung mir theils die Mittel, theils hier der Raum fehlen würde.

N. 9: Et ego vidi in temporibus Lamorche[64]) regis christianorum satellitem qui ad nos ex romanis venit et sapiens dicebatur: et factus est saracenus in Egypto diutius morans: in geometria peritus: qui faciebat imagines qui artificialiter movebantur: lapidum quoque et herbarum naturam cognoscebat. Quadam autem die dum cum eo essem armigerum eius vociferantem audivimus quem scorpius pepugerat: q statim ex marsupio sigilla odorem incensi habentia extraxit: eique unum porrexit et eum portare fecit: statimque ut bibit (sic) armiger requievit. Tunc ego aspexi illa sigilla: et in unoquoque vidi vultum scorpionis impressum: interrogavique eum: cum quo illa sigillaverat. Tunc ipse respondit mihi annulo aureo cui lapis erat heçahar[65]) in quo scorpionis vultus sculptus erat: interrogavi eum qua hora lapidem illum sculpserat: dixit mihi luna existente in scorpione sculpsi etc.

N. 30: Ego quidem recordor: cum essem unus de indoctis astrologis: adhuc quidem juvenis: venit quidam servus regis humarogei deferens nativitatem Aaron filii regis: et interrogans utrum possem intelligere si natus iste succederet patri in regno... Tunc distuli dare judicium donec studiosius inquisissem: post modicum vero temporis quesivi a quodam sene: quem Caleth dicebant: filium alimelit elcemini[66]): perito in dandis judiciis: qui cum respiceret figuram: interrogavit cuius esset nativitas: et dixi Aaron filii regis: obtinebit inquit locum 10 annis fere in regno: et erit sub postetate vel regimine alterius: vel erit ille cui jubetur. (Der Verfasser

64) Da eine Zeitbestimmung nach einem christlichen Könige nicht gut denkbar ist, so hängt offenbar *regis christian.* mit *satellitem* zusammen, nicht mit *Lamorche*. Für Letzteres weiss ich noch keine sichere Deutung. Schwerlich ist es identisch mit dem später unter n. 30 erwähnten *humarogeus*, nämlich Khumaraweih, dem Sohne des Ahmed ben Tulun (st. 899, s. Ibn Khallikan n. 224; englisch bei Slane I, 498), dessen Sohn Harun („Aaron") freilich nicht unmittelbar dem Vater in der Regierung folgte, sondern dem Bruder Dscheisch, der nur mehrere Monate herrschte. Harun starb Ende December 904; in Bezug auf die genaueren Daten sind jedoch die Historiker nicht einig, zum Theil mit sich selbst im Widerspruch (s. Weil a. a. O. II, 482, 523).

65) Wahrscheinlich Bezoar, über dessen Heilkraft eine Monographie bei Hagi Khalfa II, 373 n. 6012 (vgl. VII, 896 zu VI, 51) erwähnt ist; vgl. auch das pseudo-aristotelische *Lapidarium* (Hebr. Bibliogr. 1863, S. 94) und den betreffenden Abschnitt des pseudo-aristotel. *Secretum secretorum*, sowie die Mineralogen Taifaschi (Kap. 10) und Muhammed bar Mansur (Kap. 9) bei Dietz, *Analecta med.* p. 13 und bei Hammer in Fundgruben des Orients, VI, 134; Virchow's Archiv Bd. 37, S. 401.

66) Khalid ben Abd el-Melik, der Astronom des Maamun (el-Kifti bei Casiri und bei Sedillot, *Proleg.* p. X; Hagi Khalfa III, 466; VII, 1121 n. 4818) wird in den angeführten Quellen nicht *Elcemini* (*el-Semini?*) genannt; vgl. auch unten unter No. 65 der Aphorismen. Diese Anführung lässt auf ein hohes Alter unseres Commentators schliessen.

bringt es durch Bestechung dahin, dass der Astrolog ihm das Anzeichen angiebt, das auch beim Grossvater Arons stattgefunden.) Et successit Aaron patri suo in regno et regnavit annis novem et quibusdam mensibus. (s. Anm. 64). Et similiter judicavit rahabachat almansor quod ipse obtineret imperium dum esset eius hospes: et erat tunc almansor in paupertate maxima: in diebus benumeie[67]). Et haec omnia commemoravi in quodam meo libro[68]).

N. 36. In hac etiam urbe quendam vidi quem praeposuit ametrillonis[69]) filius ut fundaret meschidam majorem, q et (sic) unde imperator indignatus fecit eum venire ad se. Cumque venisset quaesivit cur opus suum imperfectum relinqueret: qui suo infortunio stulte respondens in iram regem commovit. Quapropter diu cesus: expiravit et eius ascendens nativitas fuerat libra.

N. 56: Audivi siquidem a patre meo: cui deus parcat: quod cum ipse fuisset cum his qui se absconderant a facie imperatoris almenur (od. almenum): cum Habraam filio Almohed[70]): et quotidie occulte visitabat eum Alhacen filius Habrae: Rauci astrologus: discipulus Rauchil: qui praecepit ut afferret concham maximam aeneam: aqua plenam: in qua ponens scabellum consuluit ei: ut desuper sederet in majori parte diei. Et hoc ideo praecepit ut faceret errare astrologos imperatoris in esse absconditorum. Dixerunt enim quod esset in medio maris. Tandem sonus factus est quod aufugeret per mare indicum.

N. 65: Et vidi Calitum filium Aluelit (sic) qui ponebat significatorem in omni interrogatione non alium praeter dominum conjunctionis etc. et hic erat valde veridicus in dandis judiciis.

N. 73: Audivi equidem a quodam qui vocabatur Sevalet: filius accelem: filius sortilegi qui Ebroamal (sic) vocabatur qui fuerat concede (?) filio Aali: valde animoso in mari vel in navigando: qui cum vellet ingredi tybrim nimio tumultuosum: ventis undas exagitantibus: cum illum increpasset dixit illi: non timeo mihi mortem in mari. Juppiter enim fuit in nativitate mea in domo mortis etc. Et vidi inquit illum in lecto suo mori. Accidit etiam ut quidam serviens responderet mihi nativitatem filii domini sui etc. Cumque pervenisset ad 30 annum ingressi sunt quidam domum eius fugientes: eo quod accusati essent super illum de dolo quem p̃erat urbi

---

67) D. h. der Omajaden, ohne Zweifel ist vom Khalifan Abu Dschaafer el-Mansur die Rede; vgl. oben Anm. 52.

68) Sollte hier die historische Schrift gemeint sein, welche in der Zeitschrift f. Math. X, 493 n. 6 (vgl. S. 498) erwähnt ist?

69) Ahmed, Sohn des Tulun (starb 884), s. Ibn Khallikan bei Slane I. 153; Weil II, 435. Die nach ihm benannte grosse Moschee baute er im Jahre 259 H.

70) Ibrahim, Sohn des Mehdi, versteckte sich im Juni 819; s. Ibn Khallikan n. 9; engl. bei Slane I. S. 17; vrgl. d'Herbelot II, 816; Weil II, 225.

in egypto: et deprehensi sunt in domo illa: et ipse cum illis amisit manum et pedes etc. Haec omnia induxi ad perfirmanda verba Pto.

Der lateinische Uebersetzer dieses Commentars ist bis jetzt unbekannt; die Art der Datirung erinnert jedoch an Plato und Abraham Judaeus. Bei genauerer Erforschung der Handschriften findet sich vielleicht auch der Name des Einen oder Anderen.

10. Eine Nativität auf dem 1. Blatte des *Cod. Sorb.* 980 ist schon von Chasles (*Comptes rendus* XIII, 1841, p. 508 Note 3) erwähnt, welcher den Verfasser ungenau als *Abraham Juif de Beziers* bezeichnet. Ich besitze eine Durchzeichnung sowohl der Figur mit den 12 Häusern und deren Inschriften mit sehr kleinen Lettern als auch des daneben geschriebenen Textes. In der Mitte der ersteren liest man: *Nat[ivitas] cuiusdam pueri anno dom. MCXXXVI. XX.* (??) *die octbe. die mar. cel.* (?) *hora ij.* Das Jahr 1136 und und der Monat October sind sicher, sowie die ersten beiden XX des Monatstages; hingegen ist das 3. abgerückte Zeichen einem m ähnlich, vielleicht eine zusammengesetzte Zahl oder sonst Etwas. Das Jahr 1136 hat die Sonntagsbuchstaben E D, also war Dienstag ausser dem 20. nur noch der 27. October. Ich bedaure, nicht angeben zu können, nach welchem der verschiedenen Systeme diese Nativität berechnet ist; beispielsweise bemerke ich, dass in den beiden Häusern an der untern Basis nur *aquarius* VIIII und *aries* XII, in dem zwischen beiden nur *pisces* XVII verzeichnet ist. Aus dem in der Anmerkung[71]) mitgetheilten Texte der Nativität hebe ich die Worte: *pro sua lege inquirenda* hervor, indem ich daraus schliessen möchte, dass der Knabe ein jüdischer war, so dass das Ganze aus einem hebräischen Texte übersetzt sein könnte. Aber das Jahr 1136 passt

71) Aspexi hanc natiuitatem et inueni quod pre omnibus parentibus suis erit sapientior et erit amator Scientie et correctionis et diliget sapientes et erit mente boniuolus et libenter sua erogabit et erit amator mulierum sed caute et absconse et uiuet LXVIII annis et erit omnibus diebus uite sue sanus corpore sed tamen habebit aliquantulum infirmitatis in stomacho ex calore. Et cum expleuerit XXV annum et paulo amplius accipiet uxorem convenientem de nobili prosapia et tunc incipiet fortuna sua meliorari in omnibus que facere voluerit sed propter Iouem diliget mulierem et aliquantulum fama blasphemabitur sed ei non nocebit. et habebit filios et filias, sed amplius de filiis. Et duas uxores habebit de quibus mortem uidebit et bona illarum possidebit et quamdiu uixerit satis diues erit quia in omnibus lucrabitur et hec fortuna uidetur ei contingere ex quo habebit XX annos et peraget longa itinera pro sua lege inquirenda et quocumque ierit ab omnibus honorabitur et lucrabitur in omni mercatura prout ipse uoluerit et sicut etas augmentabitur ita et ipsa peccunia et ditior erit omnibus parentibus suis et morietur in terra sua ex forti ualitudine stomachi cum par..tussi. anni fortunati sunt eius XVIIIIus. XXIus. XXV. XXVIII. XXXI. XXXVII. XLV. XLIX. LII. LXI. anni infortunati sunt XXIII. XXVI. XXXV. XXXVIII. XLVII. L. LVIIII. LXII. Menses fortunati november, februarius, iulius. Infortunati september, december. dies boni dies veneris. mali dies martis. nox bona quam sequitur dies martis. mala quam sequitur dies sabbati. et ille sit super omnia benedictus qui de hac re ueritatem non ignorat. hanc natiuitatem iudicauit abraham iudeus biterris.

nicht sehr gut zu Abraham bar Chijja, den wir in den früheren Monaten dieses Jahres in Barcelona gefunden, und dessen Aufenthalt in der Provence überhaupt noch fraglich ist. Ibn Esra war sicher zu irgend einer Zeit in Beziers, da er dort das Buch über den Gottesnamen verfasste; und zwischen seinen astrologischen Werken ist eine ähnliche Nativität eines Kindes aufgenommen, welches im Herbst 1160 geboren worden, und zwar nach der Länge und Breite von Narbonne. Es knüpft sich daran eine allgemeine Erörterung, in welcher die Ansicht des „Nasi" (Abr. bar Chijja) bestritten wird (oben Anmerkung 20). Ob aber Ibn Esra schon 1136 im Beziers war, das ist eine sehr schwierige Frage, welche nur im Zusammenhange mit sehr weitschichtigen Untersuchungen besprochen werden kann (vgl. vorläufig Hebr. Bibliographie 1861, S. 68, Anm. 5, 1862, S. 30). Es ist freilich kein zwingender Grund vorhanden, den Verfasser dieser Nativität überhaupt mit einem der beiden Astronomen zu identificiren; warum sollte nicht ein anderer Jude Abraham in Beziers eine solche gestellt und niedergeschrieben haben? Und dennoch kommt man wieder auf jene Celebritäten zurück, weil es unwahrscheinlich ist, dass irgend ein obscurer Mensch zu einer, in damaliger Zeit so wichtigen Angelegenheit herangezogen, und die Nativität eines solchen der Aufzeichnung oder gar Uebersetzung gewürdigt worden; vielmehr möchte in der Person oder in der Methode die Veranlassung zu suchen sein. Merkwürdiger Weise bietet aber das Datum 1136 ein in beiden Fällen wichtiges biographisches Moment. Ich gestehe, dass ich nur aus unsicheren Gründen mich eher für Ibn Esra entscheiden würde, eben so in Bezug auf das von Libri (*Hist.* I, 304) abgedruckte: *Liber augmenti et diminutionis ... quem Abraham compilavit ...*, wenn nicht dort ein Araber Ibrahim gemeint ist. Von Letzterem werde ich also in einem nachfolgenden zweiten Artikel handeln, dessen Gegenstand die Schriften des Ibn Esra sein werden.

Nachtrag (vom December 1866).

Auch diesmal sind mir zwischen Absendung und Abdruck der obigen Abhandlung Hilfsmittel zur Ergänzung zugegangen, welchen ich das Nachfolgende entnehme, einige sehr kurze Bemerkungen anfügend.

Ueber Almeon (S. 35) erhielt ich durch die unermüdliche Freundlichkeit des Fürsten Boncompagni Ende Juli fernere 7 Citate, von denen ich nur die beiden ältesten und wichtigeren ausführlicher wiedergebe.

1. In Purbach's *Theorica planetar.* (*ed.* 1482, *fol. h. verso*) und ed. 1553, fol. 166; (*de mutatione declinationum solis maximarum*) liest man: *Maiores namque repertae sunt a Ptolemaeo quam ab Almeone, quod utique cum similibus viis et modis processerint etc.* — Ich glaube, dass man hier nur an den Khalifen Maamun zu denken brauche, da keine Zeitbestimmung angegeben ist.

2. In dem Scholion des Erasmus Reinhold zur Stelle (ed. Paris 1553) wird eine Zusammenstellung der grössten Declinationen gegeben (vergl. oben S. 34, Anm. 59):

	Eratosthenes, Hipparch und Ptolemäus [um 130] „ beinahe gleich	23° 51′ 20″
circa 880	Albategnius	23° 35′ 0″
„ 1070	Arzahel	23° 54′ [1.34?] 0″
„ 1140	Almeon Almanioris (*sic*)	23° 33′ 30″
„ 1300	Prophatius Judaeus	23° 32′ 0″
„ 1460	Purbachius et Regiomontanus	23° 28′ 0″

u. s. w.

Es folgt dann eine Angabe der Zeitdistanz und Jahrzahl, welche ich der Kürze halber gleich durch Beisetzung der letzteren erledigt habe; bei Almeon heisst es *etsi Wernerus aliter tradit.* Reinhold's Scholien erschienen zuerst 1542 (s. Lalande, p. 61, bei welchem p. 62 eine Pariser **1543**, p. 75 eine Wittenberger **1553**, ohne nähere Angaben, vielleicht Beides irrthümlich; die ersten Ausgaben scheinen sehr selten, da auch die Bodleiana keine besitzt; die Pariser im Besitze Boncompagni's ist *apud Carolum Perier in vico Bellovaco sub Bellerophone MDLIII* gedruckt). — Weiter hinauf weiss ich die Angabe über Almeon nicht zu verfolgen. Von da abwärts schreibt Einer dem Andern nach.

3. Bulialdus (s. oben S. 35). — 4. Nic. Antonio (*Biblioth. hisp. ed.* 1696, p. 239, *ed.* Bayer 1788, p. 391): *Almaeonem Almanzoris* (*filium intelligo*) *etc. Ismael Bullialdus etc.* — 5. Im *Catalogus Biblioth. Casanatensis T. I*, Rom 1761, p. 133: *Almansor, Astrologus Arabs, aliquibus idem ac Almaeon Almanzoris filius etc. qui maximam solis declinationem etc. anno* 1140 *vel* 1150. — 6. Bailly (*Hist. de l'astr. T. I*, Paris 1779, p. 602, §. XXIX): *Almansor, ou Alméon, fleurit vers* 1140 *ou* 1150, *il s'occupa de la recherche de l'obliquité etc.* als Quelle ist zweimal Bullialdus genannt, obwohl dieser die Zahl 23° 33½′ nicht angiebt! — 7. Fossio (*Catal. Cod. saec. XV. impress. qui in Bibl. Magliabech.*, *T.* I Florent. 1793, p. 77) bezieht sich zur Ausgabe 1492 der *Judicia Almansoris* auf den Catalog der Casanat. (N. 5) und Antonio (N. 4). — Boncompagni selbst folgte wahrscheinlich, wie er mir schreibt, der letzten oder einer der letzten 4 Quellen. —

In Bezug auf hebräische Handschriften des Abraham bar Chijja der im ist Frühling d. J. erschienene pariser Catalog (*Catalogues* [so] *des Manuscr. hébr. et samaritains de la bibioth. imperiale*) in der *table alphab. des auteurs* p. 249 unter *Abraham fils de Hayya* zu vergleichen, jedoch nicht ohne Vorsicht. Die Bezeichnung *Calendrier* für das Buch *Ibbur* (oben S. 16) ist ungenau; — die Handschrift Almanzi 8 hat, nach Luzzatto's Angabe, bessere Lesarten als die Ausgabe. — Die Berechnung der Planetenläufe (oben S. 13) ist in N. 1044, 1092 vertreten; letztere enthält Einiges von Jacob ben Machir, auch die Tafel von 70 Städten, erstere Noten von Ibn Esra,

welche angeblich die meisten Handschriften des Buches begleiten! Das gilt nur von den Tafeln und ihren Canones. Die Geometrie ist in 1048 (Orat. 160), 1061 (a. f. 447), nicht in 1050 (449). Der Catalog setzt das Wort *attribué* hinzu, d. h. von den Verfassern des Catalogs, aber mit Recht; hingegen irrthümlich unter dem astrologischen Werke 1056,[6], welches der Compilator des Catalogs ohne allen Grund unserem Abraham beilegt, indem die Citate aus Ibn Esra spätere Zusätze sein sollen. Vielmehr sind es offenbar die bekannten 4 Kapitel des Auszuges aus Ibn Esra's astrologischen Schriften von Levi ben Abraham (XIII. Jahrh.)! — In demselben Register p. 250 ist Ali als Commentator des Centiloquium, nach der Uebersetzung des Jakob ben Elia aus dem Lateinischen in N. 1065, irrthümlich unter Ali (Maitre Manuel) gerathen und gehört unter „Ali Ibn Rodhwan" (s. oben S. 38)[1]).

S. 8, Anm. 11, der apologet. Brief ist kürzlich in der zu Paris erscheinenden hebr. Zeitschrift Libanon (III, N. 20, S. 365) abgedruckt.

S. 10, A. 19, ein *Imago mundi* wird dem Isidor Hispalensis, Beda oder Heinrich Huntingdon zugeschrieben (vergl. Coxe, Catal. Canon. p. 291 Cod. 18.[2]).

S. 20, Anm. 37. Herr Prof. Haneberg war so freundlich, mir die Stellen aus den beiden Münchener Handschriften des Originals A. f. 81[a] und *B* f. 65[b] abzuschreiben. *A* lautet: „Diese Rechnung beruht auf den Grundsätzen der Wissenschaft des Maasses und die Beweise dafür sind dort erläutert, hier brauchst du sie nicht. Ich schliesse diesen Theil u. s. w." In *B*. „Diese Rechnung . . . Maasses, wir können sie hier nicht angeben und brauchen sie hier auch nicht so sehr, weil der Beweis der Wahrheit diese Rechnung ist, nach der Zahl (?), die ich angegeben, ich schliesse u. s. w." Man sieht auch hier, dass die lateinische Uebersetzung durchaus keine wortgetreue ist.

S. 32: Ibn al-Moneddschim; vergl. auch *Journ. Asiat.* 1853, T. I, p. 337.

S. 34 unten: Ueber den Missbrauch des Namens Joh. Damascenus s. meine Nachweisung in Virchow's Archiv, B. 37, S. 374 ff.

---

1) Ich kann nicht umhin, hier zu bemerken, dass die Handschriften 1082,[2] das arabische Original des Kalenders von Abul Hasan Garib ben Said enthält, und dass bei der Gestalt der hebräischen Buchstaben kein Zweifel an meiner Vermuthung (Zeitschrift Bd. XI, S. 238) übrig bleibt. So hat denn in Paris selbst das Werk so lange unerkannt gelegen, und würde es vielleicht noch bleiben; denn die hebräischen Buchstaben scheinen einen abschreckenden Zauber auszuüben!

II.

Ueber lemniscatische Coordinaten.

Von

Dr. E. LOMMEL,
Lehrer am Gymnasium, Docent an der Universität und am
eidg. Polytechnikum in Zürich.

(Hierzu Tafel I, Figur 1 bis 4.)

1. Wir stellen uns zunächst folgende Aufgabe: Es sollen diejenigen krummen Linien bestimmt werden, welche das durch die Gleichung

$$1)\qquad [(p+x)^2+y^2]\,[(p-x)^2+y^2]=\varrho^4$$

gegebene System homopolarer Lemniscaten rechtwinklig durchschneiden.

Die vorstehende Gleichung bezieht sich auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt aller Lemniscaten zusammenfällt, und dessen Abscissenaxe durch die beiden gemeinschaftlichen Pole hindurchgeht; p bedeutet die Entfernung eines jeden Poles vom Mittelpunkt, und ϱ ist ein Parameter, welcher von einer Lemniscate zur andern variirt. Die Gleichung selbst ist der unmittelbare Ausdruck der bekannten Eigenschaft, dass das Product der Entfernungen eines Curvenpunktes von den beiden Polen für jede einzelne Lemniscate einer Constanten ϱ^2 gleich ist.

Die Tangente des Winkels, welchen die irgend eine unserer Lemniscaten im Punkte (x, y) berührende Gerade mit der Abscissenaxe einschliesst, berechnet sich leicht in folgender Gestalt:

$$-\frac{x}{y}\cdot\frac{x^2+y^2-p^2}{x^2+y^2+p^2}$$

Die gesuchte krumme Linie, welche durch den betrachteten Punkt der Lemniscate hindurchgeht, hat daselbst natürlich die nämlichen Coordinaten x und y, nur ist die zwischen denselben bestehende Relation, d. h. die Glei-

chung der Curve, noch unbekannt. Da aber ihre Berührungslinie in (x, y), welche mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen Tangente $\frac{dy}{dx}$ ist, senkrecht stehen soll auf derjenigen der Lemniscate, so hat man offenbar die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(x^2+y^2+p^2)}{x\,(x^2+y^2-p^2)} \tag{2}$$

deren Integration zur Lösung des vorgelegten Problemes führt.

Man kann aber diese Gleichung auch so schreiben:

$$(x^2+y^2)\,(x\,dy-y\,dx) = p^2\,(y\,dx+x\,dy).$$

Führt man nun vermittelst der Gleichungen

$$\frac{y}{x} = v \text{ und } xy = w$$

zwei neue Veränderliche v und w ein, so findet man leicht

$$x\,dy - y\,dx = x^2\,dv$$
$$x\,dy + y\,dx = dw$$
$$x^2+y^2 = x^2\,(1+v^2)$$
$$x^2 = \frac{w}{v}.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe in obige Differentialgleichung verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{w^2}{v^2}(1+v^2)\,dv = p^2\,dw.$$

Hier können die Veränderlichen ohne Weiteres getrennt werden; man erhält

$$\left(1+\frac{1}{v^2}\right)dv = p^2\,\frac{dw}{w^2}.$$

Die Integration liefert sofort

$$v - \frac{1}{v} = C - \frac{p^2}{w}$$

wo C die willkührliche Constante bezeichnet. Führt man jetzt die urspünglichen Veränderlichen x und y wieder zurück, so stellt sich die Gleichung der gesuchten Trajectorien in folgender Form dar:

$$x^2 - y^2 + Cxy = p^2. \tag{3}$$

Sie lässt auf den ersten Blick erkennen, dass die verlangten Curven ein System gleichseitiger Hyperbeln bilden, welche sämmtlich durch die beiden Pole der Lemniscatenschaar hindurchgehen, und deren gemeinsamer Mittelpunkt mit demjenigen der Lemniscaten coincidirt.

2. Transformirt man diese Gleichung zu einem neuen rechtwinkligen Coordinatensystem, welches den nämlichen Anfangspunkt hat, dessen Abscissenaxe aber mit der ursprünglichen den Winkel β einschlisst, indem man

$$x = x'\cos\beta - y'\sin\beta$$
$$y = x'\sin\beta + y'\cos\beta$$

setzt, so erhält man zunächst

$$(x'^2 - y'^2)(\cos 2\beta + \tfrac{1}{2} C \sin 2\beta) - 2x'y'(\sin 2\beta - \tfrac{1}{2} C \cos 2\beta) = p^2.$$

Soll die neue Abscissenlinie mit der Hauptaxe der Hyperbel zusammenfallen, so muss der Winkel β der Bedingung

$$\sin 2\beta - \tfrac{1}{2} C \cos 2\beta = 0$$

genügen, woraus sich

$$C = 2 tg 2\beta$$

ergiebt. Führt man daher mittelst dieser Relation in die obige transformirte Gleichung statt der willkürlichen Constanten C den ebenso willkürlichen Winkel β ein, so erlangt die Gleichung der Hyperbeln, auf die Axen bezogen, folgende einfache Gestalt

$$x'^2 - y'^2 = p^2 \cos 2\beta,$$

wo jetzt β den Winkel ausdrückt, welchen jedesmal die reelle Axe mit der früheren Abscissenlinie bildet. Die halbe Länge r dieser Axe bestimmt sich aus der Gleichung

4) $$r^2 = p^2 \cos 2\beta,$$

welche uns zeigt, dass ihre Richtung stets zwischen $\beta = -45^0$ und $\beta = +45^0$ (oder zwischen $\beta = 180^0 - 45^0$ und $\beta = 180^0 + 45^0$) enthalten sein muss, weil alle übrigen Werthe von β imaginäre Werthe von r liefern würden. Man erhält demnach alle Hyperbeln des Systems, wenn man dem Winkel β alle stetig aufeinanderfolgenden Werthe von -45^0 bis $+45^0$ beilegt. Für die Grenzwinkel $\beta = -45^0$ und $\beta = +45^0$ wird $r = 0$, und die Hyperbeln reduciren sich in diesem Falle auf ihre Asymptoten, nämlich die Coordinatenaxen XX' und YY' (Fig. 1).

Werden in der Gleichung 4) r und β als Polarcoordinaten angesehen, so stellt dieselbe den geometrischen Ort der Scheitel sämmtlicher Hyperbeln dar. Der blosse Anblick der Gleichung zeigt uns, dass dieser Ort eine Lemniscate (ACO Fig 1) ist, welche sich in Form eines ∞ durch die beiden Pole und den Mittelpunkt der gegebenen Lemniscatenschaar hindurchschlingt. Sie gehört demnach nicht zu dieser Schaar; ihre Pole sind vielmehr um die Grösse $\frac{p}{\sqrt{2}}$ vom Mittelpunkt entfernt.

Bezeichnet man mit r' die Entfernung des Brennpunktes der zum Winkel β gehörigen Hyperbel vom Coordinatenanfang, so hat man $r'^2 = 2r^2$, oder

5) $$r'^2 = 2p^2 \cos 2\beta.$$

Diese Gleichung zeigt, dass sämmtliche Brennpunkte der Hyperbelschaar auf derjenigen unserer gegebenen Lemniscaten liegen, welche durch den Coordinatenanfang hindurchgeht (LMO Fig. 1) und daselbst einen doppelten Wendepunkt besitzt. Auch diese Lemniscate wird von sämmtlichen Hyperbeln unter rechtem Winkel geschnitten, nur der eben genannte Doppelpunkt macht eine Ausnahme. Die beiden in ihm sich kreuzenden Curventheile bilden nämlich mit der positi-

ven Abscissenaxe Winkel von 45^0 und 135^0, d. h. sie durchschneiden sicl selbst rechtwinklig, und werden also von der durch den Anfangspunkt ge henden Hyperbel, nämlich den beiden Coordinatenaxen, unter Winkeln voı 45^0 geschnitten. Der gemeinsame Mittelpunkt des Lemniscaten- und Hy perbelsystems bietet demnach, in Hinsicht auf die Eingangs gestellte Auf gabe, eine Unterbrechung der Stetigkeit dar, indem der rechte Winkel unter welchem die beiden Curvenschaaren sich sonst überall schneiden, da selbst plötzlich auf einen halben rechten Winkel zurückspringt.

3. Da sämmtliche Hyperbeln gleichseitig sind, so weichen ihre Asymp toten von der Richtung β der Hauptaxen beiderseits um 45^0 ab. Bezeichnet man daher mit α den Winkel, welchen diejenige Asymptote mit der positiven x-Axe bilden, der man, von der positiven x-Axe gegen die positive y-Axe fortschreitend, zuerst begegnet, so ist

$$\alpha = \beta + 45^0$$

folglich

$$C = -2 \cot g 2\alpha.$$

Führt man diesen Werth statt C in die obige Gleichung 3) ein, so liefert

$$6)\qquad x^2 - y^2 - 2xy \cot g\, 2\alpha = p^2$$

alle Hyperbeln des Systems, wenn α alle Werthe von 0^0 bis 90^0 durchläuft.

4. Bestimmt man aus Gleichung 6) den Winkel w, welchen die Berührende an irgend einem Punkte (x,y) einer unserer Hyperbeln mit der x-Axe einschliesst, so findet man

$$7)\qquad tg w = \frac{dy}{dx} = \frac{x\, tg 2\alpha - y}{y\, tg 2\alpha + x}.$$

Für $x=p$ und $y=0$, d. h. für den Punkt A (Fig. 1), wo alle Hyperbeln sich schneiden, ergiebt sich

$$tg\, w_0 = tg\, 2\alpha$$

oder

$$w_0 = 2\alpha.$$

Der Winkel also, unter welchem eine jede Hyperbel im Punkte A die Abscissenaxe AOA' durchschneidet, wird durch ihre eine Asymptotenrichtung halbirt, durch die andere demnach der Nebenwinkel. Berührt daher die Gerade QS die Hyperbel BB' in A, so ist am Dreieck AOS der Aussenwinkel $XAS = 2\alpha$, und da Winkel $AOS = \alpha$ ist, so muss auch $ASO = \alpha$ sein. Das genannte Dreieck ist also gleichschenklig, und zwar ist $AO = AS = p$.

Beschreibt man daher vom Punkte A aus einen Kreis mit dem Halbmesser p, welcher eine beliebige Asymptotenrichtung OP in S schneidet, so berührt der Durchmesser SAQ des Kreises die jener Asymptotenrichtung zugehörige Hyperbel im Punkte A; wegen der Perpendicularität der Asymptoten geht selbstverständlich die andere Asymptote durch den Endpunkt Q des Durchmessers SAQ. Zu allen unsern Hyperbeln können somit die

Berührungslinien im gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte A mit Hilfe jenes einzigen Kreises construirt werden.

5. Um diejenigen Punkte irgend einer Lemniscate zu finden, welche am weitesten oder am wenigsten weit von der Abscissenaxe entfernt sind, d. h. also die Maxima oder Minima der Ordinate y, muss man $\frac{dy}{dx}$ aus Gleichung 1), nämlich $\frac{x(p^2-x^2-y^2)}{y(p^2+x^2+y^2)}$, gleich Null setzen; man erhält dadurch entweder

8) $$x^2+y^2=p^2$$

oder

9) $$x=0.$$

Die erstere Gleichung, welche für positive Ordinaten blos Maxima giebt, sagt aus, dass dieselben auf einem Kreise liegen, welcher von O aus mit dem Radius p beschrieben wurde, oder mit anderen Worten, dieser Kreis ist, für alle Lemniscaten, welche er durchschneidet, der geometrische Ort ihrer Ordinatenmaxima.

In einem jeden Maximum ist die Berührungslinie, oder das ihr angehörende Element der Curve, mit der Abscissenaxe parallel. Da nun die Lemniscaten von den Hyperbeln senkrecht durchschnitten werden, so müssen die Tangenten der Hyperbeln da, wo diese durch die Maximalpunkte der Lemniscaten hindurchgehen, oder, was dasselbe ist, wo sie dem ebenerwähnten Kreise begegnen, mit der Ordinatenaxe parallel sein, eine jede Hyperbel kommt daher der Ordinatenaxe am nächsten da, wo sie jenen Kreis durchschneidet, so dass der nämliche Kreis auch der geometrische Ort aller jener Hyperbelpunkte ist, deren Abscissen Minima sind. Da jeder dieser Punkte (z. B. D) vom Mittelpunkte O eben so weit entfernt ist wie der Punkt A, so muss er zu diesem symmetrisch liegen in Bezug auf die Hyperbelaxe OC, und seine Tangente DE muss diese Axe im nämlichen Punkte E treffen, wie die Tangente AS. Man findet daher den Punkt D als Durchschnittspunkt des Kreises AD mit einer Geraden, welche durch E parallel zur Ordinatenaxe gezogen wird.

Diejenigen Lemniscaten, deren absolute Maxima auf dem Kreise (8) liegen, haben entweder keine absolute Minima, wenn ihr Parameter kleiner als p ist; oder sie besitzen solche, entsprechend der Gleichung $x=0$, in der Ordinatenaxe, wenn ϱ zwischen p und $p\sqrt{2}$ liegt; für alle übrigen Lemniscaten, deren Parameter grösser ist als $p\sqrt{2}$ ist, liefert $x=0$ nur Maxima.

6. Da die Hyperbeln und Lemniscaten sich rechtwinklig durchschneiden, so ist

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{tg\,w};$$

Für die Maxima und Minima muss daher auch $\frac{1}{tg\,w}$ verschwinden, d. h. es muss

$$y\,tg\,2\alpha + x = 0$$

oder

$$y = -\cot g\,2\alpha \,.\, x \tag{10}$$

sein. Diese Gleichung stellt aber eine Gerade vor, welche durch den Anfangspunkt geht und senkrecht steht auf eine andere, die mit der Abscissenlinie den Winkel 2α bildet. Denkt man sich nun durch den Maximalpunkt D irgend einer Lemniscate, wo sie von dem obigen Kreise geschnitten wird, die zugehörige Hyperbel gezogen, so bildet ihre Tangente im Punkt A mit der Abscissenaxe den Winkel 2α; fällt man auf diese Tangente von O aus eine Senkrechte, so trifft diese den Kreis gerade im Maximum D der Lemniscate; diesen Punkt D, welcher zugleich dem Abscissenminimum dem Hyperbel entspricht, kann man daher für eine Hyperbel von gegebener Asymptotenrichtung α auch finden, wenn man auf die nach §. 4 construirte Tangente AS vom Anfangspunkt die Senkrechte OD zieht und dieselbe $= p$ macht.

Da die gerade Linie, welche den Kreis in D berührt, senkrecht steht zum Radius OD, so läuft sie parallel mit der Geraden AS, welche die durch den nämlichen Punkt D gehende Hyperbel in A berührt. Eine jede Lemniscate wird daher von unserem Kreise unter demselben Winkel geschnitten, unter welchem die zugehörige Hyperbel die Abscissenaxe schneidet.

7. Denken wir uns in einer Ebene alle zu den stetig aufeinderfolgenden Werthen von ϱ gehörigen Lemniscaten und alle zu den stetig aufeinanderfolgenden Werthen von α gehörigen Hyperbeln verzeichnet, so können wir jeden Punkt der Ebene als Durchschnittspunkt irgend einer Lemniscate (ϱ) mit irgend einer Hyperbel (α) auffassen und ϱ und α als seine diesem eigenthümlichen Systeme angehörigen Coordinaten betrachten. Analog den elliptischen Coordinaten wollen wir diese Werthe die lemniscatischen Coordinaten des Punktes nennen. Nun liefert aber jede Hyperbel mit einer beliebigen Lemniscate vier Durchschnittspunkte, von denen in jedem Quadranten sich einer findet (ausser für $\alpha = 0$, wo die vier Punkte auf den Axen XX und YY symmetrisch zu beiden Seiten des Anfangspunktes liegen). Um die hieraus entspringende Vieldeutigkeit zu heben, setzen wir fest, dass der Winkel α von 0 bis 360^0 und weiter gezählt, und zu jeder durch den Werth von α angegebenen Asymptotenrichtung nur das im gleichen Quadranten befindliche Hyperbelstück hinzugenommen werde, d. h. dasjenige, welches sich jener Richtung anschmiegt.

So erscheint jeder Punkt der Ebene als Durchschnitt einer Lemniscate mit einem von A oder A' ausgehenden, im Allgemeinen gekrümmten Strahle. Für $\alpha=0$ ist die Gerade AX dieser Strahl, bei wachsendem α nehmen die

Strahlen eine hyperbolische Krümmung an, bis sie für $\alpha = 90^0$ in die gebrochene Linie AOY übergehen. Im zweiten und dritten Quadranten wird A' zum Ausstrahlungspunkte; die Strahlen wiederholen sich im zweiten Quadranten in umgekehrter Reihenfolge vom gebrochenen $A'OY$ bis zum gradlinigen $A'X'$, gehen im dritten von $A'X'$ bis zum geknickten Strahle $A'OY'$, woselbst wieder ein Ueberspringen zum früheren Strahlungspunkte A stattfindet, und kehren endlich im vierten Quadranten vom geknickten Strahle AOY' zum geradlinigen AX zurück.

Das System der gewöhnlichen Polarcoordinaten ist als besonderer Fall im lemniscatischen enthalten. Lässt man nämlich die beiden Lemniscatenpole mit dem Anfangspunkte zusammenfallen, indem man $p = 0$ setzt, so gehen die Hyperbeln in ihre Asymptoten über, d. h. jene Strahlen werden zu geraden Linien, welche durch den Anfangspunkt gehen und mit der Abscissenaxe die Winkel α bilden, während die Lemniscaten sich in Kreise verwandeln, deren Radien die jeweiligen Werthe von ϱ sind. Die Grösse ϱ im Lemniscatensystem entspricht daher dem Radius Vector, der Winkel α der Anomalie des gewöhnlichen Polarsystems.

8. Wenn wir die Eigenschaften räumlicher Gebilde in andern und wieder andern Coordinatensystemen ausdrücken, so ist es gleichsam, als ob wir jenen Gebilden immer andere Sprachen lehrten, in denen sie mehr oder weniger vernehmlich zu uns sprechen. Unter diesen Sprachen wird aber offenbar jedesmal diejenige für uns die verständlichste sein, welche sich der Natur der zu untersuchenden Gebilde am ungezwungensten anpasst, denn in dieser werden sich die Eigenthümlichkeiten derselben auf die einfachste und darum deutlichste Weise ausprägen. Durch geeignete Wahl des Coordinatensystems erzielt man eine Eleganz der Formeln und eine Leichtigkeit der Discussion, welche man bei Anwendung anderer Coordinaten vergeblich erstreben würde. In der Folge werden sich Beispiele für das Gesagte in genügender Menge ergeben. Für jetzt sei es mir gestattet, auf ein physikalisches Problem hinzuweisen, bei welchem sich die lemniscatischen Coordinaten mit grossem Vortheil gebrauchen lassen. Ich meine die Interferenzerscheinungen, welche senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittene zweiaxige Krystallplatten im polarisirten Lichte zeigen. Denkt man sich nämlich auf der dem Auge zugewendeten Oberfläche des Krystalls um die scheinbaren Endpunkte der optischen Axe als Pole die obige Lemniscaten- und die zugehörige Hyperbelschaar verzeichnet, so ist jede Lemniscate der geometrische Ort aller jener Punkte, welche Strahlen gleichen Phasenunterschiedes dem Auge zusenden, während alle längs einer Hyperbel austretenden Strahlen die nämlichen zwei, mit den Asymptoten der Hyperbel parallelen, Oscillationsrichtungen aufweisen. Die lemniscatischen Coordinaten ϱ und α bezeichnen alsdann auf der Krystallplatte einen Punkt, welchem ein ganz bestimmter Phasenunterschied und zwei ganz bestimmte

Oscillationsrichtungen zukommen, und da von diesen beiden Elementen die Intensität der im Analyseur gesehenen Lichterscheinung abhängt, so wird man dieselbe als Function von ϱ und α ausdrücken können. Man erhält so den nämlichen Ausdruck, welcher auch für senkrecht zur optischen Axe geschnittene einaxige Krystalle gilt, nur sind für diese unter ϱ und α gewöhnliche Polarcoordinaten zu verstehen, während für die zweiaxigen Krystalle ϱ und α lemniscatische Coordinaten bedeuten. Sind daher die Eigenschaften unseres Hyperbel- und Lemniscatensystems bekannt, so wird die Untersuchung dieser Interferenzerscheinungen, wie ich andern Orts*) gezeigt habe, für die zweiaxigen Krystalle ebenso einfach und leicht durchführbar, als für die einaxigen.

9. Um die Gleichung einer beliebigen Curve in lemniscatische Coordinaten ausdrücken zu können, müssen wir zunächst aus 1) und 6) x und y als Functionen von ϱ und α bestimmen. Die Gleichung 1) lässt sich aber auch so schreiben:

$$1^a)\qquad (x^2+y^2)^2-2p^2(x^2-y^2)+p^4=\varrho^4.$$

Setzt man hierin aus 6)

$$x^2-y^2=p^2+2xy\, cotg\, 2\alpha,$$

so erhält man

$$11)\qquad (x^2+y^2)^2-4p^2xy\, cotg\, 2\alpha-p^4=\varrho^4.$$

Subtrahirt man ferner das Quadrat der 6), nachdem sie zuvor in der Form

$$x^2-y^2-p^2=2xy\, cotg\, 2\alpha$$

geschrieben wurde, von 1^a), so findet man

$$4x^2y^2=\varrho^4-4x^2y^2\, cotg^2\, 2\alpha$$

und daraus

$$12)\qquad 2xy=\varrho^2 \sin 2\alpha.$$

Da ϱ^2 positiv ist, so müssen $\sin 2\alpha$ und das Product xy stets das nämliche Vorzeichen haben; dies ist wirklich der Fall, wenn wir, nach den Festsetzungen des §. 7 α alle vier Quadranten durchlaufen lassen; deshalb konnte auch in 12) das doppelte Vorzeichen weggelassen werden.

Setzt man den eben gefundenen Werth von $2xy$ in 11) und 6), so ergiebt sich:

$$13)\qquad x^2+y^2=\sqrt{p^4+2p^2\varrho^2\cos 2\alpha+\varrho^4}$$

und

$$14)\qquad x^2-y^2=p^2+\varrho^2\cos 2\alpha,$$

wo die Quadratwurzel offenbar nur ihren positiven Werth vorstellen kann. — Aus 13) und 14) endlich geht hervor:

$$15)\qquad x^2=\tfrac{1}{2}\sqrt{p^4+2p^2\varrho^2\cos 2\alpha+\varrho^4}+\tfrac{1}{2}(p^2+\varrho^2\cos 2\alpha);$$

$$16)\qquad y^2=\tfrac{1}{2}\sqrt{p^4+2p^2\varrho^2\cos 2\alpha+\varrho^4}-\tfrac{1}{2}(p^2=\varrho^2\cos 2\alpha).$$

Diese Formeln gelten für alle Punkte der Ebene, den Punkt O, dessen lemniscatische Coordinaten $\varrho=p$ und $\alpha=\frac{\pi}{2}$ sind, nicht ausgenommen.

*) Poggendorff's Annalen Bd. CXX, S. 69.

Der Zusammenhang zwischen unsern lemniscatischen und den gewöhnlichen Polarcoordinaten spricht sich aus in den einfachen Beziehungen:

12*) $$r^2 \sin 2\varphi = \varrho^2 \sin 2\alpha,$$

14*) $$r^2 \cos 2\varphi = p^2 + \varrho^2 \cos 2\alpha,$$

welche sich aus 12) und 14) durch Substitution von $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ ergeben.

10. Aus 13) ergiebt sich sofort die Gleichung eines Kreises, welcher vom Anfangspunkt O aus mit dem Radius R beschrieben ist, für lemniscatische Coordinaten in folgender Gestalt:

17) $$\sqrt{p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4} = R^2.$$

Dem oben in §. 4 besprochenen Kreise kommt, weil für ihn $R = p$ ist, folgende einfachere Gleichung zu

18) $$\varrho^2 + 2p^2 \cos 2\alpha = 0.$$

Diese Gleichung würde, wenn man unter ϱ und α gewöhnliche Polarcoordinaten versteht, einer Lemniscate angehören, welche mit der Lemniscate 5) congruent, aber um 90^0 gegen sie gedreht ist, so dass ihre Pole, um p vom Anfangspunkte entfernt, nicht in die Abscissen- sondern in die Ordinatenaxe unseres ursprünglichen Orthogonalcoordinatensystems fallen. Denkt man sich jene Lemniscate 18) verzeichnet, und in ihr irgend einen Radius Vector gezogen, ferner durch die beiden Punkte, welche auf der Abcissenaxe um p beiderseits vom Anfangspunkte abstehen, eine gleichseitige Hyperbel construirt, welche jenen Radius Vector zur einen Asymptote hat; denkt man sich endlich um dieselben Punkte als Pole eine zweite Lemniscate construirt, deren Parameter ϱ jenem Radius Vector gleich ist, so ist der geometrische Ort der Durchschnittspunkte dieser letzteren Lemniscaten mit den zugehörigen Hyperbeln ein mit dem Radius p um den Anfangspunkt beschriebener Kreis.

Aus 14) erhalten wir leicht die lemniscatische Gleichung der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = m$$

in folgender Gestalt

$$\varrho^2 \cos 2\alpha = m - p^2.$$

Für gewöhnliche Polarcoordinaten ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) würde die Gleichung der nämlichen Hyperbel lauten:

$$r^2 \cos 2\varphi = m.$$

Einer gleichseitigen Hyperbel, deren Axen in unsere ursprünglich gewählten Coordinatenaxen fallen, entsprechen daher im lemniscatischen und im Polarcoordinatensystem Gleichungen von derselben Form. Aus diesem Verhalten lässt sich leicht ein dem vorigen analoger Satz ableiten.

Die gleichseitige Hyperbel

$$xy = m,$$

deren Asymptoten die Coordinatenaxen sind, hat vermöge 12) die lemniscatische Gleichung

20) $$\varrho^2 \sin 2\alpha = 2m;$$

ihre Polargleichung ist

$$r^2 \sin 2\varphi = 2m.$$

Die nämliche Gleichung 20) also gehört der ebenbenannten Hyperbel an, gleichviel ob wir unter ϱ und α lemniscatische oder Polarcoordinaten verstehen.

Aus diesem Ergebniss schliessen wir: Zieht man in einer gleichseitigen Hyperbel, welche die rechtwinkligen Coordinatenaxen zu Asymptoten hat, vom Anfangspunkt aus einen Radius Vector, zieht man ferner durch einen auf der Abscissen- (oder Ordinaten-) Axe beliebig angenommenen Punkt eine zweite gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymptote jener Radius Vector ist, und construirt man endlich um den genannten Punkt als den einen Pol und den Coordinatenanfang als Mittelpunkt eine Lemniscate, deren Parameter ϱ jenem Radius Vector gleich ist, so begegnen sich diese Lemniscate und die letztere Hyperbel in einem Punkte der ersteren Hyperbel.

11. Unternehmen wir es, die Gleichung der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

in lemniscatischen Coordinaten auszudrücken, indem wir die Werthe aus 15) und 16) in sie substituiren, so erhalten wir zunächst

$$(a^2+b^2)\sqrt{p^4+2p^2\varrho^2\cos 2\alpha+\varrho^4} = 2a^2b^2 + (a^2-b^2)(p^2+\varrho^2\cos 2\alpha).$$

Quadrirt man hier beiderseits und ordnet nach Potenzen von ϱ, so ergiebt sich

$$\varrho^4\left[(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\cos^2 2\alpha\right] + 2\varrho^2\cos 2\alpha\left[(a^2+b^2)^2p^2-2a^2b^2(a^2-b^2)\right.$$
$$\left.-(a^2-b^2)^2p^2\right] + 4a^2b^2p^4 - 4a^4b^4 - 4a^2b^2(a^2-b^2)p^2 = 0.$$

Wählt man jetzt die Brennpunkte der Ellipse zu Polen des Lemniscatensystems, indem man $p^2 = a^2 - b^2$ setzt, so zieht sich vorstehende Gleichung auf die einfachere

$$\varrho^4\left[(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\cos^2 2\alpha\right] + 4a^2b^2(a^2-b^2)\varrho^2\cos 2\alpha - 4a^4b^4 = 0$$

zurück, welche nach ϱ^2 aufgelöst

$$\varrho^2 = \frac{-2a^2b^2(a^2-b^2)\cos 2\alpha \pm 2a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\cos^2 2\alpha}$$

giebt. Hier kann nur das obere Zeichen gelten, weil das untere ϱ^2 negativ machen würde. Wir erhalten daher:

21) $$\left\{\begin{array}{l} \varrho^2 = \dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2\alpha} \\ \text{oder} \\ \varrho^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha} \end{array}\right.$$

als lemniscatische Gleichung der obigen Ellipse. Dieselbe Gleichung stellt aber, wenn wir unter ϱ und α gewöhnliche Polarcoordinaten verstehen,

ebenfalls eine Ellipse vor, welche mit der gegebenen congruent, aber um 90° gegen sie gedreht ist.

Aus diesem merkwürdigen Verhalten ziehen wir folgenden Satz: In einer Ellipse, deren grosse Axe in die Ordinatenaxe fällt, ziehe man einen beliebigen Halbmesser. Alsdann trage man die Excentricität der Ellipse zu beiden Seiten ihres Mittelpunktes auf die Abscissenaxe auf, und lege durch die beiden so bestimmten Punkte eine gleichseitige Hyperbel, welche jenen Halbmesser zur einen Asymptote hat. **Construirt man endlich um die** nämlichen Punkte als Pole eine Lemniscate, deren Parameter gleich dem genannten Halbmesser ist, so ist der geometrische Ort der Durchschnittspunkte der so construirten Hyperbeln und Lemniscaten eine mit der gegebenen congruente Ellipse, deren grosse Axe aber in die Abscissenlinie fällt, und deren Brennpunkte daher die Pole der Lemniscaten sind.

Transformirt man ebenso die Gleichung der Hyperbel

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

deren reelle Axe $2a$ in der Abscissenlinie liegt, indem man ihre Brennpunkte zu Polen der Lemniscatenschaar (d. h. $p^2 = a^2 + b^2$) nimmt, so erhält man ihre lemniscatische Gleichung:

$$22)\quad \left\{\begin{array}{l} \varrho^2 = \dfrac{2a^2b^2}{a^2 - b^2 - (a^2+b^2)\cos 2\alpha} \\ \text{oder} \\ \varrho^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha} \end{array}\right.$$

Unter ϱ und α wieder gewöhnliche Polarcoordinaten verstanden, würde diese Gleichung eine Hyperbel stellen, deren reelle Axe $2b$ in die Ordinatenaxe fällt, und welche mit der gegebenen gemeinschaftliche Asymptoten hat. Es wäre ein Leichtes, auch in diesem Falle einen dem obigen analogen Satz auszusprechen.

Von anderen krummen Linien sei nur noch die Lemniscate 4) §. 2 erwähnt, deren Orthogonalgleichung

$$(x^2+y^2)^2 - p^2(x^2-y^2) = 0$$

ist. Ihre lemniscatische Gleichung lautet

$$23)\quad \varrho^2 + p^2 \cos 2\alpha = 0$$

und würde für Polarcoordinaten eine mit der gegebenen congruente Lemniscate vorstellen, welche aber um 90° gegen sie gedreht ist. Man sieht, dass auch diese Gleichung einen dem oben für die Ellipse aufgestellten ähnlichen Satz enthält.

Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht und mit der positiven Abscissenaxe den Winkel φ bildet, ergiebt sich für lemniscatische Coordinaten in folgender Gestalt:

$$24)\quad \varrho^2 \sin 2(\alpha - \varphi) = p^2 \sin 2\varphi.$$

Dieselbe würde für Polarcoordinaten eine gleichseitige Hyperbel darstellen, deren eine Asymptote unsere Gerade selbst ist.

12. Um das Bogenelement ds_1 einer Lemniscate (ϱ) zu berechnen, schreiten wir längs derselben fort von dem Punkte (x, y), wo sie von der Hyperbel (α) getroffen wird, bis zu dem Punkte, wo sie der Hyperbel $(\alpha + d\alpha)$ begegnet; dabei gehen die Coordinaten x und y in $x+dx$ und $y+dy$ über, ϱ aber bleibt constant. Differentiirt man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen 1) und 6), so liefert die 6):

$$25)\qquad (y + x\, cotg\, 2\alpha)\, dy - (x - y\, cotg\, 2\alpha)\, dx = 2xy \cdot \frac{d\alpha}{sin^2 2\alpha}.$$

Aus 1) dagegen erhält man

$$y\,(x^2 + y^2 + p^2)\, dy + x\,(x^2 + y^2 - p^2)\, dx = 0.$$

Da aber jede Lemniscate von jeder Hyperbel rechtwinklig durchschnitten wird, so besteht die Beziehung

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x^2 + y^2 + p^2}{x^2 + y^2 + p^2} = \frac{y + x\, cotg\, 2\alpha}{x - y\, cotg\, 2\alpha}$$

vermöge welcher die vorhergehende Gleichung übergeht in

$$26)\qquad (x - y\, cotg\, 2\alpha)\, dy + (y + x\, cotg\, 2\alpha)\, dx = 0.$$

Werden nun die Gleichungen 25) und 26) quadrirt und addirt, so kommt

$$(dx^2 + dy^2)\,[(x - y\, cotg\, 2\alpha)^2 + (y + x\, cotg\, 2\alpha)^2] = \frac{4x^2 y^2\, d\alpha^2}{sin^4 2\alpha}$$

oder

$$(dx^2 + dy^2)\,(x^2 + y^2) = \frac{4x^2 y^2\, d\alpha^2}{sin^4 2\alpha}.$$

Setzt man hierin $dx^2 + dy^2 = ds^2$, und statt xy und $x^2 + y^2$ ihre Werthe aus 12) und 13), so erhält man das Bogenelement der Lemniscate

$$27)\qquad ds_1 = \frac{\varrho^2\, d\alpha}{(p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

wobei s_1 mit α gleichseitig wachsend oder abnehmend gedacht wird.

13. Das zwischen den beiden Hyperbeln (α_1) und (α_2) enthaltene Bogenstück s_1 einer Lemniscate (ϱ) ist demnach ausgedrückt durch das Integral

$$s_1 = \varrho^2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{(p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4)^{\frac{1}{2}}}$$

oder, wenn man $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2\alpha$ setzt, durch

$$28)\qquad s_1 = \frac{\varrho^2}{\sqrt{p^2 + \varrho^2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\left(1 - \frac{4p^2\varrho^2}{(p^2 + \varrho^2)^2} \sin^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die stets positive Grösse $\frac{4p^2\varrho^2}{(p^2+\varrho^2)^2}$ hat ihren grössten Werth 1 für $\varrho=p$, für jeden andern Werth von ϱ ist sie kleiner als 1, und es giebt immer zwei Werthe von ϱ, der eine $< p$, der andere $> p$, für welche sie den nämlichen Werth annimmt. Dem Werthe $\varrho=p$ entspricht die Lemniscate 5) in §. 2, welche sich in Form eines ∞ durch den Anfangspunkt hindurchschlingt. Sie umschliesst alle Lemniscaten erster Art, für welche $\varrho<p$ ist, und von denen jede in Form zweier getrennter geschlossener Curven die beiden Pole umgiebt; sie wird dagegen selbst wieder eingeschlossen von den Lemniscaten zweiter Art, für welche $\varrho>p$ ist, und von denen jede nur eine einzige geschlossene Curve darstellt. Nennen wir nun die Grösse $\frac{2p\varrho}{p^2+\varrho^2}$ den Modulus der Lemniscate, so giebt es in jedem Lemniscatensystem zwei gleichmodelige Lemniscaten, von denen die eine zur ersten, die andere zur zweiten Art gehört.

Setzt man

$$29)\qquad \frac{2p\varrho}{p^2+\varrho^2}=\sin\varphi$$

(φ heisse der Modelwinkel), so ist für die zur ersten Art gehörige der beiden gleichmodeligen Lemniscaten

$$\varrho_1=p\,tg\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

für die zur zweiten Art gehörige aber

$$\varrho_2=p\,cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

welche Werthe durch Auflösung der Gleichung 29) nach ϱ gefunden werden. Daraus folgt:

$$30)\qquad \varrho_1\varrho_2=p^2,$$

d. h. für je zwei gleichmodelige Lemniscaten desselben Systems ist der halbe Polabstand p die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Parametern.

Bezeichnen wir die zwei Geraden, welche von den beiden Polen nach irgend einem Punkte der ersten unserer gleichmodeligen Lemniscaten gezogen werden, mit r und r', so ist bekanntlich

$$rr'=\varrho_1^2.$$

Für die zweite gleichmodelige Lemniscate hat man, wenn R und R' die von den Polen nach irgend einem ihrer Punkte gezogenen Geraden bedeuten:

$$RR'=\varrho_2^2.$$

Multiplicirt man die beiden vorstehenden Gleichungen mit einander und berücksichtigt die 30), so findet man

$$31)\qquad rr'RR'=p^4,$$

d. h. wenn man von den beiden Polen nach je einem Punkte zweier gleichmodeligen Lemniscaten gerade Linien zieht, so ist das Product dieser vier Geraden constant, und zwar

gleich der vierten Potenz des halben Polabstandes. — Für die eine Lemniscate, deren Modelwinkel φ ist, hat man

$$\frac{\varrho_1^2}{\sqrt{p^2+\varrho_1^2}}=p\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, tg\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

für die andere

$$\frac{\varrho_2^2}{\sqrt{p^2+\varrho_2^2}}=p\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Folglich sind ihre zwischen den Hyperbeln (α_1) und (α_2) enthaltenen Bogenstücke, wenn der Kürze wegen

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{\sqrt[4]{1-\sin^2\varphi\sin^2\alpha}} \text{ mit } L$$

bezeichnet wird,

$$32)\quad \begin{cases} \text{für die erste} \;\ldots\; s_1=p\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, tg\,\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,L \\ \text{für die zweite} \;\ldots\; S_1=p\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,L. \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich:

$$S_1=s_1\,.\,cotg^3\tfrac{1}{2}\varphi$$

oder auch

$$33)\qquad s_1:S_1=\sin^3\tfrac{1}{2}\varphi:\cos^3\tfrac{1}{2}\varphi,$$

d. h. die zwischen den nämlichen beiden Hyperbeln enthaltenen Bogenstücke zweier gleichmodeliger Lemniscaten der ersten und zweiten Art verhalten sich zu einander wie die dritten Potenzen des Sinus und des Cosinus des halben Modelwinkels.

Dieser Satz gilt natürlich auch für die zwischen den Hyperbeln (0) und $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ enthaltenen Bogenstücke, d. h. für die Viertelslemniscaten, und darum auch für die ganzen Umfänge.

Durch Addition der beiden Gleichungen 32) findet man:

$$S_1+s_1=p\,.\,\frac{\cos^3\frac{1}{2}\varphi+\sin^3\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\,.\,L$$

und durch Subtraction

$$S_1-s_1=p\,.\,\frac{\cos^3\frac{1}{2}\varphi-\sin^3\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\,.\,L.$$

Setzt man nun

$$p\,.\,\frac{\cos^3\frac{1}{2}\varphi+\sin^3\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}=p_1\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, tg\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

und

$$p\,.\,\frac{\cos^3\frac{1}{2}\varphi+\sin^3\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}=p_2\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

woraus

$$p_1 = p\,(1 + cotg^2 \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$p_2 = p\,(1 + tg^2 \tfrac{1}{2}\varphi)$$

und

$$p_1 : p_2 = cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi : sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi$$

folgt, so erkennt man, dass die Summe der zwischen den Hyperbeln (α_1) und (α_2) enthaltenen Bogen zweier gleichmodeliger Lemniscaten gleich ist dem Bogen einer Lemniscate erster Art von gleichem Modul, aber mit dem Polabstand $2p_1$, oder gleich dem Bogen einer Lemniscate zweiter Art von gleichem Modul, aber mit dem Polarabstand $2p_2$, wenn diese Bogen zwischen den durch die neuen Pole gezogenen Hyperbeln (α_1) und (α_2) enthalten sind. Die neuen Polabstände verhalten sich ebenso wie die zu addirenden Bogen, d. h. es ist

$$p_1 : p_2 = S_1 : s_1.$$

Setzt man ferner

$$p \,.\, \frac{cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi - sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi}{sin \tfrac{1}{2}\varphi \; cos \tfrac{1}{2}\varphi} = p_1' sin \tfrac{1}{2}\varphi \; tg \tfrac{1}{2}\varphi$$

und

$$p \,.\, \frac{cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi - sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi}{sin \tfrac{1}{2}\varphi \; cos \tfrac{1}{2}\varphi} = p_2' \; cos \tfrac{1}{2}\varphi \; cotg \tfrac{1}{2}\varphi$$

woraus

$$p_1' = p\,(cotg^2 \tfrac{1}{2}\varphi - 1)$$
$$p_2' = p\,(1 - tg^2 \tfrac{1}{2}\varphi)$$

und

$$p_1' : p_2' = cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi : sin \tfrac{1}{2}\varphi$$

folgt, so sieht man, wie auch die Differenz der zwischen den Hyperbeln (α_1) und (α_2) enthaltenen Bogen zweier gleichmodeliger Lemniscaten ausdrückbar ist entweder durch den Bogen einer Lemniscate erster Art mit dem Polabstand $2p_1'$, oder den Bogen einer Lemniscate zweiter Art mit dem Polabstand $2p_2'$, wenn diese neuen Lemniscaten den gleichen Modul haben wie die gegebenen, und die begrenzenden Hyperpeln ebenfalls den Werthen (α_1) und (α_2) entsprechen. Auch hier verhalten sich die neuen Polabstände so, wie die zu subtrahirenden Lemniscatenbogen.

Wenn man in den Gleichungen 32) ϱ und p mit einander vertauscht, so erleidet weder der Winkel φ noch das Integral L irgend eine Aenderung, nur der Factor p verwandelt sich bei der ersten in ϱ_1, bei der zweiten in ϱ_2. Die so erhaltenen neuen Gleichungen

$$s_1' = \varrho_1 \, sin \tfrac{1}{2}\varphi \; tg \tfrac{1}{2}\varphi \,.\, L$$
$$S_1' = \varrho_2 \, cos \tfrac{1}{2}\varphi \; cotg \tfrac{1}{2}\varphi \,.\, L$$

stellen immer noch gleichmodelige Lemniscatenbogen erster und zweiter Art vor, welche aber verschiedenen Systemen angehören, deren Polabstände $2\varrho_1$ und $2\varrho_2$ sind. Zwischen diesen neuen Bogen und den früheren finden folgende Beziehungen statt:

$$\frac{s_1'}{s} = \frac{\varrho_1}{p} = tg\,\tfrac{1}{2}\varphi; \quad \frac{S_1'}{S} = \frac{\varrho_2}{p} = cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$s_1' S_1' = s_1 S_1.$$

14. Das Integral

$$L = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt[4]{1 - k^2 \sin^2\alpha}}, \tag{34}$$

wo k den Model $\frac{2p\varrho}{p^2+\varrho^2}$ vorstellt, lässt sich durch geeignete Substitutionen*) auf elliptische Integrale erster Gattung reduciren. Setzt man nämlich zuerst $\sqrt[4]{1-k^2\sin^2\alpha} = \xi$, oder $\sin^2\alpha = \frac{1-\xi^4}{k^2}$, so erhält man $\cos^2\alpha = \frac{\xi^4-(1-k^2)}{k^2} = \frac{\xi^4-k'^2}{k^2}$, wo $1-k^2=k'^2$ gesetzt wurde, und das transformirte Integral ist:

$$L = -\int \frac{2\xi^2\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^4)(\xi^4-k'^2)}}.$$

Hier ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen:

$$(1-k'^2)\,\xi^4 - k'^2 - \xi^8 = (1+k')^2\xi^4 - (k'+\xi^4)^2.$$

Macht man jetzt $k'+\xi^4 = 2\xi^2\zeta$, so hat man zunächst:

$$L = -\int \frac{2\,d\xi}{\sqrt{(1+k')^2-4\zeta^2}}.$$

Aus der zwischen ξ und ζ festgesetzten Relation zieht man aber

$$\xi^2 = \zeta + \sqrt{\zeta^2-k'}$$
$$\xi\sqrt{2} = \sqrt{\zeta+\sqrt{k'}} + \sqrt{\zeta-\sqrt{k'}}$$

also

$$L = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta-\sqrt{k'}}\,.\sqrt{(1+k')^2-4\zeta^2}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta+\sqrt{k'}}\,.\sqrt{(1+k')^2-4\zeta^2}} = L'+L''.$$

Um das erstere dieser beiden Integrale zu erhalten, sei $\zeta = u^2+\sqrt{k'}$; dann ist

$$L' = -\int \frac{\sqrt{2}\,.\,du}{\sqrt{(1+\sqrt{k'})^2+2u^2}\,.\sqrt{(1-\sqrt{k'})^2-2u^2}}.$$

Da, wie man sieht, $\frac{1}{2}(1-\sqrt{k'})^2$ die Grenze von u^2 ist, setzen wir $u\sqrt{2} = (1-\sqrt{k'})\cos\psi$, und erhalten:

$$L' = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{2(1+k')-(1-\sqrt{k'})^2\sin^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+k')}}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2(1+k')}}\,.\,F(\lambda,\psi),$$

---

*) *Legendre, traité des fonctions elliptiques, chap. XXVII.*

wo

$$\lambda^2 = \frac{(1-\sqrt{k'})^2}{2(1+k')}$$

ist.

Was das zweite Integral L'' betrifft, so setzen wir, ähnlich wie oben, $\zeta = v^2 - \sqrt{k'}$, und erhalten zunächst:

$$L'' = -\int \frac{\sqrt{2}.\,dv}{\sqrt{(1-\sqrt{k'})^2 + 2v^2}.\sqrt{(1+\sqrt{k'})^2 - 2v^2}}.$$

Wird nun $v\sqrt{2} = (1+\sqrt{k'})\cos\chi$, $\lambda'^2 = \frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2(1+k')}$ gemacht, so hat man

$$L'' = \frac{1}{\sqrt{2(1+k')}}\int_0^\chi \frac{d\chi}{\sqrt{1-\lambda'^2 \sin^2\chi}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+k')}}.F(\lambda',\chi).$$

Die Model λ und λ' der beiden elliptischen Integrale sind complementär, d. h. es ist $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$. Während der Modul k der Lemniscate alle Werthe von 0 bis 1, sein Complement k' demnach alle Werthe von 1 bis 0 durchläuft, geht λ von 0 bis zu seinem Grenzwerth $\sqrt{\frac{1}{2}}$, folglich λ' von 1 bis $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Da oben $k = \sin\varphi$ gesetzt wurde, so ist $k' = \cos\varphi$, und

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{\cos\varphi}}{2\cos\frac{1}{2}\varphi.}.$$

Macht man nun

$$tg^2\tfrac{1}{2}\varphi = \sin\varphi_0,$$

so wird

$$\lambda = \sin\tfrac{1}{2}\varphi_0 \text{ und } \lambda' = \cos\tfrac{1}{2}\varphi_0.$$

Die Amplituden ψ und χ bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\cos\psi = \frac{\xi^2 - \sqrt{k'}}{\xi(1-\sqrt{k'})} \text{ und } \cos\chi = \frac{\xi^2 + \sqrt{k'}}{\xi(1+\sqrt{k'})}$$

oder

$$\cos\psi = \frac{(\lambda'+\lambda)\xi^2 - (\lambda'-\lambda)}{2\lambda\xi} \text{ und } \cos\chi = \frac{(\lambda'+\lambda)\xi^2 + (\lambda'-\lambda)}{2\lambda'\xi},$$

wo ξ statt $\sqrt[4]{1-k^2\sin^2\alpha}$ steht. Für $\alpha = 0$ ist $\xi = 1$, folglich sowohl $\psi = 0$, als auch $\chi = 0$. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\xi = \sqrt{k'}$ erhält man $\psi = \pi$ und $\chi = 0$. Die Amplitude χ verschwindet also für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Zwischen diesen beiden Werthen erreicht sie ein Maximum, nämlich wenn $\xi = \sqrt[4]{k'}$, d. h. $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+k'}$, $\cos^2\alpha = \frac{k'}{1+k'}$, $cotg^2\alpha = k' = \cos\varphi$ ist. Für den nämlichen Werth von α wird die andere Amplitude $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Eliminirt man die Grösse ξ aus den beiden obigen Gleichungen für $\cos\psi$ und $\cos\chi$, so erhält man die einfache Beziehung:

$$\frac{\sin\psi}{\sin\chi}=\frac{\lambda'}{\lambda},$$

d. h. in den beiden elliptischen Integrale, welche in den Ausdruck für den Lemniscatenbogen eingehen, verhalten sich die Amplitudensinus verkehrt wie die entsprechenden Modul.

Um die Amplituden ψ und χ bequem berechnen zu können, setzen wir $k\sin\alpha=\sin\varphi\sin\alpha=\sin\vartheta$, woraus $\xi^2=\cos\vartheta$; ferner $\sqrt{k'}=\sqrt{\cos\varphi}=\cos\varphi'$; dann wird

$$\cos\psi=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\vartheta')\sin\frac{1}{2}(\varphi'-\vartheta)}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi'\sqrt{\cos\vartheta}}, \quad \cos\chi=\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'+\vartheta)\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\vartheta)}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi'\sqrt{\cos\vartheta}}.$$

Zur Berechnung der Lemniscatenbogen s_1 und S_1 können wir daher das folgende System von Gleichungen anwenden:

$$35)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin\varphi_0=tg^2\frac{1}{2}\varphi \quad \lambda=\sin\frac{1}{2}\varphi_0 \quad \lambda'=\cos\frac{1}{2}\varphi_0 \\ \cos\varphi'=\sqrt{\cos\varphi} \quad \sin\vartheta=\sin\varphi\sin\alpha \\ \cos\psi=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\varphi'-\vartheta)}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi'\sqrt{\cos\vartheta}} \qquad \dfrac{\sin\psi}{\sin\chi}=\dfrac{\lambda'}{\lambda} \\ \cos\chi=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'+\vartheta)\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\vartheta)}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi'\sqrt{\cos\vartheta}} \\ s_1=\dfrac{p}{2}\,tg^2\frac{1}{2}\varphi\,[F(\lambda,\psi)+F(\lambda',\chi)] \\ S_1=\dfrac{p}{2}\,cotg\,\frac{1}{2}\varphi\,[F(\lambda,\psi)+F(\lambda',\chi)] \end{array}\right.$$

wo die Lemniscatenbogen s_1 und S_1 von $\alpha=0$ an gerechnet sind. Weil für $\alpha=\frac{\pi}{2}$ die Amplitude χ verschwindet und $\psi=\pi$ wird, so erhalten wir für die Lemniscatenquadranten σ und Σ die einfacheren Ausdrücke:

$$36)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma=p\,tg^2\frac{1}{2}\varphi.F'(\lambda) \\ \Sigma=p\,cotg\,\frac{1}{2}\varphi.F'(\lambda)' \end{array}\right.$$

wo $F'(\lambda)$, nach Legendre's Bezeichnungsart, das vollständige elliptische Integral erster Gattung vorstellt.

Wir erkennen aus diesen Formeln, dass die **Summe zweier elliptischer Integrale erster Gattung, deren Model complementär sind, und deren Amplitudensinus sich umgekehrt verhalten wie die zugehörigen Model, immer durch den Bogen einer Lemniscate erster oder zweiter Art dargestellt werden kann; ferner, dass ein vollständiges Integral erster Gattung, dessen Model kleiner als $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, sich stets durch den Quadranten einer Lemniscate erster oder zweiter Art darstellen lässt.**

15. Die obigen Formeln gelten auch noch, wenn $k=1$ oder $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ist; alsdann hat man $\lambda=\lambda'=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos\psi=\cos\chi=\sqrt{\cos\alpha}$ oder $\sin\psi=\sin\chi=\sqrt{2}.\sin\frac{1}{2}\alpha$. Der Lemniscatenbogen LM (Fig. 1) wird demnach ausgedrückt sein durch

37) $\quad s_1=p.F(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi)$, wo $\sin\psi=\sqrt{2}.\sin\frac{1}{2}\alpha$.

Berechnet man den Bogen s_1' der nämlichen Lemniscate unter Anwendung gewöhnlicher Polarcoordinaten aus ihrer Polargleichung 5) so findet man:

$$s_1'=\int_0^\beta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\beta}\right)^2+r^2}\,.d\beta=p\sqrt{2}\int_0^\beta\frac{d\beta}{\sqrt{1-2\sin^2\beta}}=p\int_0^\psi\frac{d\psi'}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi'}},$$

wo die letztere Umformung durch die Substitution $\sin\psi'=\sqrt{2}.\sin\beta$ bewerkstelligt wurde. Wir erhalten daher für den Lemniscatenbogen, welcher zwischen dem Scheitel L und der Geraden liegt, die mit der Abscissenaxe den Winkel β einschliesst, folgenden Ausdruck:

38) $\quad s_1'=p.F(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi')$, wo $\sin\psi'=\sqrt{2}.\sin\beta$.

Die Ausdrücke 37) und 38) werden aber einander gleich, wenn man $\beta=\frac{1}{2}\alpha$ setzt. Daraus ersehen wir, dass die Hyperbel α (AM Fig. 1) und die Gerade $y=x\,tg\,\frac{1}{2}\alpha\,(OM)$ die in Rede stehende Lemniscate im nämlichen Punkte M schneiden. Dieser Satz lässt sich auch in folgender Weise aussprechen. Nimmt man auf der Abscissenaxe OX einen beliebigen Punkt A an, und legt durch denselben eine gleichseitige Hyperbel, welche die Gerade OP zur Asymptote hat; zieht man ferner die Halbirungslinie OM des Winkels POX, so ist der geometrische Ort der Durchschnittspunkte der so construirten Hyperbeln mit den zugehörigen Halbirungslinien eine durch O gehende Lemniscate, welche den Punkt A zum Pole hat.

Von der Wahrheit dieses Satzes kann man sich auch leicht dadurch überzeugen, dass man aus der Gleichung der Hyperbel

$$x^2-y^2-2xy\,cotg\,2\alpha=p^2$$

und der Gleichung der Geraden

$$y=x\,tg\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

den Winkel α eliminirt, man erhält so die Orthogonalgleichung jener Lemniscate.

Am einfachsten aber gestaltet sich der Beweis dieses Satzes, wenn man die lemniscatische Gleichung der Hyperbel, deren eine Asymptote den Winkel φ mit des Abscissenaxe bildet, nämlich

$$\alpha=\varphi$$

combinirt mit der lemniscatischen Gleichung der Geraden, welche mit der Abscissenlinie den Winkel $\frac{1}{2}\varphi$ einschliesst, nämlich mit (vergl. §. 11)

$$\varrho^2\sin 2(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi)=p^2\sin\varphi;$$

man erhält sogleich

$$\varrho = p,$$

d. i. die lemniscatische Gleichung unserer Lemniscate.

16. Schreiten wir längs einer Hyperbel des Systems 6) fort, von dem Punkte (x, y), wo sie von der Lemniscate (ϱ) geschnitten wird, bis zu dem Punkte $(x+dx, y+dy)$, wo sie mit der Lemniscate $(\varrho+d\varrho)$ zusammentrifft, so haben wir die Gleichungen 1) und 6) unter der Annahme zu differentiiren, dass α constant sei. Wir erhalten aus 1)

39) $$y(p^2+x^2+y^2)\,dy - x(p^2-x^2-y^2)\,dx = \varrho^3 d\varrho$$

und aus 6):

$$(y+x \cot g\, 2\alpha)\,dy - (x - y \cot g\, 2\alpha)\,dx = 0,$$

welche letztere Gleichung aber vermöge der Beziehung

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x^2+y^2-p^2}{x^2+y^2+p^2} = \frac{y+x \cot g\, 2\alpha}{x-y \cot g\, 2\alpha}$$

in folgende Form

40) $$x(p^2-x^2-y^2)\,dy + y(p^2+x^2+y^2)\,dx = 0$$

gebracht werden kann. Addirt man die Quadrate der Gleichungen 39) und 40), so erhält man

$$(dx^2+dy^2)\,[y^2(p^2+x^2+y^2)^2 + x^2(p^2-x^2-y^2)^2] = \varrho^6 d\varrho^2.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} & y^2(p^2+x^2+y^2)^2 + x^2(p^2-x^2-y^2)^2 \\ &= y^2[p^4+2p^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2] + x^2[p^4-2p^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2] \\ &= p^4(x^2+y^2) + 2p^2(x^2+y^2)(y^2-x^2) + (x^2+y^2)^3 \\ &= (x^2+y^2)\,[p^4+2p^2(y^2-x^2)+(x^2+y^2)^2] = (x^2+y^2)\,\varrho^4. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir daher das Bogenelement $\sqrt{dx^2+dy^2}$ der Hyperbel mit ds_2, so erhalten wir

$$ds_2 = \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

oder mit Berücksichtigung von 13)

41) $$ds_2 = \frac{\varrho\, d\varrho}{(p^4+2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4)^{\frac{1}{4}}}.$$

Das zwischen zwei beliebigen Lemniscaten (ϱ_1) und (ϱ_2) enthaltene Hyperbelstück ist demnach ausgedrückt durch das Integral

42) $$s_2 = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\varrho\, d\varrho}{(p^4+2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4)^{\frac{1}{4}}},$$

welches leicht auf elliptische Integrale zurückgebracht werden kann. Setzt man nämlich

43) $$p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4 = \frac{p^4 \sin^2 2\alpha}{\cos^4 \psi},$$

so erhält man

$$s_2 = \frac{p\sqrt{\sin 2\alpha}}{\sqrt{2}} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}}.$$

Das letzere Integral lässt sich durch eine bekannte Reductionsformel umformen, wie folgt:

$$\int \frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}} = -\int \frac{\cos^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}} + 2\, tg\,\psi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}$$

$$= \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}} - 2\int\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}\,.\,d\psi + 2\, tg\,\psi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}.$$

Der gesuchte Hyperbelbogen wird demnach ausgedrückt durch

$$44)\quad s_2 = \frac{p\sqrt{\sin 2\alpha}}{\sqrt{2}}\left[F(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi_2) - F(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi_1)\right] - p\sqrt{2\sin 2\alpha}\left[E(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi_2)\right.$$
$$\left. - E(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi_1)\right] + p\sqrt{2\sin 2\alpha}\left[tg\,\psi_2\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\psi_2} - tg\,\psi_1\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\psi_1}\right],$$

wo die Grenzen ψ_1 und ψ_2 aus 43) für die entsprechenden Werthe von ϱ_1 und ϱ_2 zu bestimmen sind.

Führt man in dem von elliptischen Integralen freien Gliede statt der Grenzen ψ_1 und ψ_2 ihre in ϱ und α ausgedrückten Werthe wirklich ein, indem man zugleich $\varrho_1 = 0$ und $\varrho_2 = \varrho$ nimmt, so erhält man zunächst aus 43), wenn man der Kürze wegen

$$p^4 + 2p^2\varrho^2\cos 2\alpha + \varrho^4 = R^4$$

setzt:

$$\cos\psi_2 = \frac{p\sqrt{\sin 2\alpha}}{R},$$

$$tg\,\psi_2 = \frac{\sqrt{R^2 - p^2\sin 2\alpha}}{p\sqrt{\sin 2\alpha}},$$

$$\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\psi_2} = \frac{\sqrt{R^2+p^2\sin 2\alpha}}{R\sqrt{2}}$$

also

$$p\sqrt{2\sin 2\alpha}\,.\,tg\,\psi_2\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\psi_2} = \frac{p^2\cos 2\alpha + \varrho^2}{R}$$

woraus für $\varrho = 0$

$$\cos\psi_1 = \sqrt{\sin 2\alpha}$$

und

$$p\sqrt{\sin 2\alpha}\,.\,tg\,\psi_1\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\psi_1} = p\cos 2\alpha$$

hervorgeht. Die Länge eines der Strahlen, von denen §. 7 die Rede war, ist demnach ausgedrückt durch

$$44^a)\quad s_2' = \frac{p\sqrt{\sin 2\alpha}}{\sqrt{2}}\left[F(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi_2) - F(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi_1)\right] - p\sqrt{2\sin 2\alpha}\left[E(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi_2)\right.$$
$$\left. - E(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\psi_1)\right] + \frac{p^2\cos 2\alpha + \varrho^2}{R} - p\cos 2\alpha.$$

Diese Formel gilt auch noch für den geradlinigen Strahl AX ($\alpha = 0$ und für den geknickten Strahl $AOY \left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$; der erstere ist unter allen Strahlen der kürzeste, der letztere der längste, wie aus 42) leicht nachgewiesen werden kann.

Wie wir aus Gleichung 23) wissen, hat ϱ_1^2 im Scheitel C (Fig. 2) der Hyperbel den Werth

$$\varrho_1^2 = -p^2 \cos 2\alpha.$$

Substituirt man diesen Werth statt ϱ in die Gleichung 43), so erhält man

$$\cos \psi_1 = 1, \text{ also } \psi_1 = 0$$

und wir finden für den vom Scheitel C an gerechneten Hyperbelbogen CM (Fig. 2):

$$45^*) \qquad s_2'' = \frac{p\sqrt{\sin 2\alpha}}{\sqrt{2}} \cdot F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi) - p\sqrt{2 \sin 2\alpha} \cdot E(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi) + \frac{p^2 \cos 2\alpha + \varrho^2}{R}.$$

Die geometrische Bedeutung des Winkels ψ ergiebt sich leicht in folgender Weise. Nach Gleichung 13) in §. 9 ist R oder $(p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4)$ nichts anderes als die Entfernung des Punktes M (x, y) der Hyperbel vom Coordinatenanfang, oder ihr nach M gezogener Halbmesser $(= R)$, während $p\sqrt{\sin 2\alpha}$ nach Gleichung 4) §. 2 ihre Halbaxe vorstellt. Die Gleichung 43 schreibt sich daher auch so:

$$R \cos \psi = p\sqrt{\sin 2\alpha}.$$

Beschreibt man daher vom Mittelpunkt O aus mit der Halbaxe OC (Fig. 2) als Radius einen Kreis, und über $OM = R$ als Durchmesser einen Halbkreis ONM, und zieht nach dem Durchschnittspunkte N den Radius ON, so ist der Winkel MON gleich ψ, denn man hat

$$R \cos MON = ON = OC = p\sqrt{\sin 2\alpha}.$$

17. Um das Bogenelement ds einer beliebigen Curve zu berechnen, deren Gleichung in lemniscatischen Coordinaten gegeben ist, müsste man die Gleichungen 1) und 6) unter der Voraussetzung differentiiren, dass ϱ und α beide gleichzeitig variabel sind, aus den so erhaltenen Differentialgleichungen 39) und 25) dx und dy bestimmen und die gefundenen Werthe in die Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

einsetzen. Erinnern wir uns aber, dass jede unserer Lemniscaten von jeder Hyperbel unter rechtem Winkel geschnitten wird, dass sonach ds die Hypotenuse des unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten ds_1 und ds_2 sind, so erhalten wir auf kürzerem Wege

$$ds = \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2},$$

also

$$45)\quad ds = \frac{\sqrt{\varrho^2 d\varrho^2 + \varrho^4 d\alpha^2}}{(p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{\left(\varrho \frac{d\varrho}{d\alpha}\right) + \varrho^4} . d\alpha}{(p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4)^{\frac{1}{4}}}.$$

Obgleich für $\varrho = p$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d. h. im Punkte O, der Nenner dieses Differentials verschwindet, so bleibt dasselbe dennoch auch in diesem Falle unendlich klein, und die Formel 45), ebenso wie die als specielle Fälle (wenn ϱ=Const. oder α=Const.) in ihr enthaltenen 27) und 42) behauptet ihre Geltung.

Man erkennt auch leicht, dass die Formel 45), wie es sein muss, für $p = 0$ in die entsprechende für gewöhnliche Polarcoordinaten übergeht.

18. Um einige Anwendungen der Gleichung 45) zu zeigen, werde zunächst die Länge des Stückes der Geraden

$$y = x \operatorname{tg} \varphi$$

gesucht, welches sich vom Anfangspunkt, d. h. von der Hyperbel $\frac{\pi}{2}$ bis zur Hyperbel (α), wo $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, erstreckt. Aus der lemniscatischen Gleichung dieser Geraden, nämlich

$$\varrho^2 = \frac{p^2 \sin 2\varphi}{\sin 2(\alpha - \varphi)},$$

in welcher $\varphi < \alpha$ zu denken ist, finden wir

$$\sqrt{\left(\varrho \frac{d\varrho}{d\alpha}\right)^2 + \varrho^4} = \frac{p^2 \sin 2\varphi}{\sin 2(\alpha - \varphi)}$$

und

$$(p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4)^{\frac{1}{4}} = p \sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\alpha - \varphi)}},$$

folglich:

$$s = p \sin 2\varphi \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha . \sin^3 2(\alpha - \varphi)}}$$

Nun ist aber, wie wir aus 13) §. 9 wissen, die gesuchte Länge durch die gerade vorausgehende Gleichung bereits ausgedrückt, und wir erhalten demnach:

$$p \sin 2\varphi \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha \sin^3 2(\alpha - \varphi)}} = p \sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\alpha - \varphi)}}$$

oder:

$$46)\qquad \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha \,.\, \sin^3 2(\alpha - \varphi)}} = \frac{1}{\sin 2\varphi}\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\alpha - \varphi)}}$$

ein Integral, welches zwar auch auf anderem Wege gefunden werden k[an]n, aber doch auf den ersten Blick Schwierigkeiten darzubieten scheint.

19. Für den Kreis 18) vom Radius p findet man aus

$$18)\qquad \varrho^2 = -2p^2 \cos 2\alpha$$

nach der Reihe

$$\varrho \frac{d\varrho}{d\alpha} = 2p^2 \sin 2\alpha,$$

$$\left(\varrho \frac{d\varrho}{d\alpha}\right)^2 + \varrho^4 = 4p^4,$$

$$p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4 = p^4$$

$$ds = 2p\, d\alpha;$$

folglich ist der zwischen den hyperbolischen Strahlen (α_1) und (α_2) enth[al]tene Kreisbogen

$$47)\qquad s = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} 2p\, d\alpha = 2p(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Nun ist aber $p(\alpha_2 - \alpha_1)$ der zwischen den Asymptoten der Hyperb[eln] (α_1) und (α_2) enthaltene Bogen desselben Kreises. Construirt man d[a]her durch einen Punkt im Umfange eines Kreises zwei gleich seitige Hyperbeln, deren gemeinsamer Mittelpunkt mit dem jenigen des Kreises zusammenfällt, so ist der zwischen ihn[en] enthaltene Kreisbogen doppelt so gross als der zwische[n] ihren Asymptoten enthaltene.

20. Wir suchen ferner den zwischen dem Endpunkt der grossen Ax[e] und der Hyperbel (α) enthaltenen Bogen der Ellipse, deren lemniscatisch[e] Gleichung nach §. 11

$$\varrho^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\alpha}$$

ist, und finden nach und nach

$$\varrho \frac{d\varrho}{d\alpha} = \frac{2a^2b^2(a^2 - b^2)\sin 2\alpha}{[a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\alpha]^2}$$

$$\left(\varrho \frac{d\varrho}{d\alpha}\right)^2 + \varrho^4 = \frac{8a^4b^4[a^4 + b^4 + (a^4 - b^4)\cos 2\alpha]}{[a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\alpha]^4};$$

ferner, unter Berücksichtigung, dass $p^2 = a^2 - b^2$ ist:

$$p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4$$

$$= (a^2 - b^2)^2 + \frac{4a^2b^2(a^2 - b^2)\cos 2\alpha}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\delta} + \frac{4a^4b^4}{[a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\alpha]^2}$$

$$= \frac{a^4 + b^4 + (a^4 - b^4)\cos 2\alpha]^2}{[a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\alpha]^2};$$

folglich

$$ds = \frac{2a^2b^2\sqrt{2}.\,d\alpha}{[a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2\alpha]^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2 b^2\, d\alpha}{[a^2-(a^2-b^2)\sin^2\alpha]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{b^2\, d\alpha}{a\,(1-\varepsilon^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

wo $\frac{a^2-b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ gesetzt wurde. Nun ist aber

$$\int\frac{d\alpha}{(1-\varepsilon^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\int\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}.\,d\alpha - \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}}.$$

Der gesuchte Ellipsenbogen zwischen 0 und α ist demnach

$$a\,E\,(\varepsilon,\,\alpha) - \frac{a\,\varepsilon^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}}. \tag{48}$$

In Figur 3 ist dieser Bogen durch MS vorgestellt. Beschreiben wir nun vom Mittelpunkt der Ellipse aus mit der grossen Halbaxe als Radius einen Kreis, und fällen von dem Punkt Q, wo dieser von der andern Asymptote ($\alpha - 90^0$) oder OQ der Hyperbel (α) getroffen wird, eine Senkrechte auf die Abscissenlinie, so ist der zwischen dem Endpunkt N der kleinen Axe und dieser Senkrechten enthaltene Ellipsenbogen NP bekanntlich ausgedrückt durch $a\,E\,(\varepsilon,\,\alpha)$. Der Unterschied der beiden Ellipsenbogen NP und MS ist daher gleich der geradlinigen Strecke

$$l = \frac{a\,\varepsilon^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}}.$$

Um diese Strecke zu construiren, beschreiben wir vom Brennpunkt A aus mit dem Radius a einen Kreisbogen, welcher die Asymptote OT (α) in T trifft; parallel mit AT ziehen wir durch den Mittelpunkt OV und fällen vom Brennpunkte A aus auf OT die Senkrechte AV, deren Fusspunkt mit U bezeichnet werde. Alsdann ist

$$OU = a\,\varepsilon\cos\alpha$$
$$AU = a\,\varepsilon\sin\alpha$$
$$UT = a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}$$

und wir erhalten aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OUV und TUA:

$$VU : a\,\varepsilon\cos\alpha = a\,\varepsilon\sin\alpha : a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}.$$

Folglich ist

$$VU = \frac{a\,\varepsilon^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}} = l$$

die gesuchte Strecke.

Die rechtwinkeligen Coordinaten x und y des Durchschnittspunktes S der Hyperbel (α) mit der Ellipse erhält man aus 15) und 16), wenn man daselbst

$$p^2 = a^2 - b^2 \text{ und } \varrho^2 = \frac{2\,a^2 b^2}{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2\alpha}$$

einsetzt, nach einigen leichten Umformungen, wie folgt:

$$x = \frac{a^2 \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}},$$

$$y = \frac{b^2 \sin \alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}}.$$

In diesen Formeln stellt die Quadratwurzel blos ihren positiven Werth vor, indem durch den Zähler, vermöge der in §. 7 gemachten Annahmen, für das richtige Vorzeichen schon gesorgt ist.

Bezeichnen wir nun mit τ den Winkel, welchen die Berührungslinie im Punkte S der Ellipse, wo diese von dem Hyperbelaste (α) getroffen wird, mit der Abscissenlinie bildet, so ist

$$tg\, \tau = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

oder, nach Einsetzung obiger Werthe von x und y:

$$tg\, \tau = -\cot g\, \alpha,$$

d. h. die Tangente der Ellipse im Punkte S, wo sie vom Hyperbelaste AS geschnitten wird, steht senkrecht auf der zugehörigen Asymptote OT, und läuft sonach parallel mit der anderen Asymptote OQ. Im Ganzen sind vier Schnittpunkte vorhanden, einer in jedem Quadranten; die vier Tangenten in diesen Punkten bilden demnach ein der Ellipse umschriebenes Rechteck. Wir können dieses Ergebniss auch in folgender Weise aussprechen: Zieht man durch die Brennpunkte eines Systems confocaler Ellipsen irgend eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt in denjenigen der Ellipsen fällt, so sind die Tangenten der Ellipsen in den Punkten, wo sie von der Hyperbel geschnitten werden, parallel mit deren Asymptoten.

Suchen wir jetzt das Stück SW der Tangente, welches zwischen dem Berührungspunkt S und dem Fusspunkt W der vom Centrum auf sie gefällten Senkrechten OW liegt, d. h. die Projection des Halbmessers OS auf die Tangente, so finden wir:

$$SW = x \sin \alpha - y \cos \alpha = \frac{(a_2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}} = \frac{a \varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\alpha}} = l.$$

Wir finden also SW gleich der oben construirten geradlinigen Strecke. Der obige Satz von der Differenz der Ellipsenbogen NP und MS kann daher jetzt folgendermassen ausgesprochen werden: Zieht man vom Mittelpunkt der Ellipse eine Gerade gleich der grossen Halbaxe, und fällt aus ihrem Endpunkte eine Senkrechte auf die grosse Axe, so ist der zwischen dem Perpendikel und dem nächsten Endpunkt der kleinen Axe enthaltene Bogen gleich der Summe des zwischen dem Endpunkt der grossen Axe und dem Berührungspunkt der mit jener Geraden parallelen Tangente ent-

haltenen Bogens, und der Projection des Berührungshalbmessers auf die Tangente.

21. Um den Bogen der Hyperbel zu bestimmen, finden wir aus ihrer lemniscatischen Gleichung

$$22)\qquad \varrho^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2 - b^2 - (a^2+b^2)\cos 2\alpha}$$

zunächst

$$\varrho\frac{d\varrho}{d\alpha} = -\frac{2a^2b^2(a^2+b^2)\sin 2\alpha}{[a^2 - b^2 - (a^2+b^2)\cos 2\alpha]^2};$$

$$\left(\varrho\frac{d\varrho}{d\alpha}\right)^2 + \varrho^4 = \frac{8a^4b^4[a^4+b^4-(a^4-b^4)\cos 2\alpha]}{[a^2-b^2-(a^2+b^2)\cos 2\alpha]^4}.$$

Weil $p^2 = a^2 + b^2$ ist, ergiebt sich weiter

$$p^4 + 2p^2\varrho^2\cos 2\alpha + \varrho^4 = \frac{[a^4+b^4-(a^4-b^4)\cos 2\alpha]^2}{[a^2-b^2-(a^2+b^2)\cos 2\alpha]^2}.$$

Daher ist

$$ds = \frac{2a^2b^2\sqrt{2}\,.\,d\alpha}{[a^2-b^2-(a^2+b^2)\cos 2\alpha]^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2b^2d\alpha}{[(a^2+b^2)\sin^2\alpha - b^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man hierin

$$(a^2+b^2)\sin^2\alpha - b^2 = a^2\cos^2\psi$$

oder

$$49)\qquad \sqrt{a^2+b^2}\,.\cos\alpha = a\sin\psi,$$

so hat man

$$ds = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\psi}}$$

oder, wenn man $\frac{a^2}{a^2+b^2} = \varepsilon^2$ setzt

$$ds = -\frac{b^2\varepsilon}{a}\cdot\frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\psi}}.$$

Damit der Durchschnittspunkt des Hyperbelastes (α) mit der gegebenen Hyperbel reell sei, muss, wie man aus der Gleichung der letzteren, nämlich aus

$$22)\qquad \varrho = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha}}$$

erkennt,

$$tg^2\alpha > \frac{b^2}{a^2}$$

sein. Berechnen wir das zwischen diesem Schnittpunkt (S Fig. 4) und dem Scheitel M gelegene Bogenstück, so ist ein vorstehender Bedingung genügender Werth von α die untere, $\frac{\pi}{2}$ die obere Grenze der nach α auszuführenden Integration; folglich sind ψ und 0 die entsprechenden Grenzen der Integration nach ψ. Wir erhalten demnach

$$s = \frac{b^2 \varepsilon}{a} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^2\psi \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\psi}}$$

oder, nach Anwendung bekannter Reductionsformeln:

$$50) \qquad s = \frac{b^2 \varepsilon}{a} \cdot F(\varepsilon, \psi) - \frac{a}{\varepsilon} \cdot E(\varepsilon, \psi) + \sqrt{a^2+b^2} \cdot tg\,\psi \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\psi}.$$

Die geometrische Bedeutung des Winkels ψ ergiebt sich leicht in folgender Weise: Man beschreibe vom Mittelpunkt O aus zwei Kreise, den einen mit der reellen Halbaxe $OM (=a)$, den andern mit der Excentricität $OA (=\sqrt{a^2+b^2})$ als Radien. Von dem Punkte Q aus, wo der letztere von der Asymptote OT der Hyperbel AS geschnitten wird, fälle man die Senkrechte QR auf die reelle Halbaxe. Zieht man nun nach dem Punkte F, wo diese Senkrechte den ersteren Kreis trifft, den Radius $OF (=a)$, so ist

$$OR = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos\alpha = a \sin OFR.$$

Aus dieser Gleichung, im Zusammenhalte mit 49), erhellt, dass

$$\psi = OFR = YOF$$

ist. Aus dem Dreieck OQR erhalten wir dann:

$$QR = \sqrt{(a^2+b^2) - a^2 \sin^2\psi} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\psi}.$$

Zieht man daher durch Q die Parallele UQV mit der Axe OM, so ist $OU = QR$, und demnach

$$UV = OU\,tg\,\psi = \sqrt{a^2+b^2} \cdot tg\,\psi \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\psi}.$$

Hiermit ist also die in obigem Ausdruck für den Hyperbelbogen vorkommende geradlinige Strecke construirt.

Man erhält die rechtwinkligen Coordinaten des Durchschnittspunktes S als Functionen von α, wenn man

$$p^2 = a^2 + b^2 \text{ und } \varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha - b^2 \cos^2\alpha}$$

in 15) und 16) substituirt. Es ergiebt sich

$$x = \frac{a^2 \sin\alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha - b^2 \cos^2\alpha}},$$

$$y = \frac{b^2 \cos\alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha - b^2 \cos^2\alpha}}.$$

Bezeichnet man wieder mit τ den Winkel, welchen die im Punkte S an die Hyperbel 22) gelegte Berührende mit der Abscissenaxe bildet, so ist bekanntlich

$$tg\,\tau = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

oder, wenn man die obigen Werthe von x und y einsetzt:

$$tg\,\tau = tg\,\alpha.$$

Das heisst also, die Tangente der Hyperbel 22) in dem Punkte, wo sie von dem Hyperbelaste (α) getroffen wird, ist mit der Asymptote dieses letzteren

parallel. Dieser Satz von der Tangentenrichtung gilt, gleichviel ob der Schnittpunkt reell oder imaginär sei; denn die Wurzel im Nenner der Ausdrücke für x und y, welche allein imaginär werden kann, hebt sich beim Einsetzen derselben in die Formel für $tg\,\tau$ hinweg. Wir können den gefundenen Satz auch in folgender Weise aussprechen: Zieht man durch die Brennpunkte eines Systems confocaler Hyperbeln irgend eine mit ihnen concentrische gleichseitige Hyperbel, so sind die Tangenten jener Hyperbeln in den Punkten, wo sie von dieser geschnitten werden, parallel mit den Asymptoten der letzteren, und zwar immer mit der Asymptote OT, welche im nämlichen Quadranten liegt, wie der Berührungspunkt S.

Die Projection des Halbmessers OS auf die Tangente wird gefunden wie folgt:

$$SW = x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{(a^2+b^2)\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha}}$$

oder wenn man statt des Winkels α den Winkel ψ einführt:

$$SW = \sqrt{a^2+b^2}\,tg\,\psi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\psi} = UV$$

Die im obigen Ausdruck für den Hyperpelbogen MS enthaltene geradlinige Strecke ist also gleich der Projection des nach dem Punkte S gezogenen Halbmessers auf die in S berührende Gerade.

22. Der im vorigen Paragraphen ausgesprochene Satz liefert, mit dem analogen oben für die Ellipse aufgestellten verglichen, sogleich folgendes bekannte Theorem: Eine Schaar confocaler Ellipsen wird von einer Schaar mit ihnen confocaler Hyperbeln überall rechtwinklig durchschnitten.

Diese beiden Curvenschaaren bilden aber die Grundlage des elliptischen Coordinatensystems. Ihre lemniscatischen Gleichungen werden erhalten, wenn man in der Gleichung (21) der Ellipse $a^2=\lambda^2$ und $b^2=\lambda^2-p^2$, ferner in der Gleichung (22) der Hyperbel $a^2=\mu^2$ und $b^2=p^2-\mu^2$ einsetzt. Sie lauten alsdann:

$$51)\quad \begin{cases} \varrho^2 = \dfrac{\lambda^2(\lambda^2-p^2)}{\lambda^2-p^2\sin^2\alpha} \text{ (Ellipsen)} \\[2ex] \varrho^2 = \dfrac{\mu^2(p^2-\mu^2)}{\mu^2-p^2\cos^2\alpha} \text{ (Hyperbeln)} \end{cases}$$

und drücken die Beziehungen aus zwischen den lemniscatischen Coordinaten (ϱ, α) eines Punktes der Ebene und seinen elliptischen Coordinaten (λ, μ). Aus ihnen zieht man, um vom lemniscatischen zum elliptischen System überzugehen, folgende Relationen:

$$52)\quad \begin{cases} \varrho^2 = \lambda^2-\mu^2 \\[1ex] \sin^2\alpha = \dfrac{\lambda^2(p^2-\mu^2)}{p^2(\lambda^2-\mu^2)} \quad \cos^2\alpha = \dfrac{\mu^2(\lambda^2-p^2)}{p^2(\lambda^2-\mu^2)} \quad tg^2\alpha = \dfrac{\lambda^2(p^2-\mu^2)}{\mu^2(\lambda^2-p^2)} \end{cases}$$

Sieht man in der ersten der vorstehenden Gleichungen, nämlich in

$$\lambda^2 - \mu^2 = \varrho^2 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = \varrho^2 + \mu^2$$

ϱ als constant an, so stellt sie die elliptische Gleichung einer Lemniscate vor, deren Pole mit den gemeinschaftlichen Brennpunkten der Ellipsen und Hyperbeln zusammenfallen. Dieselbe ist zugleich der analytische Ausdruck folgenden Lehrsatzes: Construirt man eine Hyperbel mit der reellen Halbaxe μ und dazu eine mit ihr confocale Ellipse, deren grosse Halbaxe λ gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten μ und eine gegebene Gerade ϱ sind, so liegen ihre Durchschnittspunkte auf einer Lemniscate vom Parameter ϱ, deren Pole in die gemeinschaftlichen Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel fallen.

Je nachdem man μ oder λ als constant betrachtet, liefert dieselbe Gleichung noch folgende zwei Lehrsätze:

Construirt man eine Lemniscate vom Parameter ϱ und dazu eine Ellipse, deren Brennpunkte mit den Polen der Lemniscate zusammenfallen, und deren grosse Halbaxe λ gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten ϱ und eine gegebene Linie μ sind, so liegen ihre Durchschnittspunkte auf einer zu jener Ellipse confocalen Hyperbel mit der reellen Halbaxe μ.

Construirt man wieder eine Lemniscate vom Parameter ϱ und dazu eine Hyperbel mit den Polen der Lemniscate als Brennpunkten, deren reelle Halbaxe μ gleich der einen Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, welches ϱ zur andern Kathete und eine gegebene Linie $\lambda (> \varrho)$ zur Hypotenuse hat, so liegen die Durchschnittspunkte der beiden Curven auf einer zu der Hyperbel confocalen Ellipse mit der grossen Halbaxe λ.

Zum Uebergang vom elliptischen in das lemniscatische Coordinatensystem dienen folgende Gleichungen:

$$\text{63)} \quad \begin{cases} \lambda^2 = \frac{1}{2}(p^2 + \varrho^2) + \frac{1}{2}\sqrt{p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4} \\ \mu^2 = \frac{1}{2}(p^2 - \varrho^2) + \frac{1}{2}\sqrt{p^4 + 2p^2\varrho^2 \cos 2\alpha + \varrho^4} \end{cases}$$

welche durch Auflösung der Gleichungen (51) nach λ^2 und ϱ^2 leicht gefunden werden.

Will man z. B. die Länge des Lemniscatenbogens durch elliptische Coordinaten ausdrücken, so erhält man die Integrale

$$s = \varrho^2 \int_{\lambda}^{\sqrt{p^2+\varrho^2}} \sqrt{\frac{2\lambda^2 - p^2 - \varrho^2}{(\lambda^2 - p^2)(\lambda^2 - \varrho^2)(p^2 + \varrho^2 - \lambda^2)}} \cdot d\lambda$$

und

$$s=\varrho^2\int_{\mu}^{p}\sqrt{\frac{2\mu^2-p^2+\varrho^2}{(p^2-\mu^2)(\mu^2+\varrho^2)(\mu^2-p^2-\varrho^2)}}\,.d\mu,$$

welche durch die Substitutionen

$$2\lambda^2-p^2-\varrho^2=(p^2+\varrho^2)\xi^2$$

und

$$2\mu^2-p^2+\varrho^2=(p^2+\varrho^2)\xi^2,$$

wo ξ die nämliche Bedeutnng hat wie in § 14, ganz ebenso wie dort transformirt und weiter behandelt werden können.

23. Durch die Lemniscaten und Hyperbeln unseres Coordinatensystems wird die ganze Ebene in rechteckige Feldchen zerschnitten; ein von zwei unendlich nahen Lemniscaten (ϱ und $\varrho+d\varrho$) und zwei unendlich nahen Hyperbeln (α und $\alpha+d\alpha$) begrenztes Flächenelement wird daher dargestellt durch das Product der in den Gleichungen (27) und (41) ausgewertheten Bogenelemente, also durch

$$54)\qquad ds_1\,ds_2=\frac{\varrho^3\,d\varrho\,d\alpha}{\sqrt{p^4+2p^2\varrho^2\cos 2\alpha+\varrho^4}}.$$

Diese Formel gilt nicht mehr für den Anfangspunkt O, weil dort die Hyperbel $\left(\alpha=\frac{\pi}{2}\right)$, d. h. das durch die rechtwinkligen Coordinatenaxen dargestellte Linienpaar, und die Lemniscate ($\varrho=p$) sich nicht mehr rechtwinklig durchschneiden. Ist daher der Punkt O in der Fläche begriffen, über welche man die Integration auszudehnen hat, so müsste man das Differential $ds_1\,ds_2$, welches jenen Werthen entspricht, weglassen, und dafür den wahren Werth des Flächenelements, welches den Punkt O enthält, hinzufügen. Beide Elemente aber, das abzuziehende und das zu addirende, sind unendlich klein und können daher gegen das über die ganze Fläche erstreckte Integral vernachlässigt werden. Es ist daher gestattet, die Integration auch über den Punkt O auszudehnen, ohne die Richtigkeit des Resultats zu alteriren.

Uebrigens erkennt man leicht, dass die Formel (54) sich für $p=o$ auf die für gewöhnliche Polarcoordinaten zurückzieht.

Soll nun der Inhalt eines von zwei Curven, deren lemniscatische Gleichungen

$$\Phi(\varrho,\alpha)=o\qquad\text{und}\qquad\varphi(\varrho,\alpha)=o$$

gegeben sind, und den zwei Coordinatenhyperbeln (α_1) und (α_2) begrenzten Flächenstücks berechnet werden, so hat man obige Formel zuerst nach ϱ zu integriren, alsdann die aus vorstehenden Gleichungen als Functionen von ϱ und α sich ergebenden Grenzen ϱ_1 und ϱ_2 einzusetzen und jetzt nochmals nach α zwischen den Grenzen α_1 und α_2 zu integriren.

Die unbestimmte Integration nach ϱ lässt sich ohne Weiteres ausführen. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$p^4+2p^2\varrho^2\cos 2\alpha+\varrho^4=R^4$$

so erhält man

$$55)\qquad \int \frac{\varrho^3 d\varrho}{R^2} = \tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} p^2 \cos 2\alpha . \log(\varrho^2 + p^2 \cos 2\alpha + R^2),$$

wo die willkührliche Constante weggelassen wurde, weil sie nach Einführung der Grenzen doch verschwindet.

Sind die beiden Curven, welche den Gleichungen $\Phi = o$ und $\varphi = o$ entsprechen, zwei unserer Lemniscaten, so sind die Grenzen ϱ_1 und ϱ_2 constant.

Integrirt man daher die vorstehende Formel nach α, indem man ϱ als constant ansieht, so findet man zunächst:

$$\int\int \frac{\varrho^3 d\varrho\, d\alpha}{R^2} = \tfrac{1}{2} \int R^2 d\alpha - \tfrac{1}{2} p^2 \int \cos 2\alpha . \log(\varrho^2 + p^2 \cos 2\alpha + R^2) . d\alpha.$$

Man erhält sodann durch theilweise Integration

$$\int \cos 2\alpha \log(\varrho^2 + p^2 \cos 2\alpha + R^2)\, d\alpha = \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha . \log(\varrho^2 + p^2 \cos 2\alpha + R^2)$$
$$+ p^2 \int \sin^2 2\alpha . \frac{\varrho^2 + R^2}{(\varrho^2 + p^2 \cos 2\alpha + R^2) . R^2} . d\alpha,$$

während hinwiederum das letztere Integral

$$p^2 \int \sin^2 2\alpha . \frac{\varrho^2 + R^2}{(\varrho^2 + p^2 \cos 2\alpha + R^2) R^2} d\alpha = \int \frac{p^2 + \varrho^2 \cos 2\alpha}{R^2} d\alpha - \int \cos 2\alpha\, d\alpha$$

gefunden wird. Nun ist aber, wenn $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ und $\frac{2p\varrho}{p^2 + \varrho^2} = k$ gesetzt wird:

$$\int \frac{p^2 + \varrho^2 \cos 2\alpha}{R^2} d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}} - \frac{2\varrho^2}{p^2 + \varrho^2} \int \frac{\sin^2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}}$$
$$= \frac{p^2 - \varrho^2}{2p^2} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}} + \frac{p^2 + \varrho^2}{2p^2} \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha} . d\alpha.$$

Bringt man das oben vorkommende ebenfalls elliptische Integral

$$\int R^2 . d\alpha$$

durch Einführung von $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ und $\frac{2p\varrho}{p^2 + \varrho^2} = k$ auf die Normalform, so erhält man schliesslich:

$$\int\int \frac{\varrho^3 d\varrho\, d\alpha}{R^2} = \tfrac{1}{4}(p^2 + \varrho^2) \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha} . d\alpha - \tfrac{1}{4}(p^2 - \varrho^2) \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}}$$
$$+ \frac{p^2}{4} \sin 2\alpha \left[1 - \log(\varrho^2 + p^2 \cos 2\alpha + R^2)\right]$$

also nach Einsetzung der Grenzen $\varrho_1, \varrho_2;\ \alpha_1, \alpha_2$:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\varrho^3 d\varrho\, d\alpha}{R^2} = \tfrac{1}{4}(p^2 + \varrho_2^2) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2\alpha} . d\alpha - \tfrac{1}{4}(p^2 + \varrho_1^2) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\alpha} . d\alpha$$

$$56)\quad - \tfrac{1}{4}(p^2 - \varrho_2^2) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2\alpha}} + \tfrac{1}{4}(p^2 - \varrho_1^2) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\alpha}}$$

$$+\frac{1}{4}p^2\left[\sin 2\alpha . \log\frac{\varrho_1^2+p^2\cos 2\alpha+R_1^2}{\varrho_2^2+p^2\cos 2\alpha+R_2^2}\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

wo k_1, R_1; k_2, R_2 die Werthe bedeuten, welche die Grössen k und R resp. für ϱ_1 und ϱ_2 annehmen.

Sind die beiden Lemniscaten, welche das zu berechnende Flächenstück begrenzen, gleichmodelig, so vereinfacht sich der vorstehende Ausdruck, indem wegen $k_1=k_2$ die vier ersten Glieder in zwei zusammengefasst werden können.

Für den Flächeninhalt der Viertelslemniscate erhalten wir, indem wir $\varrho_1=0$, $\varrho_2=\varrho$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ setzen:

$$57)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\varrho}\frac{\varrho^3\,d\varrho\,d\alpha}{R^2}=\tfrac{1}{4}(p^2+\varrho^2)E'(k)-\tfrac{1}{4}(p^2-\varrho^2)F'(k).$$

Der Flächeninhalt des zwischen den Hyperbeln (α_1) und (α_2) enthaltenen gekrümmten Sectors der Lemniscate $\varrho=p$, für welche $k=1$ ist, ergiebt sich wie folgt:

$$58)\quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_0^{p}\frac{\varrho^3\,d\varrho\,d\alpha}{R^2}=\tfrac{1}{2}p^2(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)+\tfrac{1}{4}p^2\left[\sin 2\alpha\log\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

und derjenige des Quadranten der nämlichen Lemniscate:

$$59)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{p}\frac{\varrho^3\,d\varrho\,d\alpha}{R^2}=\tfrac{1}{2}p^2.$$

24. Von der Anwendung der Formel 54) möge noch als letztes Beispiel die Berechnung des Flächeninhalts des gekrümmten Sectors einer Ellipse hier stehen, welcher von zwei durch ihren Brennpunkt gehenden gleichseitigen Hyperbeln (α_1) und (α_2) und dem zwischen diesen eingeschlossenen Ellipsenbogen begrenzt wird. Man hat alsdann in 55) als Grenzen $\varrho_1=0$ und aus der lemniscatischen Gleichung 21) der Ellipse

$$\varrho_2=\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2\alpha}}$$

einzuführen, indem man noch berücksichtigt, dass $p^2=a^2-b^2$ ist, und den resultirenden Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a^4+b^4+(a^4-b^4)\cos 2\alpha}{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2\alpha}-\tfrac{1}{2}(a^2-b^2)$$
$$-\tfrac{1}{2}(a^2-b^2)\cos 2\alpha . \log\frac{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2\alpha}{(a^2-b^2)(1+\cos 2\alpha)}$$

zwischen den Grenzen α_1 und α_2 zu integriren. Man erhält dadurch den Flächeninhalt des gekrümmten Sectors wie folgt:

$$60)\quad \sigma=\frac{ab}{2}\left[arc\,tg\left(\frac{b}{a}tg\,\alpha\right)\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}-\frac{1}{4}(a^2-b^2)\left[\sin 2\alpha \log\frac{1+\left(\frac{b}{a}tg\,\alpha\right)^2}{\varepsilon^2}\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2},$$

wo ε^2 statt $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ steht. Die nämliche Gleichung 21) kommt aber, wie früher gezeigt, im Polarcoordinatensystem einer Ellipse zu, welche mit der gegebenen Ellipse congruent, aber um 90^0 gegen sie gedreht ist. Berechnen wir jetzt auch den von den beiden Geraden (α_1) und (α_2) eingeschlossenen Sector Σ der letzteren Ellipse, so finden wir

$$\Sigma=\frac{ab}{2}\left[arc\,tg\left(\frac{b}{a}tg\,a\right)\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

und erkennen, dass dieser zwischen den Asymptoten der Hyperbeln enthaltene Sector der zweiten Ellipse den zwischen den Hyperbeln selbst enthaltenen Sector der ersten um das in der Formel für σ auftretende logarithmische Glied übertrifft. Für $\alpha_1=0$ und $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ liefern beide Formeln den Flächeninhalt $\frac{1}{4}ab\pi$ der Viertelsellipse.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber einige Sätze aus der Theorie der ϑ-Functionen. Von A. Enneper.

Mittelst der beiden Integrale:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \cos 2pv\,dv = \sqrt{\pi}\,e^{-p^2},\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \sin 2pv\,dv = 0,$$

ergeben sich leicht die folgenden Gleichungen:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \cos 2p\,(v+q)\,dv = \sqrt{\pi} \cos 2pq \,.\, e^{-p^2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \sin 2p\,(v+q)\,dv = \sqrt{\pi} \sin 2pq \,.\, e^{-p^2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \cos 2p\,(v-q)\,dv = \sqrt{\pi} \cos 2pq \,.\, e^{-p^2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \sin 2p(v-q)dv = -\sqrt{\pi} \sin 2pq \,.\, e^{-p^2}.$$

Setzt man in den beiden ersten der vorstehenden Integrale $v+q=u$, in den beiden letzten $v-q=u$, so erhält man:

$$\int\limits_{\infty}^{\infty} e^{-u^2+2qu} \cos 2pu\,du = \sqrt{\pi} \cos 2pq \,.\, e^{-p^2+q^2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-2qu} \cos 2pu\,du = \sqrt{\pi} \cos 2pq \,.\, e^{-p^2+q^2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2qu} \sin 2pu\,du = \sqrt{\pi} \sin 2pq \,.\, e^{-p^2+q^2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-2qu} \sin 2pu\,\partial u = -\sqrt{\pi} \sin 2pq \,.\, e^{-p^2+q^2}.$$

Bildet man die Summe der ersten und zweiten Gleichung, ferner die Differenz der dritten und vierten Gleichung, so folgt:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}(e^{2qu}+e^{-2qu})\cos 2pu\,\partial u=\sqrt{\pi}\cos 2pq.e^{-p^2+q^2},$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}(e^{2qu}-e^{-2qu})\sin 2pu\,\partial u=\sqrt{\pi}\sin 2pq.e^{-p^2+q^2}.$$

Setzt man $i=\sqrt{-1}$, so lassen sich die vorstehenden Gleichungen auch auf folgende Art darstellen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos 2pu\cos 2iqu\,\partial u=\sqrt{\pi}e^{-p^2-(iq^2)}\cos 2pq,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\sin 2pu\sin 2iq\,u\,\partial u=i\sqrt{\pi}c^{-p^2-(iq)^2}\sin 2pq.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos 2(p+qi)u.\partial u=\sqrt{\pi}e^{-(p+iq)^2},$$

oder $p\sqrt{\alpha}$, $q\sqrt{\alpha}$ statt p, q gesetzt:

$$1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos 2(p+qi)u\sqrt{\alpha}.\partial u=\sqrt{\pi}e^{-\alpha(p+qi)^2}.$$

Sei:

$$\begin{aligned}\Omega=\alpha_1\{z_1 i+s_1 K_{1,1}+s_2 K_{1,2}+\ldots+s_n K_{1,n}\}^2\\ +\alpha_2\{z_2 i+s_1 K_{2,1}+s_2 K_{2,2}+\ldots+s_n K_{2,n}\}^2\\ \vdots\\ +\alpha_n\{z_n i+s_1 K_{n,1}+s^2 K_{n,2}+\ldots+s_n K_{n,n}\}^2,\end{aligned}$$

oder:

$$2)\qquad \Omega=\sum_{r=1}^{r=n}\alpha_r\{z_r i+s_1 K_{r,1}+\ldots+s_n K_{r,n}\}^2.$$

Mit Hülfe der Gleichung 1) lässt sich $e^{-\Omega}$ auf folgende Art durch ein n-faches Integral darstellen:

$$3)\qquad (\sqrt{\pi})^n e^{-\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2)}.\,\Phi\,du_1\,du_2\,du_n,$$

wo:

$$\begin{aligned}\Phi=\cos 2(z_1 i+s_1 K_{1,1}+\ldots+s_n K_{1,n})u_1\sqrt{\alpha}\times\\ \cos 2(z_2 i+s_1 K_{2,1}+\ldots+s_n K_{2,n})u_2\sqrt{\alpha_2}\times\\ \vdots\\ \cos 2(z_n i+s_1 K_{n,1}+\ldots+s_n K_{n,n})u_n\sqrt{\alpha_n}.\end{aligned}$$

Wegen der Integrationsgrenzen kann man in dem Ausdruck für Φ statt des Products der Cosinus einfach den Cosinus der Summe sämmtlicher Argu-

mente setzen, indem unter dem Integralzeichen jeder Term, welcher einen Sinus enthält, verschwindet. Man kann in 3) also setzen:

$$4)\quad \Phi = \cos 2(i\Sigma z u\sqrt{\alpha} + s_1\,\Sigma u\,K_1\sqrt{\alpha} + \ldots + s_n\,\Sigma u\,K_n\sqrt{\alpha}),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$5)\quad \begin{cases} \Sigma z u\sqrt{\alpha} = z_1 u_1\sqrt{\alpha_1} + \ldots + z_n u_n\sqrt{\alpha_n}, \\ \Sigma K_r u\sqrt{\alpha} = u_1 K_{1,r}\sqrt{\alpha_1} + \ldots + u_n K_{n,r}\sqrt{\alpha_n}. \end{cases}$$

Trennt man in Φ den reellen und imaginären Theil, so folgt aus 4:

$$6)\quad \begin{aligned} \Phi = {} & \frac{e^{\Sigma z u\sqrt{\alpha}} + e^{-\Sigma z u\sqrt{\alpha}}}{2}\cos(s_1\,\Sigma u K_1\sqrt{\alpha} + \ldots + s_n\,\Sigma u\,K_n\sqrt{\alpha}) \\ & + \frac{e^{\Sigma z u\sqrt{\alpha}} - e^{-\Sigma z u\sqrt{\alpha}}}{2i}\sin(s_1\,\Sigma u K_1\sqrt{\alpha} + \ldots + s_n\,\Sigma u K_n\sqrt{\alpha}). \end{aligned}$$

In der Gleichung 3) lege man $s_1, s_2, \ldots s_n$, respective alle ganzzahligen Werthe von $-k_1$ bis k_1, $-k_2$ bis k_2, ... $-k_n$ bis k_n, bei und bilde die Summe sämmtlicher Gleichungen. Hierdurch folgt, mit Rücksicht auf 6):

$$7)\quad \begin{aligned} (\sqrt{\pi})^n S e^{-\mathfrak{K}} = {} & \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\Sigma z u\sqrt{\alpha}} + e^{-\Sigma z u\sqrt{\alpha}}}{2}\,\Psi\,du_1\,du_2\ldots du_n \\ & + \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\Sigma z u\sqrt{\alpha}} - e^{-\Sigma z u\sqrt{\alpha}}}{2}\,\Psi\,du_1\,du_2\ldots du_n, \end{aligned}$$

wo:

$$8)\quad \Psi = e^{-(u_1^2 + \ldots + u_n^2)}\,\frac{\sin(2K_1+1)\,\Sigma u K_1\sqrt{\alpha}}{\sin\Sigma u K_1\sqrt{\alpha}}\ldots \ldots\frac{\sin(2k_n+1)\,\Sigma u\,K_n\sqrt{\alpha}}{\sin\Sigma u\,K_n\sqrt{\alpha}}.$$

Setzt man $-u_1, \ldots -u_n$, statt $u_1, \ldots u_n$, so bleibt Ψ ungeändert, hieraus folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{\Sigma z u\sqrt{\alpha}}\,\Psi\,du_1\ldots dn_n = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Sigma z u\sqrt{\alpha}}\,\Psi\,du_1\ldots du_n.$$

Diese Gleichung zeigt, dass in 7) der imaginäre Theil verschwindet und sich der Ausdruck für $(\sqrt{\pi})^n S e^{-\mathfrak{K}}$ einfacher auf folgender Weise schreiben lässt:

$$(\sqrt{\pi})^n S e^{-\mathfrak{K}} = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\Sigma z u\sqrt{\alpha}}\,\Psi.\,du_1\ldots du_n.$$

Multiplicirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit:

$$e^{-\Sigma\alpha z^2} = e^{-(\alpha_1 z_1^2 + \ldots + \alpha_n z_n^2)},$$

substituirt für Ψ seinen Werth aus 8), so folgt:

$$9)\quad (\sqrt{\pi})^n e^{-\Sigma\alpha z^2} S e^{-\mathfrak{K}} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Sigma(u+z\sqrt{\alpha})^2}\frac{\sin(2k_1+1)\,\Sigma u K_1\sqrt{\alpha}}{\sin\Sigma u K_1\sqrt{\alpha}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\sin(2k_n+1)\,\Sigma u K_n\sqrt{\alpha}}{\sin\Sigma u K_n\sqrt{\alpha}}\,du_1\ldots du_n.$$

Statt der Integrationsvariabeln $u_1 \ldots u_n$ führe man in dem n-fachen Integrale der Gleichung I) die Variabeln $v_1, \ldots v_n$ mittelst folgender Gleichungen ein:

$$10)\quad\begin{cases}\Sigma u K_1\sqrt{\alpha}=u_1K_{1,1}\sqrt{\alpha_1}+u_2K_{2,1}\sqrt{\alpha_2}+\ldots+u_nK_{n,1}\sqrt{\alpha_n}=v_1,\\ \Sigma u K_2\sqrt{\alpha}=u_1K_{1,2}\sqrt{\alpha_1}+u_2K_{2,2}\sqrt{\alpha_2}+\ldots+u_nK_{n,2}\sqrt{\alpha_n}=v_2,\\ \quad\vdots\\ \Sigma u K_n\sqrt{\alpha}=u_1K_{1,n}\sqrt{\alpha_1}+u_2K_{2,n}\sqrt{\alpha_1}+\ldots+u_nK_{n,n}\sqrt{\alpha_n}=v_n.\end{cases}$$

Setzt man:

$$11)\quad\begin{vmatrix}K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,n}\\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,n}\\ K_{n,1} & K_{n,2} & K_{n,n}\end{vmatrix}=\Delta,$$

so geht die Gleichung 9) mittelst der Substitution 10) über in:

$$12)\quad(\sqrt{\pi})^n e^{-\Sigma\alpha z^2}\,S\,e^{-\Omega}\sqrt{(\alpha_1\ldots\alpha_n.\Delta)}=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-T}\frac{\sin(2k_1+1)\,v_1}{\sin v_1}\cdots\frac{\sin(2k_n+1)v_n}{\sin v_n}\,dv_1\ldots dv_n,$$

wo:

$$13)\quad T=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{\alpha_r}\left\{z_r\alpha_r+\frac{v_1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial K_{r,1}}+\ldots+\frac{v_n}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial K_{r,n}}\right\}^2.$$

Die Function e^{-T} bleibt für alle reellen Werthe von $v_1,\ldots v_n$ endlich und stetig, lässt man nun in 12) $k_1, k_2, \ldots k_n$ unbegrenzt wachsen, so geht die linke Seite, nach einem bekannten Theorem von Lejeune-Dirichlet über in

$$14)\quad \pi^n\,S e^{-T_1},$$

wo

$$15)\quad T_1=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{\alpha_r}\left\{z_r\alpha_r+\frac{\pi s_1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial K_{r,1}}+\ldots+\frac{\pi s_n}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial K_{r,n}}\right\}^2$$

Das Zeichen S bedeutet eine n-fache Summe in Beziehung auf die summirenden Elemente $s_1, s_2, \ldots s_n$, welche unabhängig von einander alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis ∞ annehmen. Lässt man also in 12) $k_1,\ldots k_n$ unbegrenzt zunehmen, substituirt für Ω seinen Werth aus 2), so folgt, mit Rücksicht auf 14) und 15):

$$16)\quad\begin{cases}S e^{-\Sigma\alpha_r(z_r i+s_1K_{r,1}+\ldots+s_nK_{r,n})^2}\\ =\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Delta\sqrt{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)}}\,e^{\Sigma\alpha_r z_r^2}\,S\,e^{-\Sigma\alpha_r(z_r+s_1L_{r,1}+\ldots+s_nL_{r,n})^2}\end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

17) $$L_{p,q} = \frac{\pi}{a_p \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial K_{p,q}}.$$

Die Summe:

$$S e^{-\Sigma \alpha_r (z_r i + s_1 K_{r,1} + \ldots + s_n K_{r,n})^2}$$

bleibt unverändert, wenn $z_1, z_2, \ldots z_n$ gleichzeitig respective zunehmen um

$$i(g_1 K_{1,1} + g_2 K_{1,2} + \ldots + g_n K_{1,n}) = i \Sigma g_q K_{1,q},$$
$$i(g_1 K_{2,1} + g_2 K_{2,2} + \ldots + g_n K_{2,n}) = i \Sigma g_q K_{2,q},$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$i(g_1 K_{n,1} + g_2 K_{n,2} + \ldots + g_n K_{n,n}) = i \Sigma g_q K_{n,q},$$

wo $g_1, g_2 \ldots g_n$ beliebige ganze, positive oder negative Zahlen sind.

Die Summe:

$$S e^{-\Sigma \alpha_r (z_r + s_1 L_{r,1} + \ldots + s_n L_{r,n})^2}$$

bleibt unverändert, wenn $z_1, \ldots z_n$ gleichzeitig zunehmen respective um:

$$g_1 L_{1,1} + \ldots + g_n L_{1,n} = \Sigma g_q L_{1,q}$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$g_1 L_{n,1} + \ldots + g_n L_{n,n} = \Sigma g_q L_{n,q}.$$

Setzt man also

18) $$\varphi(z_1, z_2, \ldots z_n) = e^{-\Sigma \alpha_r z_r^2} S e^{-\Sigma \alpha_r (z_r i + s_1 K_{r,1} + \ldots + s_n K_{r,n})^2}$$

so ist nach den obigen Bemerkungen, mit Rücksicht auf 17):

19) $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\varphi(z_1 + i \Sigma g_q K_{1,q}, \ldots z_n + i \Sigma g_q K_{n,q})}{\varphi(z_1, z_2 \ldots z_n)} = \\ e^{-2i \Sigma \alpha_r z_r (g_1 K_{r,1} + \ldots + g_n K_{r,n})} e^{\Sigma \alpha_r (g_1 K_{r,1} + \ldots + g_n K_{r,n})^2}, \end{array} \right.$$

20) $$\varphi(z_1 + \Sigma g_q L_{1,q} + \ldots + z_n + \Sigma g_q L_{n,q}) = \varphi(z_1, \ldots z_n).$$

Diese Gleichungen lassen sich durch Einführung neuer Quantitäten noch etwas transformiren. Sei:

21) $$\Sigma \alpha_r z_r K_{r,p} = \alpha_1 z_1 K_{1,p} + \ldots + \alpha_n z_n K_{n,p} = u_p,$$

22) $$\Sigma \alpha_r K_{r,p} K_{r,q} = \alpha_1 K_{1,p} K_{1,q} + \ldots + \alpha_n K_{n,p} K_{n,q} = a_{p,q},$$

sodass also $a_{p,q} = a_{q,p}$ ist.

Nehmen nun $z_1, \ldots z_n$ respective zu um $i \Sigma g_q K_{1,q}, \ldots i \Sigma g_q K_{n,q}$, so nimmt u_p zu um:

$$i \{ g_1 \Sigma \alpha_r K_{r,p} K_{r,1} + g_2 \Sigma \alpha_r K_{r,p} K_{r,2} + \ldots + g_n \Sigma \alpha_r K_{r,p} K_{r,n} \},$$

d. i. nach 22):

$$i \{ g_1 a_{p,1} + g_2 a_{p,2} + \ldots + g_n a_{p,n} \} = i \Sigma g_q a_{p,q}.$$

Wachsen $z_1, \ldots z_n$ gleichzeitig um $\Sigma g_q L_{1,q} \ldots \Sigma g_q L_{n,q}$, so nimmt u_p nach 21) zu um:

$$\Sigma \alpha_r K_{r,p} (g_1 L_{r,1} + g_2 L_{r,2} + \ldots + g_n L_{r,n})$$

d. i. nach 17):

$$\frac{\pi}{\Delta} \Sigma K_{r,p} \left(g_1 \frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,1}} + \ldots + g_n \frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,n}} \right).$$

Diese Summe ist einfach gleich πg_p. Setzt man:

$$\varphi(z_1, \ldots z_n) = \vartheta(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

so geht die Gleichung 18) mit Hülfe der Gleichungen 21) und 22) über in:

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots u_n) = S e^{-2i(s_1 u_1 + s_2 u_2 + \ldots + s_n u_n) - \Sigma\Sigma s_p s_q a_{p,q}},$$

wo in der Doppelsumme $\Sigma\Sigma s_p s_q a_{p,q}$ die Indices p,q unabhängig von einander alle ganzzahligen, positiven Werthe von 1 bis n annehmen, und allgemein $a_{p,q} = a_{q,p}$ ist.

An die Stelle der Gleichungen 19) und 20) treten die folgenden:

$$\vartheta(u_1 + i\Sigma g_q a_{1,q}, u_2 + i\Sigma g_q a_{2,q}, \ldots u_n + i\Sigma g_q a_{n,q}) =$$
$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots u_n) e^{-2i(g_1 u_1 + g_2 u_2 + \ldots + g_n u_n)} e^{\Sigma\Sigma g_p g_q a_{p,q}},$$
$$\vartheta(u_1 + g_1 \pi, u_2 + g_2 \pi, \ldots u_n + g_n \pi) = \vartheta(u_1, u_2, \ldots u_n).$$

Die letzte der vorstehenden Gleichungen folgt auch unmittelbar aus der Definition von $\vartheta(u_1, u_2, \ldots u_n)$.

Setzt man:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 K_{1,1} & \alpha_n K_{n,1} \\ \\ \alpha_1 K_{1,n} & \alpha_n K_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \begin{vmatrix} K_{1,1} & K_{n,1} \\ \\ K_{1,n} & K_{n,n} \end{vmatrix},$$

so ist $\Delta_1 = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \Delta$. Bildet man das Product der beiden Determinanten Δ und Δ_1, so folgt, mit Rücksicht auf die Gleichung 22)

$$22)\qquad \Delta\Delta_1 = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} \\ \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Setzt man also:

$$23)\qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ \\ a_{n,1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = D,$$

so ist:

$$24)\qquad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \Delta^2 = D.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 17) folgt:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r L_{r,p} L_{r,q} = \frac{\pi^2}{\Delta^2} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{\alpha_r} \frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,p}} \frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,q}}.$$

Da nun $\Delta_1 = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \Delta$ so ist auch:

$$\Sigma \alpha_r L_{r,p} L_{r,q} = \frac{\pi^2}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \Delta^2} \Sigma \frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,q}} \frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha_r K_{r,q}}.$$

Die Summe rechts ist gleich dem Factor von $a_{p,q}$ in $\Delta\Delta_1 = D$, d. h. gleich $\frac{\partial D}{\partial a_{p,q}}$. Mittelst der Gleichung 24) folgt nun

$$25)\qquad \Sigma \alpha_r L_{r,p} L_{r,q} = \frac{\pi^2}{D} \frac{\partial D}{\partial a_{q,p}}.$$

Setzt man in 21) $p = 1, 2, \ldots n$, so erhält man für z_r folgende Gleichung:

$$\alpha_r z_r = \frac{1}{\Delta}\left(u_1 \frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,1}} + u_2 \frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,2}} + \ldots + u_n \frac{\partial \Delta}{\partial K_{r,n}} \right)$$

oder nach 17):

$$\pi z_r = u_1 L_{r,1} + u_2 L_{r,2} + \ldots + u_n L_{r,n}.$$

Diese Gleichung, in Verbindung mit 25) giebt:

$$26)\qquad \Sigma\alpha_r\, z_r L_{r,p} = \frac{1}{\pi}\Sigma\alpha_r L_{r,p}(u_1 L_{r,2}+\ldots+u_n L_{r,n})$$
$$= \frac{\pi}{D}\left\{u_1\frac{\partial D}{\partial a_{p,1}}+u_2\frac{\partial D}{\partial a_{p,2}}+\ldots+u_n\frac{\partial D}{\partial a_{p,n}}\right\},$$

$$27)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma\alpha_r z_r^2 &= \frac{1}{\pi^2}\Sigma\alpha_r(u_1 L_{r,1}+u_2 L_{r,2}+\ldots+u_n L_{r,n})^2\\ &= \frac{1}{D}\Sigma\Sigma u_q u_p\frac{\partial D}{\partial a_{q,p}}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$28)\qquad \frac{\pi^2}{D}\frac{\partial D}{\partial a_{p,q}} = b_{p,q} = b_{q,p},$$

so gehen die Gleichungen 25), 26) und 27) über in:

$$29)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\alpha_r L_{r,p} L_{r,q} = b_{p,q}\\ &\Sigma\alpha_r z_r L_{r,p} = \frac{1}{\pi}(u_1 b_{p,1}+u_2 b_{p,2}+\ldots+u_n b_{p,n})\\ &\Sigma\alpha_r z_r^2 = \frac{1}{\pi^2}\Sigma\Sigma u_p u_q b_{p,q}\end{aligned}\right.$$

Transformirt man die Gleichung 16) mittelst der Gleichungen 21) und 22), so folgt, unter Zuziehung der Gleichungen 24) und 28):

$$Se^{-2i(s_1u_1+s_2u_2+\ldots+s_nu_n)-\sum\limits_{p=1}^{p=n}\sum\limits_{q=2}^{q=n} s_p s_q a_{p,q}}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi^n}{D}}\, Se^{-\sum\limits_{p=1}^{p=n}\sum\limits_{q=1}^{q=n}\left(\frac{u_p}{\pi}+s_p\right)\left(\frac{u_q}{\pi}+s_q\right)b_{p,q}},$$

wo D und $b_{p,q}$ durch die Gleichungen 23) und 28) bestimmt sind.

II.

Seien m und n summirende Elemente, welche alle rellen, ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis ∞ annehmen. Durch Σ_2 werde eine doppelte Summe in Beziehung auf m und n bezeichnet. Setzt man:

$$\varrho = e^{-(\alpha u^2+\alpha_1 u_1^2)},$$

$$1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho P_3(u,u_1) &= \Sigma_2 e^{-\alpha\{u+2mK+2nL\}^2-\alpha_1\{u_1+2mK_1+2nL_1\}^2},\\ \varrho Q_3(u,u_1) &= \Sigma_2 e^{-\alpha\{u+(2m+1)K+2nL\}^2-\alpha_1\{u_1+(2m+1)K_1+2nL_1\}}\\ \varrho R_3(u,u_1) &= \Sigma_2 e^{-\alpha\{u+2mK+(2n+1)L\}^2-\alpha_1\{u_1+2mK_1+(2n+1)L_1\}^2}\\ \varrho S_3(u,u_1) &= \Sigma_2 e^{-\alpha\{u+(2m+1)K+(2n+1)L\}^2-\alpha_1\{u_1+(2m+1)K_1+(2n+1)L_1\}^2}\end{aligned}\right.$$

so lässt sich leicht direct für die Functionen P_3, Q_3, R_3, S_3 ein Multiplicationstheorem aufstellen, welches dem Jacobi'schen für die ϑ-Functionen analog ist. Die obigen Functionen sind, bis auf einige unwesentliche Modificationen, dieselben, deren sich Göpel in seiner Abhandlung (Crelle's Journal, t. XXXV) bedient hat.

Bildet man das Product der beiden Doppelsummen:

$$e^{-(\alpha u^2+\alpha_1 u_1^2)} P_3(u,u_1) = \Sigma_2 e^{-\alpha\{u+2mK+2nL\}^2-\alpha_1\{u_2+2mK_1+2nL_1\}^2},$$

$$e^{-(\alpha v^2+\alpha_1 v_1^2)} P_3(v_1 v_1) = \Sigma_2 e^{-\alpha\{v+2m'K+2e\, L\}^2-\alpha_1\{v_1+2m'K_1+2+2n'L_1\}^2}$$

so folgt: $e^{-\alpha(u^2+u^2)-\alpha_1(u_1^2-v_1^2)} P_3(u,u_1) P_3(v,v_1) = \Sigma_2 \Sigma_2 e - \Phi$,

wo:

$$\Phi = \alpha\{(u+2mK+2nL)^2+(v+2m'K+2n'L)^2\}$$
$$+\alpha_1\{(u_1+2mK_1+2nL_1)^2+(v_1+2m'K_1+2n'L_1)^2\}.$$

Wegen $p^2+q^2=\frac{1}{2}(p+q)^2+\frac{1}{2}(p-q)^2$ lässt sich der vorstehende Ausdruck für φ auch schreiben:

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi &= 2\alpha\left\{\frac{u+v}{2}+(m+m')K+(n+n')L\right\}^2 \\ &+2\alpha_1\left\{\frac{u_1+v_1}{2}+(m+m')K+_1(n+n')L_1\right\}^2 \\ &+2\alpha\left\{\frac{u-v}{2}+(m-m')K+(n+n')L\right\}^2 \\ &+2\alpha_1\left\{\frac{u_1-v_1}{2}+(m-m')K_1+(n-n')L_1\right\}^2 \end{aligned}\right.$$

Die Zahlen $m+m'$, $m-m'$ sind gleichzeitig gerade und ungerade, dasselbe ist der Fall mit den Zahlen $n+n'$ und $n-n'$. Setzt man den Werth von Φ aus 3) in die Gleichung 2), so unterscheide man die folgenden vier Fälle:

$m+m'$ gerade, $n+n'$ gerade;
$m+m'$ ungerade, $n+n'$ gerade;
$m+m'$ gerade, $n+n'$ ungerade;
$m+m'$ ungerade, $n+n'$ ungerade.

Die rechte Seite der Gleichung 3) lässt sich dann auf folgende Weise darstellen:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Sigma_2 e^{-2\alpha\left\{\frac{u+v}{2}+2mK+2nL\right\}^2-2\alpha_1\left\{\frac{u_1+v_1}{2}+2mK_1+2nL_1\right\}^2} \times \\
&\Sigma_2 e^{-2\alpha\left\{\frac{u-v}{2}+2m'K+2n'L\right\}^2-2\alpha_1\left\{\frac{u_1-v_1}{2}+2m'K_1+2n'L_1\right\}^2} \\
&+ \\
&\Sigma_2 e^{-2\alpha\left\{\frac{u+v}{2}+(2m+1)K+2nL\right\}^2-2a_2\left\{\frac{u_1+v_1}{2}+(2m+1)K_1+2nL_1\right\}^2} \times \\
&\Sigma_2 e^{-2\alpha\left\{\frac{u-v}{2}+(2m'+1)K+2n'L\right\}^2-2\alpha_1\left\{\frac{u_1-v_1}{2}+(2m'+1)K_1+2n'L_1\right\}^2} \\
&+ \\
&\Sigma_2 e^{-2\alpha\left\{\frac{u+v}{2}+2mK+(2n+1)L\right\}^2-2\alpha_1\left\{\frac{u_1+v_1}{2}+2mK_1+(2n+1)L_1\right\}^2} \times \\
&\Sigma_2 e^{-2\alpha\left\{\frac{u-v}{2}+2m'K+(2n'+1)L\right\}^2-2\alpha_1\left\{\frac{u_1-v_1}{1}+2m'K_1+(2n'+1)L_1\right\}^2} \\
&+ \\
&\Sigma_2 e^{-2\alpha\left\{\frac{u+v}{2}+(2m+1)K+(2n'+1)L\right\}^2-2\alpha_1\left\{\frac{u_1+v_1}{2}+(2m+1)K_1+(2n'+1)L_1\right\}^2} \\
&\Sigma_2 e^{-2\alpha\left\{\frac{u-v}{2}+(2m'+1)K+(2n'+1)L\right\}^2-2\alpha_1\left\{\frac{u_1-v_1}{2}+(2m'+1)K_1+(2n'+1)L_1\right\}^2} \times
\end{aligned}\right.$$

In dem vorstehenden Ausdruck nehmen nun m, n, m', n' unabhängig von einander alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis ∞ an. Man bemerkt augenblicklich, dass der in 4) aufgestellte Ausdruck sich auf Functionen P_3, Q_3, R_3, S_3 reduciren lässt, in denen α, α_1 respective durch $2\alpha, 2\alpha_1$ ersetzt sind. Bezeichnet man diese Functionen, in denen $2\alpha, 2\alpha_1$ statt α, α_1 steht durch P_3', Q_3', R_3', S_3', so lässt sich der in 4) gegebene Ausdruck auch auf folgende Weise darstellen:

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} & e^{-2\alpha\left\{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right\}-2\alpha_1\left\{\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)^2+\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)^2\right\}} \\ & \quad P_3'\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u_1+v_1}{2}\right)P_3'\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u_1-v_1}{2}\right) \\ & \quad + Q_3'\left(\frac{u_1+v}{2}, \frac{u_1+v_1}{2}\right)Q_3'\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u_1-v_1}{2}\right) \\ & \quad + R_3'\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u_1+v_1}{2}\right)R_3'\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \\ & \quad + S_3'\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u_1+v_1}{2}\right)S_3'\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u_1-v_1}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Dieser Ausdruck ist gleich der linken Seite der Gleichung 2). Setzt man einfach $P_3(u)$ statt $P_3(u_1 u_1)$, welche Vereinfachung zu keinem Irrthum veranlassen kann, so ergiebt sich die Gleichnng:

$$\begin{aligned} P_3(u)P_3(v) = {} & P_3'\left(\frac{u+v}{2}\right)P_3'\left(\frac{u-v}{2}\right) + Q_3'\left(\frac{u+v}{2}\right)Q_3'\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ & + R_3'\left(\frac{u+v}{2}\right)R_3'\left(\frac{u-v}{2}\right) + S_3'\left(\frac{u+v}{2}\right)S_3'\left(\frac{u-v}{2}\right), \end{aligned}$$

oder $\frac{u+v}{2} = p$, $\frac{u-v}{2} = q$ gesetzt:

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} P_3(p+q)P_3(p-q) = {} & P_3'(p)P_3'(q) + Q_3'(p)Q_3'(q) \\ & + R_3'(p)R_3'(q) + S_3'(p)S_3'(q). \end{aligned}\right.$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man folgende Gleichungen:

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} Q_3(p+q)A_3(p-q) = {} & P_3'(p)Q_3'(q) + P_3'(q)Q_3'(p) \\ & + R_3'(p)S_3'(q) + S_3'(p)R_3'(q), \\ R_3(p+q)R_3(p-q) = {} & P_3'(p)R_3'(q) + R_3'(p)P_3'(q) \\ & + Q_3'(p)S_3'(q) + S_3'(p)Q_3'(q), \\ S_3(p+q)S_3(p-q) = {} & P_3'(p)S_3'(q) + S_3'(p)P_3'(q) \\ & + Q_3'(p)R_3'(q) + R_3'(p)Q_3'(q). \end{aligned}\right.$$

Es werde zur Abkürzung gesetzt:

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} & P_3'\left(\frac{w-x}{2}\right)=a,\ P_3'\left(\frac{w+x}{2}\right)=a',\ P_3'\left(\frac{y-z}{2}\right)=A,\ P_3'\left(\frac{y+z}{2}\right)=A', \\ & Q_3'\left(\frac{w-x}{2}\right)=b,\ Q_3'\left(\frac{w+x}{2}\right)=b',\ Q_3'\left(\frac{y-z}{2}\right)=B,\ Q_3'\left(\frac{y+z}{2}\right)=B', \\ & R_3'\left(\frac{w-x}{2}\right)=c,\ R_3'\left(\frac{w+x}{2}\right)=c',\ R_3'\left(\frac{y-z}{2}\right)=C,\ R_3'\left(\frac{y+z}{2}\right)=C', \\ & S_3'\left(\frac{w-x}{2}\right)=d,\ S_3'\left(\frac{w+x}{2}\right)=d',\ S_3'\left(\frac{y-z}{2}\right)=D,\ S_3'\left(\frac{y+z}{2}\right)=D'. \end{aligned}\right.$$

Bildet man die Producte $P_3(w)\,P_3(x)$ und $P_3(y)\,P_3(z)$ multiplicirt dieselben mit einander, verfährt ebenso mit den Functionen Q_3, R_3, S_3, so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichungen 8):

$$
9)\quad \left\{\begin{aligned}
&P_3(w)P_3(x)P_3(y)P_3(z)+Q_3(w)Q_3(x)Q_3(y)Q_3(z)\\
&+R_3(w)R_3(x)R_3(y)R_3(z)+S_3(w)S_3(x)S(y)S_3(z)\\
&=(aa'+bb'+cc'+dd')(AA'+BB'+CC'+DD')\\
&+(ab'+ba'+cd'+dc')(AB'+BA'+CD'+DC')\\
&+(ac'+a'c+bd'+b'd)(AC'+A'C+BD'+B'D)\\
&+(ad'+a'd+bc'+b'c)(AD'+A'D+BC'+B'C).
\end{aligned}\right.
$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bleibt unverändert, wenn respective a', b', c', d' mit A, B, C, D vertauscht worden. Die rechte Seite der Gleichung 9) lässt sich also auch auf folgende Art schreiben:

$$
10)\quad \left\{\begin{aligned}
&(aA+bB+cC+dD)(a'A'+b'B'+c'C'+d'D')\\
&+(aB+bA+cD+dC)(a'B'+b'A'+c'D'+d'C)\\
&+(aC+cA+bD+dB)(a'C'+c'A'+b'D'+d'C')\\
&+(aD+dA+bC+cB)(a'D'+d'A'+b'C'+c'B').
\end{aligned}\right.
$$

Hier findet nun der Umstand statt, dass jeder der eingeklammerten Factoren in dem vorstehenden Ausdruck sich auf die Functionen P_3, Q_3, R_3, S_3 reduciren lässt. Mit Rücksicht auf 8) ist:

$$
\begin{aligned}
aA+bB+cC+dD=P_3'\left(\frac{w-x}{2}\right)P_3'\left(\frac{y-z}{2}\right)+Q_3'\left(\frac{w-x}{2}\right)Q_3'\left(\frac{w-x}{2}\right)\\
+R_3'\left(\frac{w-z}{2}\right)R_3'\left(\frac{y-z}{2}\right)+S_3'\left(\frac{w-x}{2}\right)\;{}'\left(\frac{y-z}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Setzt man in 6) $p=\frac{w-x}{2}$, $q=\frac{y-z}{2}$, so folgt, mittelst der so erhaltenen Gleichung:

$$
11)\quad aA+bB+cC+dD=P_3\left(\frac{w-x+y-z}{2}\right)P_3\left(\frac{w-x-y+z}{2}\right).
$$

Ebenso ist:

$$
12)\quad a'A'+b'B'+c'C'+d'D'=P_3\left(\frac{w+x+y+z}{2}\right)P_3\left(\frac{w+x-y-z}{2}\right).
$$

Auf ganz analoge Weise lassen sich in 10) die übrigen Factoren reduciren. Führt man unter den Functionszeichen P_3, Q_3, R_3, S_3 beide Argumente ein, so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&P_3(w,w_1)P_3(x,x_1)P_3(y,y_1)P_3(z,z_1)\\
&+Q_3(w,w_1)Q_3(x,x_1)Q_3(y,y_1)Q_3(z,z_1)\\
&+R_3(w,w_1)R_3(x,x_1)R_3(y,y_1)R_3(z,z_1)\\
&+S_3(w,w_1)S_3(x,x_1)S_3(y,y_1)S_3(z,z_1)\\
&=P_3(w',w'_1)P_3(x',x'_1)P_3(y',y'_1)P_3(z',z'_1)\\
&+Q_3(w',w'_1)Q_3(x',x'_1)Q_3(y',y'_1)Q_3(z',z'_1)\\
&+R_3(w',w'_1)R_3(x',x'_1)R_3(y',y'_1)R_3(z',z'_1)\\
&+S_3(w',w'_1)S_3(x',x'_1)S_3(y',y'_1)S_3(z',z'_1),
\end{aligned}
$$

wo:

$$\begin{aligned} w' &= \tfrac{1}{2}(w+x+y+z), & w'_1 &= \tfrac{1}{2}(w_1+x_1+y_1+z_1),\\ x' &= \tfrac{1}{2}(w+x-y-z), & x'_1 &= \tfrac{1}{2}(w_1+x_1-y_1-z_1),\\ y' &= \tfrac{1}{2}(w-x+y-z), & y'_1 &= \tfrac{1}{2}(w_1-x_1+y-z_1),\\ z' &= \tfrac{1}{2}(w-x-y+z), & z'_1 &= \tfrac{1}{2}(w_1-x_1-y_1+z_1). \end{aligned}$$

aus

$$w'^2+x'^2+y'^2+z'^2=w'^2+x'^2+y^{2\prime}+z^2,$$
$$w_1'^2+x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2=w_1^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2,$$

so gilt die obige Gleichung auch noch, wenn allgemein

$$\varrho P_3(u,u_1),\ \varrho Q^3(u,u_1),\ \varrho R_3(u,u_1),\ \varrho S_3(u,u_1)$$

statt P_3, Q_3, R_3, S_3 gesetzt wird, wo $\varrho=e^{-(\alpha u^2+\alpha_1 u_1^2)}$.

II. Ueber einige Identitäten. Von Dr. E. v. Hunyady.

Sind A, B, C, D vier Punkte, die in einer Gerade liegen, so besteht bekanntlich die folgende Gleichung

$$AB.CD-AC.BD+AD.BC=0.$$

Von dieser Gleichung ausgehend hat Herr **Gretschel** in Theil 45 (p. 194) des **Grunert**'schen Archives die Verallgemeinerung dieser longimetrischen Relation auf die Ebene und Raum mittelst rein geometrischer Betrachtungen gegeben. (Vergl. die Gleichung 19) und 14) a. a. O.) Zu der Eingangs angegebenen, wie zu den beiden letzterwähnten Gleichungen können wir noch auf folgende Weise gelangen.

Es bestehen nämlich die folgenden Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{vmatrix} 1\,x_1\,1\,x_1\\ 1\,x_2\,1\,x_2\\ 1\,x_3\,1\,x_3\\ 1\,x_4\,1\,x_4 \end{vmatrix}=0.$$

$$2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3\\ 1 & x_4 & y_4 & 1 & x_4 & y_4\\ 1 & x_5 & y_5 & 1 & x_5 & y_5\\ 1 & x_6 & y_6 & 1 & x_6 & y_6 \end{vmatrix}=0.$$

$$3)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4\\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 & x_5 & y_5 & z_5\\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 & x_6 & y_6 & z_6\\ 1 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 & x_7 & y_7 & z_7\\ 1 & x_8 & y_8 & z_8 & 1 & x_8 & y_8 & z_8 \end{vmatrix}=0.$$

Bedeuten nun in der ersten dieser Identitäten die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 die Entfernungen der vier in einer Geraden liegenden Punkte 1, 2, 3, 4 von einem fixen Punkte 0, der sich ebenfalls in derselben Geraden befindet, ferner in der zweiten Identität die Grössen x_i, y_i die orthogonalen Coordinaten des Punktes i in der Ebene, sowie in der dritten Identität x_i, y_i, z_i die orthogonalen Coordinaten des Punktes i im Raume, so sind die Gleichungen 1), 2), 3) die von Herrn Gretschel angegebenen, nur müssen wir noch selbe auf eine andere Form bringen, damit sie mit jenen der Form nach übereinstimmen und einer geometrischen Deutung fähig seien.

Zerlegen wir nun zu diesem Zwecke die (in 1 vorkommende Determinante in eine Summe von Producten aus Determinanten zweiten Grades, die in 2) vorkommende in eine Summe von Producten aus Determinanten zweiten und dritten Grades und die in 3) vorkommende in eine Summe von Producten aus Determinanten vierten Grades, was nach einem bekannten Determinantensatze immer möglich ist (vergl. Baltzer, 2. Aufl. §.4, 4), so erhalten wir, da in jedem Falle zwei und zwei solche Producte einander gleich sind, in 1) drei, in 2) zehn und in 3) fünf und dreissig Glieder. Führen wir dann in 1), 2), 3) der Reihe nach die folgenden Abkürzungen ein:

$$\begin{vmatrix} 1 & k_i \\ 1 & k_k \end{vmatrix} = (ik), \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{vmatrix} = (ikl), \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix} = (iklm),$$

so bedeuten, wie hieraus ersichtlich, (ik), (ikl) und $(iklm)$ respective die Länge der Strecke ik, den doppelten Flächeninhalt des von dem Punkten i, k, l gebildeten Dreieckes und das sechsfache Volumen des von den Punkten i, k, l, m gebildeten Tetraeders. Die Identitäten 1), 2), 3) gehen unter Einführung dieser abgekürzten Berechnungen in die folgenden über:

$$4) \qquad (12)(34)-(13)(24)+(14)(23)=0.$$

$$5) \quad \begin{cases} (123)(456)-(124)(356)+(125)(346)-(126)(345) \\ +(134)(256)-(135)(246)+(136)(245)+(145)(236) \\ \qquad -(146)(235)+(156)(234)=0. \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} (1234)(5678)-(1235)(4678)+(1236)(4578)-(1237)(4568) \\ +(1238)(4567)+(1245)(3678)-(1246)(3578)+(1247)(3568) \\ -(1248)(3567)+(1256)(3478)-(1257)(3468)+(1258)(3467) \\ +(1267)(3458)-(1268)(3457)+(1278)(3456)-(1345)(2678) \\ +(1346)(2578)-(1347)(2568)+(1348)(2567)-(1356)(2478) \\ +(1357)(2468)-(1358)(2467)-(1367)(2458)+(1368)(2457) \\ -(1378)(2456)+(1456)(2378)-(1457)(2368)+(1458)(2367) \\ +(1467)(2358)-(1468)(2357)+(1478)(2356)-(1567)(2348) \\ +(1568)(2347)-(1578)(2346)+(1678)(2345)=0. \end{cases}$$

Betrachten wir ferner vier Strahlen eines Büschels in der Ebene und bezeichnen die Strahlen der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, sowie die Winkel, welche diese Strahlen mit einem zu demselben Büschel gehörigen fixen

Strahl bilden, beziehungsweise mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und derjenigen Winkel, den die Strahlen i, k mit einander bilden mit (i, k), so erhalten wir, wenn wir den ersten Theil der folgenden Identität:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_4 & \cos\alpha_4 & \sin\alpha_4 & \cos\alpha_4 \end{vmatrix} = 0$$

nach einem bereits citirten Determinantensatze in eine Summe von Producten partialer Determinanten zweiten und zweiten Grades zerlegen, die folgende identische Gleichung:

$$7) \quad \sin(12)\sin(34) - \sin(13)\sin(24) + \sin(14)\sin(23) = 0.$$

Zu einer Verallgemeinerung der vorhergehenden Gleichung gelangen wir durch die Betrachtung der folgenden Identität:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 & \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} = 0,$$

die zwischen sechs Strahlen eines Büschels im Raume stattfindet, indem wir durch α_i, β_i, γ_i die Cosinusse derjenigen Winkeln bezeichnen, die der Strahl i respective mit den Axen der x, y, und z bildet.

Zerlegen wir auch in der vorliegenden Gleichung den ersten Theil in eine Summe Producten aus Determinanten dritten und dritten Grades, und führen für die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k \\ \alpha_l & \beta_l & \gamma_l \end{vmatrix}$$

die gebräuchliche Bezeichnung $\sin(ikl)$ ein, so geht die angegebene Identität in die folgende über:

$$8) \left\{ \begin{aligned} & \sin(123)\sin(456) - \sin(124)\sin(356) + \sin(125)\sin(346) \\ & - \sin(126)\sin(345) + \sin(134)\sin(256) - \sin(135)\sin(246) \\ & + \sin(136)\sin(245) + \sin(145)\sin(236) - \sin(146)\sin(235) \\ & + \sin(156)\sin(234) = 0. \end{aligned} \right.$$

III. Ueber die Auflösung des sphärischen Dreiecks, wenn die drei Höhen desselben gegeben sind. Von Dr. E. v. Hunyady.

Im 51. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie hat sich Herr Unferdinger mit dem in der Aufschrift erwähnten Problem beschäftigt, und ist unter der Voraussetzung, dass a, b, c die drei Seiten und h_1, h_2, h_3, diejenigen drei Höhen das sphärischen Dreiecks bedeuten, welche je $< \frac{\pi}{2}$ sind von folgenden leicht zu erweisenden Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} \sin h_1 = \dfrac{2H}{\sin a} \\ \sin h_2 = \dfrac{2H}{\sin b} \\ \sin h_3 = \dfrac{2H}{\sin c} \end{cases}$$

ausgegangen, in welchen

2) $H = \sqrt{[(\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)]}$, wenn $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Aus den Gleichungen 1) ist ersichtlich, dass es hauptsächlich darauf ankommt, die Grösse H als Function der drei Höhen darzustellen, was durch Elimination der Grössen a, b, c aus den vier Gleichungen 1) und 2) erzielt wird. Diese Elimination mittelst Anwendung von Determinanten zu reproduciren, bildet den Gegenstand der folgenden Zeilen.

Setzt man man der Kürze halber:

$$3)\quad \begin{cases} \sin s + 2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c = \alpha \\ \sin(s-a) - 2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c = \beta \\ \sin(s-b) - 2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c = \gamma \\ \sin(s-c) - 2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}c = \delta \end{cases}$$

so findet man durch Betrachtung der folgenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

indem man dieselbe entwickelt, die Werthe für α, β, γ, δ einsetzt und dann noch reducirt nach und nach

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)$$

$$= \{\sin s + \sin(s-a) + \sin(s-b) + \sin(s-c) - 4\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c\}.$$

$$. \{\sin s + \sin(s-a) - \sin(s-b) - \sin(s-c) + 4\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c\}.$$

$$. \{\sin s - \sin(s-a) - \sin(s-b) - \sin(s-c) + 4\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c\}.$$

$$. \{\sin s - \sin(s-a) - \sin(s-b) + \sin(s-c) + 4\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c\}$$

$$= 16 \sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)$$

also auch

$$4)\quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \lambda & \beta & \alpha \end{vmatrix} = 16H^2.$$

Betrachtet man die folgenden vier Grössen

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} &(\sin a+\sin b+\sin c)^2-4\alpha^2\\ &(-\sin a+\sin b+\sin c)^2-4\beta^2\\ &(\sin a-\sin b+\sin c)^2-4\gamma^2\\ &(\sin a+\sin b-\sin c)^2-4\delta^2 \end{aligned}\right.$$

so findet man, indem man für α, β, γ, δ aus 3) die Werthe setzt und durchgehends die Sinusse und Cosinusse der halben Winkeln einführt, dass die betrachteten vier Grössen unter einander gleich sind, nämlich

$$\begin{aligned} &=4\{(\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a)^2+(\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b)^2+(\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c)^2\}\\ &-4\{(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c)^2+(\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)^2\\ &\quad+(\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)^2+(\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c)^2\}; \end{aligned}$$

dieser Ausdruck lässt sich noch durch Uebergang zu den ganzen Winkeln auf folgende Form bringen:

$$(\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c)-2(1-\cos a\cos b\cos c),$$

indem man bemerkt, dass sich die Gleichheit der zweiten Glieder aus der Betrachtung der folgenden Identität:

$$\cos a\cos b\cos c=(\cos^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{1}{2}a)(\cos^2\tfrac{1}{2}b-\sin^2\tfrac{1}{2}b)(\cos^2\tfrac{1}{2}c-\sin^2\tfrac{1}{2}c)$$

ergiebt. Der letztgegebene Ausdruck lässt sich noch wie folgt schreiben:

$$1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=4H^2.$$

Es sind also die vier Grössen in 5) sämmtlich gleich $4H^2$. Setzt man noch in den Ausdrücken in 5) für $\sin a\ \sin b\ \sin c$ ihre Werthe aus den Gleichungen 1), so ergeben sich für α, β, γ, δ die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} \alpha&=\mp H\sqrt{\left(\frac{1}{\sin h_1}+\frac{1}{\sin h_2}+\frac{1}{\sin h_3}\right)^2-1}=\pm Hf\\ \beta&=\pm H\sqrt{\left(-\frac{1}{\sin h_1}+\frac{1}{\sin h_2}+\frac{1}{\sin h_3}\right)^2-1}=\pm Hf_1\\ \gamma&=\pm H\sqrt{\left(\frac{1}{\sin h_1}+\frac{1}{\sin h_2}+\frac{1}{\sin h_3}\right)^2-1}=\pm Hf_2\\ \delta&=\pm H\sqrt{\left(\frac{1}{\sin h_1}+\frac{1}{\sin h_2}+\frac{1}{\sin h_3}\right)^2-1}=\pm Hf_3 \end{aligned}$$

indem man die Wurzelgrössen der Reihe nach mit f, f_1, f_2, f_3 bezeichnet. Setzt man ferner die eben gefundenen Werthe von α, β, γ, δ in die Eingangs angegebene Determinante, indem man bemerkt, dass f, da sowohl α, H immer positiv sind, nur positiv sein kann, so ergiebt sich

$$7)\quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta\\ \beta & \alpha & \delta & \gamma\\ \gamma & \delta & \alpha & \beta\\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} = H^4 \begin{vmatrix} f & \pm f_1 & \pm f_2 & \pm f_3\\ \pm f_1 & f & \pm f_3 & \pm f_2\\ \pm f_2 & \pm f_3 & f & \pm f_1\\ \pm f_3 & \pm f_2 & \pm f_1 & f \end{vmatrix}$$

und durch Vergleichung der beiden Gleichungen 4) und 7) erhält man endlich:

$$H^2 = \frac{16}{\begin{vmatrix} f & \pm f_1 & \pm f_2 & \pm f_3 \\ \pm f_1 & \pm f & \pm f_3 & \pm f_2 \\ \pm f_2 & \pm f_3 & f & \pm f_1 \\ \pm f_3 & \mp f_2 & \pm f_1 & f \end{vmatrix}}.$$

Aus der vorliegenden Gleichung ergeben sich die folgenden acht möglichen Fälle:

I.	$+f_1$	$+f_2$	$+f_3$
II.	$-f_1$	$-f_2$	$+f_3$
III.	$-f_1$	$+f_2$	$-f_3$
IV.	$+f_1$	$-f_2$	$-f_3$
V.	$-f_1$	$+f_2$	$+f_3$
IV.	$+f_1$	$-f_2$	$+f_3$
VII.	$+f_1$	$+f_2$	$-f_3$
VIII.	$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$

H^2 erhält aber nur zwei verschiedene Werthe, entsprechend den ersten vier und letzten vier Fällen; bezeichnet man diese Werthe von H mit H_1 und H_2, so erhält man

$$9)\qquad H_1^2 = \frac{16}{\Delta_1}, \quad H_2^2 = \frac{16}{\Delta_2},$$

wenn man der Kürze halber

$$\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f & f_3 & f_2 \\ f_2 & f_3 & f & f_1 \\ f_3 & f_2 & f_1 & f \end{vmatrix} = \Delta; \qquad \begin{vmatrix} -f & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & -f & f_3 & f_2 \\ f_2 & f_3 & -f & f_1 \\ f_3 & f_2 & f_1 & -f \end{vmatrix}$$

setzt. Aus den Gleichungen 9) ergiebt sich, dass $\frac{16}{H_1^2}$ und $\frac{16}{H_2^2}$ die Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichung sind:

$$10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2\{f^4 + f_1^4 + f_2^4 + f_3^4 - 2(f^2 f_1^2 + f^2 f_2^2 + f^2 f_3^2 \\ \qquad + f_1^2 f_2^2 + f_1^2 f_3^2 + f_2^2 f_3^2)\} x + \Delta_1 \Delta_2 = 0, \end{array} \right.$$

die durch Einführung der Werthe für die Grössen f und Benutzung der folgenden Abkürzungen

$$11)\qquad \frac{1}{\sin h_1} = u, \quad \frac{1}{\sin h_2} = v, \quad \frac{1}{\sin h_3} = w$$

in die folgende übergeht

$$12)\qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 16\{u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2 v^2 + u^2 w^2 + v^2 w^2 \\ + u^2 + v^2 + w^2) + 1\} x + 16^3 u^2 v^2 w^2 = 0, \end{array} \right.$$

zu welcher man direct, von der Gleichung

$$4H^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

ausgehend, gelangen kann. Die folgende quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 - \frac{1}{4}(u^2 + v^2 + w^2 - 1)^2}{u^2v^2w^2} x + \frac{1}{u^2v^2w^2} = 0,$$

die sich ebenfalls aus der eben angegebenen ableiten lässt, enthält die Werthe von $4H_1^2$ und $4H_2^2$ in der Form als Wurzeln, wie sich dieselben aus den Gleichungen 334) und 339) von Herrn Junghanns Tetraedrometrie (II. Theil, p. 116 und 119) ergeben.

Schliesslich mag noch erwähnt werden, dass da sowohl H_1 wie auch H_2 immer positiv sein müssen, die Quadrate dieser Grössen dieselben immer eindeutig bestimmen.

Pesth, den 13. September 1866.

IV. Ueber die beiden Sonnenfinsternisse des Jahres 1867. Von Dr. E. Weiss.

Die erste der beiden Sonnenfinsternisse des Jahres 1867 fällt auf den 6. März und ist eine ringförmige. Bei derselben ist Madeira das erste bewohnte Land, welches in der Zone der Ringförmigkeit liegt. Diese Zone durchschneidet sodann das nordwestliche Afrika, Süditalien, Dalmatien (wo Ragusa und Cattaro in derselben liegen), Bosnien und den Südosten Siebenbürgens, dann läuft sie über Jassy zwischen Moskau und Kazan hindurch nach Sibirien bis zu den Ufern des Jenisei, wo sie hart an der Grenze des nördlichen Polarkreises ihr Ende erreicht.

Diese Finsterniss hat deshalb ein grösseres Interesse, weil sie die letzte ringförmige ist, die Oesterreich im Laufe dieses Jahrhunderts erblickt, und überdies die Breite des Ringes in Dalmatien und Siebenbürgen eine sehr geringe ist. Ueberhaupt ist diese Finsterniss für ganz Mitteleuropa eine so bedeutende, dass ihr, was die Grösse derselben betrifft, in diesem Jahrhunderte nur noch die beiden Finsternisse vom 22. December 1870 und 19. August 1887 als ebenbürtig an die Seite gestellt werden können. Was endlich Wien betrifft, wird daselbst die Finsterniss im Ganzen $2^h\ 51^m$ dauern, und zur Zeit der Mitte um $10^h\ 56^m\ 5^s$ mittlere Zeit eine Grösse von $10\frac{3}{4}$ Zoll erreichen.

Die zweite Sonnenfinsterniss am 29. August 1867 ist eine totale; indess durchschneidet bei derselben der Kernschatten in Südamerika nur Chile und einige Länder der argentinischen Conföderation, und verliert sich dann in den atlantischen Ocean und das antarktische Meer. Von leichter zugänglichen Orten werden daher nur Montevideo und Buenos Ayres die Sonne, und zwar durch $2\frac{1}{4}$ Minuten total verfinstert sehen. (Wiener Akad.)

V. Ueber den Sternschnuppenfall im November 1866. Von Dr. J. F. Julius Schmidt, Director der Sternwarte zu Athen.

Bekanntlich wird seit längerer Zeit, besonders seit der glänzenden Erscheinung am 13. November 1835 in Nordamerika, zumal auf Olber's

Ansicht sich berufend, ein Maximum der Häufigkeit jener Meteore in 34 Jahren erwartet. In den letzten Jahren war die Häufigkeit al dings im Zunehmen. Die ausserordentliche und glanzvolle Erschein in der Nacht des 13./14. November 1866 zu Athen bestätigt die \ muthung einer periodischen Wiederkehr und stellt das wirkliche M mum auf das Jahr 1867 mit einiger Wahrscheinlichkeit in Aussi Director Schmidt beobachtete in Gesellschaft von drei Personen, wel er seit Jahren, obwohl sie anderen wissenschaftlichen Beschäftigun fern stehen, zu dem Zwecke dieser Beobachtungen eingeübt hatte. Jed falls war dieses Jahr bestimmt und unzweifelhaft die grösste Häufigl nur in der Nacht vom 13. auf den 14. November, und nament nach 14 Uhr.

Als Herr Schmidt selbst um 16 Uhr auf die Terrasse kam, die Menge der Sternschnuppen aller Grössen ausserordentlich, d nicht mit Regen- oder Schneefall zu vergleichen. Doch reichte die wöhnliche Art der Beobachtung nicht aus. Das Auge wurde fort fort auf gewisse Stellen am Himmel angezogen, wo die Meteore ohne Unterbrechung in parallelen Bahnen neben einander hinflogen, mentlich im grossen Hund, im Orion und in der Hydra. Dann ka wieder grössere Phänomene, als Boliden oder Feuerkugeln bezeich wenn ihr Glanz grösser als der des Sirius war. Auch diese flogen oft drei bis fünf innerhalb weniger Secunden nachbarlich neben einan Häufig erglänzten ausserdem eigenthümliche langsame Lichtschimmer Meteoren, die ihrer Lage wegen nicht selbst gesehen werden konn Eines liess sich ganz mit dem Meteor des 18. October 1863 vergleich wie dieses erleuchtete es die ganze Landschaft stärker als der Vollm

Es genügte eine Minute, um zu erkennen, dass alle Meteorbah rückwärts verlängert gedacht, den bekannten Convergenzpunkt im Lö trafen. Von $16^h 0$ bis $16^h 2$ nahm die Häufigkeit der Meteore rasch Herr Schmidt verfolgte dann einige der wunderbaren Schweifbildun mit dem Kometensucher. Um $16^h 8^m$ erloschen momentan fast alle Ste in dem strahlend grünen Lichte eines mächtigen Meteors ersten Ran und es erglühte die Stadt nebst der ganzen Landschaft wie im Li des bengalischen Feuers. Der blendende gekrümmte Schweif ward sc in den ersten Secunden an dem 8mal vergrössernden Kometensucher trachtet. Erscheinung gewöhnlich. Nach 5 Minuten aufgelöst in r gelbes Gewölk, vielfach getrennt und durchbrochen, ähnlich theilw den gekräuselten und gedrängten Dampfmassen an der Mündung e abgefeuerter Geschütze. Dem freien Auge schien er eine grosse röthli vom Monde beleuchtete Cumuluswolke zwischen den beiden Bären. langsamer Lichtabnahme mindestens 51 Minuten dem freien Auge si bar, bis die Morgendämmerung ihn erlöschen liess. (Wiener Akad.

III.

Kurzer Abriss einer Theorie der Kugelfunctionen und Ultrakugelfunctionen.

Von

Dr. Carl Neumann,
ordentlicher Professor a. d. Universität Tübingen.

Um die Lage eines Punktes auf der Kugel zu bestimmen, können zwei beliebige Systeme von Kegelflächen in Anwendung gebracht werden, welche ihren gemeinschaftlichen Scheitelpunkt im Centrum der Kugel haben; gleichgültig, ob die Kegelflächen des einen Systemes zu denen des andern orthogonal sind oder nicht; gleichgültig, ob die Natur dieser Kegelflächen eine algebraische oder transcendente ist. Sind nämlich zwei solche Systeme von Kegelflächen in irgend welcher Weise festgesetzt, so können die Parameter dieser Systeme unmittelbar als die beiden Coordinaten eines Punktes auf der Kugel angesehen werden, also unmittelbar verwendet werden, um die Lage eines solchen Punktes zu bestimmen.

Derartige Systeme von Kegelflächen können nun, um auf wohlbekannte und häufig vorkommende Specialfälle näher einzugehen, z. B. dadurch erhalten werden, dass man zwei beliebig gewählte feste Kugelradien der Betrachtung zu Grunde legt. Sind u und v die beiden Winkel, unter welchen irgend ein beweglicher Kugelradius gegen jene beiden geneigt ist, so werden $u+v=\alpha$ und $u-v=\beta$ die Gleichungen für zwei Systeme von elliptischen Kegelflächen sein, die gegen einander orthogonal sind und die jene festen Radien zu Brennlinien haben. Die hier auftretenden Parameter α und β können somit als die Coordinaten eines Punktes auf der Kugel angesehen werden; sie führen den Namen elliptische Coordinaten.

Der Winkel, welchen die beiden festen Radien oder Brennlinien mit einander einschliessen, kann beliebig gewählt werden. Nimmt man diesen Winkel gleich Null, so verwandelt sich von jenen beiden Systemen elliptischer Kegelflächen das eine in ein System von Rotationskegeln, das andere

in die diesen Rotationskegeln zugehörigen Meridianebenen. Demgemäss verwandeln sich die Parameter jener beiden Systeme von Kegelflächen in diesem Fall in die gewöhnlichen Coordinaten, nämlich in diejenigen welche man mit den Namen Breite und Länge zu bezeichnen pflegt.

Die elliptischen Coordinaten und die gewöhnlichen Coordinaten sind also nur ganz specielle Fälle der zu Anfang erwähnten allgemeinen Coordinaten.

Die Theorie der Kugelfunctionen ist bisher immer nur entwickelt worden mit Zugrundelegung jener speciellen Coordinaten. Legendre und Laplace, die Begründer dieser wichtigen Theorie, bedienten sich der gewöhnlichen, Lamé bediente sich der elliptischen Coordinaten. In der vorliegenden Abhandlung habe ich nun an Stelle dieser speciellen Coordinaten die allgemeinen Coordinaten zu Grunde zu legen versucht. Hierdurch wurde es nothwendig, bei der Entwickelung der in Rede stehenden Theorie einen ganz neuen Weg einzuschlagen und die bisher üblichen Methoden zu vertauschen mit gewissen anderen Methoden, mit Methoden, die denen ähnlich sind, welche Green und Gauss bei ihren allgemeinen Untersuchungen über das Potential in Anwendung gebracht haben.

Meine Arbeit wird zeigen, dass sich in Folge der so veränderten Grundlagen und Methoden einige Vortheile ergeben für die ganze Gestaltung der in Rede stehenden Theorie; sie wird, glaube ich, von Neuem den Satz bestätigen, dass das Allgemeinere zugleich auch das Einfachere zu sein pflegt.

§. 1.

Erinnerung an die Green'schen Sätze.

Sind U und V Functionen von x, y, z, und bezeichnet Δ die Operation*):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

so kann das über einen beliebigen Raum ausgedehnte dreifache Integral

$$\int\int\int (U \Delta V - V \Delta U)\, dx\, dy\, dz$$

bekanntlich umgewandelt werden in ein zweifaches Integral, nämlich umgewandelt werden in ein Integral, welches sich nicht über den Inhalt sondern über die Grenzfläche jenes Raumes hin erstreckt. Diese Umwandlung wird durch folgende Formel dargestellt:

$$1) \qquad \int\int\int (U \Delta V - V \Delta U) dx\, dy\, dz = \int\int \left(U \frac{\partial V}{\partial \nu} - V \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\omega.$$

*) Das runde ∂ dient hier und im Folgenden immer zur Andeutung der partiellen, das grade d hingegen zur Andeutung der totalen Differentiation.

Hier repräsentirt $d\omega$ ein zur Grenzfläche gehöriges Flächenelement, und ν die auf $d\omega$ errichtete äussere Normale. Zu bemerken ist indessen, dass diese Formel nur dann gültig ist, wenn die Functionen U, V und ebenso auch ihre ersten Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z},\quad \frac{\partial V}{\partial x},\quad \frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

innerhalb des gegebenen Raumes stetig sind.

Sind U und V zwei Functionen, welche innerhalb des gegebenen Raumes nicht nur den genannten Stetigkeitsbedingungen, sondern auch den Gleichungen $\Delta U = 0$, $\Delta V = 0$ Genüge leisten, so verwandelt sich die Formel 1) in folgende:

$$2)\qquad \iint\left(U\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) d\omega = 0.$$

Denn die linke Seite der Formel 1) verschwindet in diesem Fall. Nimmt man ferner in 1) an Stelle von U die Function

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

wo a, b, c die Coordinaten eines festen Punktes vorstellen sollen, der innerhalb des gegebenen Raumes liegt, und nimmt man gleichzeitig an Stelle von V wiederum eine Function, welche sowohl den vorhin genannten Stetigkeitsbedingungen, als auch der Gleichung $\Delta V = 0$ Genüge leistet, so verwandelt sich die Formel 1) in:

$$3)\qquad \iint\left(T\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial T}{\partial \nu}\right) d\omega = 4\pi\, V_1.$$

Unter V_1 ist hier derjenige besondere Werth zu verstehen, welchen die Function V im Punkte a, b, c besitzt*).

§. 2.

Definition der Kugelfunctionen.

An Stelle der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z mögen eingeführt werden die Polar-Coordinaten ϱ, φ, ψ. Es werde nämlich gesetzt:

$$4)\qquad \begin{aligned} x &= \varrho \cdot \Phi_1(\varphi,\psi) = \varrho \cdot \Phi_1, \\ y &= \varrho \cdot \Phi_2(\varphi,\psi) = \varrho \cdot \Phi_2, \\ y &= \varrho \cdot \Phi_3(\varphi,\psi) = \varrho \cdot \Phi_3, \end{aligned}$$

wo Φ_1, Φ_2, Φ_3 drei Functionen von φ, ψ vorstellen sollen, welche die Gleichung

$$5)\qquad \Phi^2{}_1 + \Phi^2{}_2 + \Phi^2{}_3 = 1$$

*) In Betreff einer ausführlichen Begründung der Formeln 1), 2), 3) verweise ich auf meine Schrift: „Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht concentrischen Kugelflächen *begrenzt wird.*" Halle. 1862. Seite 15—25.

identisch erfüllen. Unter so bewandten Umständen ergiebt sich aus den Gleichungen 4):

6) $$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Demnach repräsentirt ϱ die Entfernung des Punktes x, y, z vom Anfangspunkt.

Aus 4) folgt:

$$\frac{x}{z} = \frac{\Phi_1(\varphi, \psi)}{\Phi_3(\varphi, \psi)}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\Phi_2(\varphi, \psi)}{\Phi_3(\varphi, \psi)}.$$

Löst man diese beiden Gleichungen auf nach φ und ψ, so werden sich Werthe ergeben von folgender Form:

7) $$\varphi = \varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad \psi = \psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Daraus folgt, dass $\varphi =$ Const. und $\psi =$ Const. die Gleichungen zweier Systeme von Kegelflächen sind, die ihren gemeinschaftlichen Scheitel im Anfangspunkt haben. Ob diese beiden Systeme von Kegelflächen zu einander orthogonal oder anorthogonal sind, wird abhängen von der Beschaffenheit der zu Grunde gelegten Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3. Da wir in Betreff dieser Functionen, abgesehen von der Gleichung 5), keinerlei Voraussetzung machen wollen, so werden jene Kegelflächen im Allgemeinen anorthogonal sein. Also:

8) An Stelle der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z werden durch die Formeln 4) drei neue Coordinaten ϱ, φ, ψ eingeführt, von welchen ϱ den Parameter eines Systems concentrischer Kugelflächen vorstellt, während gleichzeitig φ und ψ die Parameter zweier Systeme von Kegelflächen vorstellen, die zu einander **anorthogonal** sind und ihren gemeinschaftlichen Scheitel im Centrum der Kugelflächen haben.

Aus den Gleichungen 4) folgt durch Differentiation:

9) $$\begin{aligned} dx &= \Phi_1 d\varrho + \varrho M_1 d\varphi + \varrho N_1 d\psi, \\ dy &= \Phi_2 d\varrho + \varrho M_2 d\varphi + \varrho N_2 d\psi, \\ dz &= \Phi_3 d\varrho + \varrho M_3 d\varphi + \varrho N_3 d\psi. \end{aligned}$$

Und hieraus folgt durch Auflösung nach $d\varrho$, $\varrho d\varphi$, $\varrho d\psi$:

10) $$\begin{aligned} d\varrho &= R_1 dx + R_2 dy + R_3 dz, \\ \varrho d\varphi &= P_1 dx + P_2 dy + P_3 dz, \\ \varrho d\psi &= Q_1 dx + Q_2 dy + Q_3 dz. \end{aligned}$$

Sämmtliche Grössen Φ, M, N, P, Q, R sind hier Functionen von φ, ψ, nämlich Functionen, welche unabhängig sind von ϱ.

Es sei

11) $$F = F(\varphi, \psi)$$

eine beliebig gegebene Function, welche ebenfalls nur φ, ψ enthält, und unabhängig ist von ϱ. Differentiirt man die Function nach x, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

oder, wenn man für $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ die aus 10) fliessenden Werthe substituirt:

$$\varrho\cdot\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial \varphi}P_1+\frac{\partial F}{\partial \psi}Q_1.$$ Desgleichen erhält man:

$$12)\qquad \varrho\cdot\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial \varphi}P_2+\frac{\partial F}{\partial \psi}Q_2,$$

$$\varrho\cdot\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial \varphi}P_3+\frac{\partial F}{\partial \psi}Q_3.$$

Die rechten Seiten in diesen drei Formeln sind Ausdrücke, welche, ebenso wie F selber, nur abhängen von φ, ψ, nämlich unabhängig sind von ϱ. Die Formeln zeigen also, dass, wenn der Ausdruck F nur von φ, ψ abhängt, Gleiches auch gelten muss von den Ausdrücken

$$\varrho\frac{\partial F}{\partial x},\quad \varrho\frac{\partial F}{\partial y},\quad \varrho\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Demgemäss bezeichnen wir die Werthe dieser drei Ausdrücke mit

$$\varrho\frac{\partial F}{\partial x}=F_1(\varphi,\psi)=F_1,$$

$$13)\qquad \varrho\frac{\partial F}{\partial y}=F_2(\varphi,\psi)=F_2,$$

$$\varrho\frac{\partial F}{\partial z}=F_3(\varphi,\psi)=F_3.$$

Differentiiren wir den ersten dieser Ausdrücke von Neuem, so ergiebt sich:

$$\varrho\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\varrho^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial \varrho}{\partial x}\cdot\varrho\frac{\partial F}{\partial x}=\varrho\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

oder, wenn man für $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$ den aus 10) fliessenden Werth substituirt:

$$\varrho^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+R_1\cdot\varrho\frac{\partial F}{\partial x}=\varrho\frac{\partial F_1}{\partial x}.$$

Nach unserer Voraussetzung sollte $F(\varphi,\psi)$ oder F eine nur von φ, ψ abhängende Function sein. Aus dieser Voraussetzung ergab sich, dass $\varrho\frac{\partial F}{\partial x}$ eine Function von gleicher Beschaffenheit war. Diese Function wurde bezeichnet mit $F_1(\varphi,\psi)$ oder F_1. Demnach wird $\varrho\frac{\partial F_1}{\partial x}$ eine Function von

wiederum gleicher Beschaffenheit sein. Wir bezeichnen dieselbe mit $F_{11}(\varphi, \psi)$ oder F_{11}. Unsere letzte Gleichung gewinnt dann folgendes Aussehen:

$$\varrho^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \varrho \frac{\partial F_1}{\partial x} - R_1 \cdot \varrho \frac{\partial F}{\partial x},$$

oder:

14)
$$\varrho^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F_{11} - R_1 \cdot F_1.$$

Hieraus folgt, dass $\varrho^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ eine Function ist, welche nur abhängt von φ, ψ, hingegen unabhängig ist von ϱ. Gleiches wird sich ergeben mit Bezug auf $\varrho^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ und $\varrho^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$; Gleiches also auch mit Bezug auf $\varrho^2 \Delta F$. Wir erhalten somit folgenden Satz:

15) **Versteht man unter F einen Ausdruck, welcher nur von φ, ψ abhängt, von ϱ hingegen unabhängig ist, so wird $\varrho^2 \Delta F$ jederzeit ein Ausdruck von derselben Beschaffenheit sein*).**

Es sei F nach wie vor eine nur von φ, ψ abhängende Function, und ϱ^p irgend welche ganze oder gebrochene, positive oder negative Potenz von ϱ. Alsdann ergiebt sich:

$$\frac{\partial(\varrho^p F)}{\partial x} = p\varrho^{p-1} \frac{\partial \varrho}{\partial x} F + \varrho^p \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Beachtet man, dass zufolge 6): $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, und dass mithin $\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho}$ ist, so verwandelt sich diese Formel in:

$$\frac{\partial(\varrho^p F)}{\partial x} = p\varrho^{p-2} x F + \varrho^p \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Hieraus folgt, wenn man von Neuem nach x differentiirt und abermals darauf achtet, dass $\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho}$ ist:

$$\frac{\partial^2(\varrho^p F)}{\partial x^2} = p\varrho^{p-2} F + p(p-2)\varrho^{p-4} x^2 F + 2p\varrho^{p-2} x \frac{\partial F}{\partial x} + \varrho^p \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

---

*) Dass Gleiches alsdann auch von den Ausdrücken

$$\varrho \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \varrho \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \varrho \frac{\partial F}{\partial z},$$
$$\varrho^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \varrho^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \ldots$$
$$\varrho^3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}, \ldots$$

gilt, folgt unmittelbar aus der Deduction des vorstehenden Satzes, fällt aber bei der nachfolgenden Untersuchung nicht weiter ins Gewicht.

Bildet man die analogen Formeln für die zweiten Differential-Quotienten von $\varrho^p F$ nach y und nach z, und addirt schliesslich alle drei Formeln, so erhält man (mit Benutzung des Operationszeichens Δ):

16) $$\Delta(\varrho^p F) = 3p\varrho^{p-2}F + p(p-2)\varrho^{p-2}F + 2p\varrho^{p-1}S + \varrho^p \Delta F.$$

Der Ausdruck S besitzt hier folgende Bedeutung:

$$S = \frac{x}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{y}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{z}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial z},$$

und lässt sich daher, weil $\frac{x}{\varrho}, \frac{y}{\varrho}, \frac{z}{\varrho}$ identisch mit $\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \varrho}{\partial y}, \frac{\partial \varrho}{\partial z}$ sind, auch so darstellen:

$$S = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

oder falls man beachtet, dass F nur von φ, ψ abhängen sollte, auch so:

17) $$S = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial \psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right).$$

Laut 8) sind φ=Const. und ψ=Const. zwei Systeme von Kegelflächen, welche unter einander anorthogonal sind, welche aber **orthogonal sind gegen die durch ϱ=Const. dargestellten Kugelflächen.** Somit ergiebt sich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0,$$

folglich mit Rückblick auf 17):

18) $$S = 0.$$

Demgemäss gewinnt die Formel 16) folgendes Aussehen:

$$\Delta(\varrho^p F) = p(p+1)\varrho^{p-2}F + \varrho^p \Delta F,$$

d. i.

19) $$\Delta(\varrho^p F) = \varrho^{p-2}[p(p+1)F + \varrho^2 \Delta F].$$

Zufolge unserer Voraussetzung ist F nur von φ, ψ abhängig. Gleiches gilt daher laut 15) von $\varrho^2 \Delta F$, Gleiches also auch von dem hier auftretenden Ausdruck [ ]. Folglich:

20) **Versteht man unter p eine beliebig gegebene Zahl und versteht man ferner unter F irgend eine nur von φ, ψ abhängende Function, so lässt sich der Ausdruck**

$$\Delta(\varrho^p F)$$

jederzeit in zwei Factoren zerlegen, von welchen der eine nur von ϱ, der andere nur von φ, ψ abhängt. Diese Factoren sind:

$$\varrho^{p-2} \quad \text{und} \quad p(p+1)F + \varrho^2 \Delta F.$$

Ob die Zahl p ganz oder gebrochen, positiv oder negativ ist, bleibt hierbei vollkommen gleichgültig.

Es mag die Gleichung hingestellt sein:

21) $$\Delta(\varrho^p F) = 0,$$

in welcher p gegeben, F aber unbekannt ist. Wir legen uns die Frage vor, ob unter so bewandten Umständen eine Function F existiren wird, welche der Gleichung Genüge leistet, und welche gleichzeitig nur von φ, ψ abhängt.

Da F nur von φ, ψ abhängen soll, so lässt sich der linke Theil der vorgelegten Gleichung 21) (zufolge des soeben gefundenen Satzes) in zwei Factoren zerlegen. Von diesen beiden Factoren enthält der eine nur die Argumente φ, ψ, und lautet:

$$p(p+1)F + \varrho^2 \Delta F.$$

Die vorgelegte Gleichung wird also erfüllt werden, wenn man die Function F der Art bestimmt, dass dieser Factor verschwindet. Enthielte der eben genannte Factor alle drei Argumente ϱ, φ, ψ, so würde hierzu eine Function F erforderlich sein, in welcher ebenfalls alle drei Argumente vorkommen. Da nun aber in jenem Factor nur zwei von jenen Argumenten, nämlich nur φ und ψ enthalten sind, so wird die unbekannte Function F, welche zum Verschwinden des Factors erforderlich ist, ebenfalls nur φ und ψ enthalten. Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

22) Versteht man unter p eine beliebig gegebene, ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, so wird jederzeit eine **nur** von φ, ψ abhängende Function F existiren, welche der Gleichung $\Delta(\varrho^p F) = 0$ Genüge leistet.

Zufolge des Satzes 20) ist

23) $$\Delta(\varrho^p F) = \varrho^{p-2}[p(p+1)F + \varrho^2 \Delta F],$$

vorausgesetzt, dass man wiederum unter F eine nur von φ, ψ abhängende Function versteht. Ferner ergiebt sich zufolge desselben Satzes, wenn man statt der Zahl p die Zahl $-(p+1)$ nimmt:

24) $$\Delta\left(\frac{F}{\varrho^{p+1}}\right) = \frac{1}{\varrho^{p+3}} \cdot [(p+1)pF + \varrho^2 \Delta F].$$

In diesen beiden Formeln 23) und 24) sind die rechts auftretenden Factoren [ ] unter einander identisch. Daraus folgt, dass die Gleichungen

$$\Delta(\varrho^p F) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\left(\frac{F}{\varrho^{p+1}}\right) = 0$$

beide durch ein und dasselbe F erfüllt werden. Folglich:

25) Versteht man in den Gleichungen

$$\Delta(\varrho^p F) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\left(\frac{F}{\varrho^{p+1}}\right) = 0$$

unter p eine beliebig gegebene, ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, so wird eine **nur**

von φ, ψ abhängende Function F, welche der **einen** Gleichung Genüge leistet, gleichzeitig auch Genüge leisten der **andern** Gleichung.

Eine Function F, welche den eben hingestellten Gleichungen Genüge leistet, mag genannt werden eine Kugelfunction. Für jede gegebene Zahl p wird dann eine ihr zugehörige Kugelfunction existiren. Wir setzen Folgendes fest:

26) Definition. Versteht man unter p eine beliebig gegebene, ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, so soll diejenige **nur** von φ, ψ abhängende Function F, welche den Gleichungen

$$\varDelta(\varrho^p F)=0, \qquad \varDelta\left(\frac{F}{\varrho^{p+1}}\right)=0$$

Genüge leistet, eine **Kugelfunction von der Ordnung** p **oder von der Ordnung** $-(p+1)$ heissen. Dass eine solche Function jederzeit existirt, folgt unmittelbar aus den Sätzen 22) und 25).

§. 3.

Entwickelung nach Kugelfunctionen.

Es sei

$$U=U(\varrho, \varphi, \psi)$$

eine beliebig gegebene von ϱ, φ, ψ abhängende Function. Wir wollen annehmen, diese Function lasse sich nach Potenzen von ϱ entwickeln, gleichgültig ob diese Potenzen ganze oder gebrochene sind, gleichgültig ob sie in aufsteigender oder absteigender Ordnung vorwärts schreiten. Wir wollen also annehmen, es sei

$$U=\varrho^{p_1}F_1+\varrho^{p_2}F_2+\varrho^{p_3}F_3+\ldots.$$

oder kürzer ausgedrückt:

27) $$U=\Sigma\varrho^p F,$$

wo F_1, F_2, F_3 .... Functionen sind, die nur von φ, ψ abhängen, und wo p_1, p_2, p_3 .... eine Zahlenreihe vorstellt, die nach irgend welchem Gesetze fortschreitet.

Aus der Formel 27) ergiebt sich durch Differentiation:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\Sigma\frac{\partial^2(\varrho^p F)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\Sigma\frac{\partial^2(\varrho^p F)}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\Sigma\frac{\partial^2(\varrho^p F)}{\partial z^2}.$$

mithin:

28) $$\varDelta U=\Sigma\varDelta(\varrho^p F).$$

Zufolge des Satzes 20) ist:

29) $$\Delta(\varrho^p F) = \varrho^{p-2}\Phi,$$

wo Φ nur von φ, ψ abhängt. Hierdurch verwandelt sich die Formel 28) in

30) $$\Delta U = \Sigma \varrho^{p-2}\Phi,$$

d. i. in eine Entwickelung nach Potenzen von ϱ. Wir wollen nun annehmen, die Function U genüge der Gleichung $\Delta U = 0$. Alsdann wird ΔU, mithin auch die in 30) angegebene Entwickelung $\Sigma \varrho^{p-2}\Phi$ für jeden beliebigen Werth von ϱ verschwinden. Demnach werden in diesem Fall die in der eben genannten Entwickelung enthaltenen Coefficienten Φ sämmtlich gleich Null sein. Verschwinden aber die Φ, so genügen (wie aus 29) folgt) die in der Entwickelung von U enthaltenen Coefficienten F den Gleichungen

31) $$\Delta(\varrho^p F) = 0.$$

Daraus folgt, dass die Coefficienten F alsdann Kugelfunctionen sind. Somit erhalten wir folgenden Satz:

32) Lässt sich irgend eine von ϱ, φ, ψ abhängende Function U, welche der Gleichung $\Delta U = 0$ Genüge leistet, nach aufsteigenden oder absteigenden, ganzen oder gebrochenen Potenzen von ϱ entwickeln, so sind die in dieser Entwickelung auftretenden (nur von φ, ψ abhängenden) Coefficienten **Kugelfunctionen.**

Bezeichnet man nämlich jene Entwickelung mit:

$$U = \Sigma \varrho^p F(\varphi, \psi),$$

versteht man also unter $F(\varphi, \psi)$ oder F den der Potenz ϱ^p zugehörigen Coefficienten, so wird dieser Coefficient der Gleichung

$$\Delta(\varrho^p F) = 0$$

Genüge leisten, folglich eine Kugelfunction p^{ter} Ordnung sein*).

Wir bringen diesen Satz in Anwendung auf die Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte, d. i. auf den Ausdruck:

33) $$T = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Bezeichnen wir die Polarcoordinaten des Punktes x, y, z mit ϱ, φ, ψ, und die des Punktes a, b, c mit r, α, β, so ist laut 4):

34) $$\begin{aligned} x &= \varrho . \Phi_1(\varphi, \psi), & a &= r . \Phi_1(\alpha, \beta), \\ y &= \varrho . \Phi_2(\varphi, \varphi), & b &= r . \Phi_2(\alpha, \beta), \\ z &= \varrho . \Phi_3(\varphi, \psi), & c &= r . \Phi_3(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

---

*) Zu bemerken ist allerdings, dass dieser Satz keine unumschränkte Gültigkeit in Anspruch nehmen darf. Es kann nämlich vorkommen, dass die Entwickelung 27) convergent ist, dass trotzdem aber die Entwickelung 28) divergent oder wenigstens ungültig ist. In diesem Falle wird dann der vorstehende Satz unzuverlässig sein.

ferner mit Rücksicht auf 5):

$$35)\quad \begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=\varrho^2,\\ a^2+b^2+c^2&=r^2,\\ ax+by+cz&=\varrho r\cos\vartheta, \end{aligned}$$

wo $\cos\vartheta$ zur Abkürzung gesetzt ist für folgenden Ausdruck:

$$36)\ \cos\vartheta=\Phi_1(\varphi,\psi)\,.\,\Phi_1(\alpha,\beta)+\Phi_2(\varphi,\psi)\,.\,\Phi_2(\alpha,\beta)+\Phi_3(\varphi,\psi)\,.\,\Phi_3(\alpha,\beta)$$

wo also $\cos\vartheta$ nur abhängig ist von den vier Argumenten φ, ψ, α, β.

Aus 35) folgt:

$$\begin{aligned} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2&=\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos\vartheta,\\ \alpha)\qquad &=r^2\left(1-\frac{\varrho}{r}e^{i\vartheta}\right)\left(1-\frac{\varrho}{r}e^{-i\vartheta}\right),\\ \beta)\qquad &=\varrho^2\left(1-\frac{r}{\varrho}e^{i\vartheta}\right)\left(1-\frac{r}{\varrho}e^{-i\vartheta}\right). \end{aligned}$$

Substituirt man in den Ausdruck T 33) die hier erhaltenen Werthe α) und β), so nimmt jener Ausdruck nacheinander die Gestalten an:

$$a)\qquad T=\frac{1}{r\sqrt{\left(1-\frac{\varrho}{r}e^{i\vartheta}\right)\left(1-\frac{\varrho}{r}e^{-i\vartheta}\right)}},$$

$$b)\qquad T=\frac{1}{\varrho\sqrt{\left(1-\frac{r}{\varrho}e^{i\vartheta}\right)\left(1-\frac{r}{\varrho}e^{-i\vartheta}\right)}}.$$

Nunmehr übersieht man, dass dieser Ausdruck T entweder mit Hülfe der Formel a) nach Potenzen von $\frac{\varrho}{r}$, oder mit Hülfe der Formel b) nach Potenzen von $\frac{r}{\varrho}$ entwickelt werden kann, und dass diese Entwickelungen von folgender Form sein werden*):

$$A)\qquad T=\frac{1}{r}\left(\Theta^{(0)}+\frac{\varrho}{r}\Theta^{(1)}+\frac{\varrho^2}{r^2}\Theta^{(2)}+\ldots\ldots\right),$$

$$B)\qquad T=\frac{1}{\varrho}\left(\Theta^{(0)}+\frac{r}{\varrho}\Theta^{(1)}+\frac{r^2}{\varrho^2}\Theta^{(2)}+\ldots\ldots\right).$$

Ferner übersieht man, dass die hier auftretenden Coefficienten $\Theta^{(0)}$, $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ ... nur ϑ enthalten und dass sie in beiden Entwickelungen dieselben sind. Endlich ist zu bemerken, dass ϑ [zufolge 36)] eine von φ, ψ, α, β abhängende Grösse vorstellt, und dass demnach Gleiches auch gelten wird von sämmtlichen Coefficienten $\Theta^{(0)}$, $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$....

Betrachten wir den Punkt r, α, β als fest, den Punkt ϱ, φ, ψ hingegen als variabel, so können wir die reciproke Entfernung T als eine Function von ϱ, φ, ψ, und gleichzeitig die Coefficienten $\Theta^{(0)}$, $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$.... als Func-

*) Von selbst versteht sich, dass die Entwicklung A) nur gültig sein wird, falls $\varrho < r$ ist, die Entwickelung (B) hingegen nur dann, wenn $\varrho > r$ ist.

tionen von φ, ψ bezeichnen. Bekanntlich leistet T der Gleichung $\Delta T = 0$ Genüge. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satz 32) unmittelbar, dass die in der Entwickelung von T auftretenden Coefficienten $\Theta^{(0)}$, $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$, ... Kugelfunctionen sind.

In der Entwickelung A) ist $\Theta^{(p)}$ der Coefficient von ϱ^p. Zufolge des eben genannten Satzes wird also $\Theta^{(p)}$ der Gleichung

$$A') \qquad \Delta(\varrho^p \Theta^{(p)}) = 0$$

genügen. Andererseits tritt $\Theta^{(p)}$ in der Entwickelung B) als Coefficient von $\varrho^{-(p+1)}$ auf. Es wird demnach, wenn wir den genannten Satz abermals in Anwendung bringen, $\Theta^{(p)}$ gleichzeitig auch folgende Gleichung erfüllen:

$$B') \qquad \Delta(\varrho^{-(p+1)} \Theta^{(p)}) = 0.$$

Dass $\Theta^{(p)}$ gleichzeitig zwei Gleichungen, sowohl der Gleichung A') als auch der Gleichung B') Genüge leistet, hat, falls wir uns an den früher gefundenen Satz 25) erinnern, durchaus nichts Befremdendes. Mit Rücksicht auf die in 26) hingestellte Definition wird $\Theta^{(p)}$ zu bezeichnen sein als eine Kugelfunction von der Ordnung p oder von der Ordnung $-(p+1)$. Wir erhalten somit folgenden Satz:

37) **Die reciproke Entfernung T zwischen zwei Punkten ϱ, φ, ψ und r, α, β kann, je nachdem $\varrho < r$ oder $\varrho > r$ ist, durch eine der beiden Entwickelungen**

$$T = \frac{1}{r}\left(\Theta^{(0)} + \frac{\varrho}{r}\Theta^{(1)} + \frac{\varrho^2}{r^2}\Theta^{(2)} + \ldots\ldots\right),$$

$$T = \frac{1}{\varrho}\left(\Theta^{(0)} + \frac{r}{\varrho}\Theta^{(1)} + \frac{r^2}{\varrho^2}\Theta^{(2)} + \ldots\right)$$

dargestellt werden. Die hier auftretenden von φ, ψ, α, β abhängenden Coefficienten $\Theta^{(0)}$, $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$, ... sind Kugelfunctionen. Betrachtet man nämlich r, α, β als constant ϱ, φ, ψ hingegen als variabel, so ist $\Theta^{(p)}$ als eine Function von φ, ψ zu bezeichnen, welche den beiden Gleichungen

$$\Delta(\varrho^p \Theta^{(p)}) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\left(\frac{\Theta^{(p)}}{\varrho^{p+1}}\right) = 0$$

Genüge leistet.

Lässt man, während der Punkt r, α, β ungeändert bleibt, den Punkt ϱ, φ, ψ in den Anfangspunkt des Coordinatensystems hineinfallen, lässt man also ϱ gleich Null werden, so muss gleichzeitig die reciproke Entfernung T übergehen in $\frac{1}{r}$. Für $r = 0$ muss also $T = \frac{1}{r}$ werden. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus den Entwickelungen 37) unmittelbar, dass $\Theta^{(0)} = 1$ ist.

Die Coefficienten $\Theta^{(p)}$ enthalten nur ϑ. Die Grösse ϑ ist aber [zufolge 36)] eine Function von φ, ψ α, β, und zwar eine Function, welche symme-

trisch ist in Bezug auf φ, ψ einerseits und α, β andererseits. Dieselbe Symmetrie wird daher in den Coefficienten $\Theta^{(p)}$ vorhanden sein*). Nun haben wir vorhin gesehen, dass diese Coefficienten $\Theta^{(p)}$ Kugelfunctionen sind, sobald man ϱ, φ, ψ als variabel, und r, α, β als constant ansieht. Sie werden demnach in Folge der eben bemerkten Symmetrie auch dann Kugelfunctionen sein, wenn man umgekehrt r, α, β als variabel, und ϱ, φ, ψ als constant ansieht. Also:

38) Die in 37) auftretenden Coefficienten $\Theta^{(p)}$ sind Functionen von φ, ψ, α, β, welche **symmetrisch** sind in Bezug auf φ, ψ einerseits und α, β andererseits.

Sie sind daher Kugelfunctionen einerseits in Bezug auf φ, ψ, und andererseits auch in Bezug auf α, β. Betrachtet man ϱ, φ, ψ als variabel, so genügen die $\Theta^{(p)}$ den Gleichungen:

$$\Delta(\varrho^p\,\Theta^{(p)}) = 0, \qquad \Delta\left(\frac{\Theta^{(p)}}{\varrho^{p+1}}\right) = 0;$$

und betrachtet man andererseits ϱ, φ, ψ als constant, hingegen r, α, β als variabel, so sind

$$\Delta(\varrho^p\,\Theta^{(p)}) = 0, \qquad \Delta\left(\frac{\Theta^{(p)}}{r^{p+1}}\right) = 0$$

die Gleichungen, denen die $\Theta^{(p)}$ Genüge leisten.

§. 4.

Die Haupteigenschaften der Kugelfunctionen.

Versteht man unter p eine beliebig gegebene positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl, und unter F eine unbekannte, nur von φ, ψ abhängende Function, so sind die beiden Gleichungen

$$\Delta(\varrho^p F) = 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta(\alpha^{-(p+1)} F) = 0$$

unter einander identisch. Denn wir haben früher 25) gesehen, dass jede von φ, ψ abhängende Function F, welche der einen Gleichung genügt, gleichzeitig auch der anderen Genüge leisten wird.

Zwei Gleichungen von der Form

39) $$\Delta(\varrho^p F) = 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta(\varrho^{p'} F) = 0$$

sind demnach unter einander identisch, sobald zwischen p und p' die Beziehung stattfindet:

$$p + p' = -1.$$

Solches aber wird jederzeit der Fall sein, wenn jene Exponenten von folgender Form sind:

---

*) Diese Symmetrie von Θ und $\Theta(p)$ wird sich dadurch kund geben, dass jede dieser Functionen bei einer Vertauschung von φ, ψ mit α, β völlig ungeändert bleibt.

$$p = -\frac{1}{2} + m,$$

$$p' = -\frac{1}{2} - m,$$

d. h. wenn p und p' zwei Zahlen sind, die in entgegengesetzten Richtungen gleich weit abstehen von der Zahl $-\frac{1}{2}$. Oder kürzer ausgedrückt: Zwei Gleichungen von der Form 39) sind unter einander identisch, wenn ihre Exponenten p und p' symmetrisch liegen in Bezug auf die Zahl $-\frac{1}{2}$.

Man kann daher sämmtliche Gleichungen, welche in der Form

$$\Delta(\varrho^p F) = 0$$

enthalten sind, auf doppelte Weise erhalten, entweder dadurch, dass man den Exponenten p von $-\frac{1}{2}$ bis $+\infty$ wachsen, oder dadurch, dass man denselben von $-\frac{1}{2}$ bis $-\infty$ abnehmen lässt. Eine von φ, ψ abhängende Function F, welche der Gleichung $\Delta(\varrho^p F) = 0$ Genüge leistet, war aber von uns eine Kugelfunction p^{ter} Ordnung genannt worden [vergl. 26)]. Demnach können wir uns auch so ausdrücken:

40) Sämmtliche überhaupt vorhandenen Kugelfunctionen können auf doppelte Weise erhalten werden, entweder dadurch, dass man ihre Ordnungszahl von $-\frac{1}{2}$ bis $+\infty$ wachsen, oder dadurch, dass man dieselbe von $-\frac{1}{2}$ bis $-\infty$ abnehmen lässt.

Um diese Willkür zu vermeiden, setzen wir fest, dass in Zukunft unter den Ordnungszahlen der Kugelfunctionen nur diejenigen Zahlen verstanden werden sollen, welche **grösser** als $-\frac{1}{2}$, oder (im Grenzfall) gleich $-\frac{1}{2}$ sind.

Es seien

$$41) \qquad F = F(\varphi, \psi), \qquad G = G(\varphi, \psi)$$

irgend zwei Kugelfunctionen von der p^{ten} und q^{ten} Ordnung; also zwei Functionen, welche den Gleichungen

$$42) \qquad \Delta(\varrho F) = 0, \qquad \Delta(\varrho^q G) = 0$$

Genüge leisten. Unter p und q werden demnach zwei beliebig gegebene

positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen zu verstehen sein, welche jedoch grösser als $-\frac{1}{2}$, oder (im Grenzfall) gleich $-\frac{1}{2}$ sind.

Wir wollen uns ferner um den Anfangspunkt des Coordinatensystems eine Kugelfläche vom Radius 1 beschrieben denken, und annehmen, die gegebenen Functionen F, G seien von solcher Beschaffenheit, dass die Grössen

$$43)\qquad \begin{array}{l} F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \\ G, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \end{array}$$

auf dieser Kugelfläche überall stetig sind*).

Gleiches wird alsdann von diesen acht Grössen 43) auch gelten auf jeder anderen Kugelfläche, die um den Anfangspunkt des Coordinatensystems beschrieben ist, mag nun ihr Radius kleiner oder grösser als 1 sein. Solches ergiebt sich unmittelbar, wenn man beachtet, dass F und G nur abhängig sind von φ, ψ, also unabhängig sind von ϱ.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Grössen

$$44)\qquad \begin{array}{llll} \varrho^p F, & \frac{\partial \varrho^p F}{\partial x}, & \frac{\partial \varrho^p F}{\partial y}, & \frac{\partial \varrho^p F}{\partial z}, \\ \varrho^q G, & \frac{\partial \varrho^q G}{\partial x}, & \frac{\partial \varrho^q G}{\partial y}, & \frac{\partial \varrho^q G}{\partial z} \end{array}$$

überall stetig sein werden innerhalb desjenigen Raumes, welcher von einer solchen Kugelfläche umschlossen wird. Nur ein Punkt innerhalb des genannten Raumes kann in dieser Beziehung eine Ausnahme machen, d. i. der Mittelpunkt der Kugelfläche**). Um diesen Uebelstand zu ver-

*) Man kann sich die Werthe, welche F auf der Kugelfläche besitzt, geometrisch dargestellt denken durch Perpendikel, welche errichtet sind in den einzelnen Punkten der Fläche. Die Endpunkte all' dieser Perpendikel werden dann zusammengenommen eine gewisse Fläche bilden. In gleicher Weise werden wir eine andere Fläche construiren können, durch welche diejenigen Werthe dargestellt sind, welche $\frac{\partial F}{\partial x}$ in den einzelnen Punkten der Kugelfläche besitzt; sodann eine dritte Fläche, durch welche die Werthe von $\frac{\partial F}{\partial y}$ repräsentirt werden u. s. w. Den acht Grössen 43) entsprechend erhalten wir im Ganzen acht Flächen. Jene acht Grössen werden demgemäss auf der Kugelfläche stetig sein, wenn diese acht Flächen — mögen sie nun gekrümmt, mit Kanten und Ecken behaftet sein, wie sie wollen — in ihrem Verlauf keinerlei Unterbrechungen darbieten. D. h. jene acht Grössen werden auf der Kugelfläche stetig zu nennen sein, sobald diese acht Flächen frei sind von Rissen, frei sind von vereinzelten Linien und vereinzelten Punkten, mithin auch frei sind von unendlich fern gelegenen Punkten.

**) Unter p ist eine beliebige Zahl zu verstehen, welche grösser als $-\frac{1}{2}$ ist. Es kann demnach p z. B. gleich $-\frac{1}{4}$ sein. Und in diesem Falle wird $\varrho^p F$ im Mittelpunkt unendlich gross, mithin unstetig sein.

meiden, betrachten wir an Stelle des vollen Kugelraumes denjenigen Raum, welcher sich befindet zwischen zwei concentrischen Kugelflächen. Innerhalb dieses Raumes werden dann die Grössen 44) ohne Ausnahme überall stetig sein. Und wir können demnach, mit Rückblick auf die Gleichungen 42), auf diesen Raum sofort die Green'sche Formel 2) in Anwendung bringen. Wir erhalten alsdann:

$$45) \qquad \iint \left(\varrho^q G \frac{\partial \varrho^p F}{\partial \nu} - \varrho^p F \frac{\partial \varrho^q G}{\partial \nu} \right) d\omega = 0.$$

Die Integration muss hier ausgedehnt gedacht werden über sämmtliche Flächenelemente $d\omega$, welche zur Grenze des genannten Raumes gehören. Das Integral ist daher in Wirklichkeit eine Summe von zwei Integralen, von welchen das eine über die äussere, das andere über die innere Kugelfläche hinerstreckt ist. Bezeichnet man daher den Radius der äusseren Fläche mit ϱ, den der innern mit ε, die zugehörigen Flächenelemente $d\omega$ mit $\varrho^2 d\bar{\omega}$ und $\varepsilon^2 d\bar{\omega}$, und beachtet man, dass die Richtung ν bei der äusseren Fläche identisch ist mit ϱ, bei der innern Fläche aber entgegengesetzt ist mit ε, so verwandelt sich die Formel 45) in folgende:

$$\iint \left(\varrho^q G \frac{\partial \varrho^p F}{\partial \varrho} - \varrho^p F \frac{\partial \varrho^q G}{\partial \varrho} \right) \varrho^2 d\bar{\omega} = \iint \left(\varepsilon^q G \frac{\partial \varepsilon^p F}{\partial \varepsilon} - \varepsilon^p F \frac{\partial \varepsilon^q G}{\partial \varepsilon} \right) \varepsilon^2 d\bar{\omega}.$$

Und diese geht, weil F und G unabhängig sind von ϱ oder ε, über in:

$$(p-q) \iint \varrho^{p+q+1} F G d\bar{\omega} = (p-q) \iint \varepsilon^{p+q+1} F G d\bar{\omega},$$

oder, weil ϱ und ε die gegebenen Radien der beiden Kugelflächen vorstellen:

$$46) \qquad (p-q)(\varrho^{p+q+1} - \varepsilon^{p+q+1}) \iint F G d\bar{\omega} = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass das Integral

$$47) \qquad \iint F G d\bar{\omega}$$

verschwinden muss, falls nicht p und q einander gleich sind*). Dieses Integral 47) kann als hinerstreckt betrachtet werden über eine Kugel-

---

*) Man könnte einwenden, abgesehen von dem Ausnahmefalle $p = q$, werde noch ein zweiter Ausnahmefall vorhanden sein, nämlich der, wenn $p + q + 1 = 0$ ist; denn in diesem Fall verwandle sich der Factor

$$\varrho^{q+q+1} - \varepsilon^{p+q+1}$$

in $1 - 1$, d. i. in 0; und es werde daher in diesem Fall die Gleichung 46) in Erfüllung gehen, ohne dass es dazu des Verschwindens des Integrales bedürfe.

Unserer Festsetzung 40) zufolge sind aber die Ordnungszahlen p und q jederzeit grösser als $-\frac{1}{2}$, oder (im Grenzfalle) gleich $-\frac{1}{2}$. Die Relation $p + q + 1 = 0$ kann daher nur dann eintreten, wenn p und q beide gleich $-\frac{1}{2}$ sind, also nur dann, wenn p und q einander gleich sind.

Somit ist klar, dass der hier erörterte zweite Ausnahmefall keiner besonderen Erwähnung bedarf, nämlich schon inbegriffen ist in dem ersten Ausnahmefall $p = q$.

fläche vom Radius 1. Denn $\varrho^2 d\bar{\omega}$ repräsentirt das Element einer Kugelfläche vom Radius ϱ; demnach wird $d\bar{\omega}$ das Element einer Fläche vom Radius 1 sein. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

48) Erste Haupteigenschaft. — Versteht man unter

$$F = F(\varphi, \psi) \quad \text{und} \quad G = G(\varphi, \psi)$$

irgend zwei Kugelfunctionen **verschiedener** Ordnung, welche sammt ihren ersten Ableitungen nach x, y, z überall **stetig** sind auf einer Kugelfläche vom Radius 1, so ist das über alle Elemente $d\bar{\omega}$ dieser Kugelfläche hinerstreckte Integral

$$\iint F(\varphi, \psi) \quad G(\varphi, \psi)\, d\bar{\omega}$$

jederzeit gleich **Null**.

Die Ordnungszahlen der beiden Kugelfunctionen können hier [vergl. die Festsetzung 40)] beliebige ganze oder gebrochene Werthe haben, die grösser als $-\frac{1}{2}$, oder gleich $-\frac{1}{2}$ sind. Vorausgesetzt wird nur, dass sie unter einander verschieden sind.

Wir wollen wiederum annehmen, es sei

49)
$$F = F(\varphi, \psi)$$

eine Kugelfunction p^{ter} Ordnung, von solcher Beschaffenheit, dass die Grössen

50)
$$F, \quad \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}$$

überall stetig sind auf einer Kugelfläche vom Radius 1. Ebenso, wie vorhin, werden dann die Grössen

51)
$$\varrho^p F, \quad \frac{\partial \varrho^p F}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varrho^p F}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varrho^p F}{\partial z}$$

überall stetig sein innerhalb desjenigen Raumes, welcher sich befindet zwischen zwei concentrischen Kugelflächen.

In Bezug auf den Werth der Ordnungszahl p wollen wir diesmal aber eine gewisse beschränkende Voraussetzung eintreten lassen, nämlich annehmen, dass p eine positive ganze Zahl, also irgend eine Zahl aus der Reihe

$$0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \ldots \infty$$

ist. Alsdann werden die Grössen 51) nicht nur stetig sein innerhalb des eben genannten Zwischenraumes, sondern stetig sein innerhalb des vollen Raumes, der von irgend einer Kugelfläche umschlossen wird. Ausserdem wird, nach wie vor,

$$\Delta(\varrho^p F) = 0$$

sein.

Wir können daher auf den von der Kugelfläche umschlossenen Raum sofort die Green'sche Formel 3) in Anwendung bringen, und erhalten alsdann:

52) $$\iint \left(T \frac{\partial \varrho^p F}{\partial \nu} - \varrho^p F \frac{\partial T}{\partial \nu} \right) d\omega = 4\pi \varrho^p{}_1 F_1.$$

Die Integration ist hier ausgedehnt zu denken über alle Elemente $d\omega$ der ganzen Kugelfläche. Unter T ist die reciproke Entfernung zwischen einem solchen Element $d\omega$ und zwischen einem Punkte zu verstehen, der im Innern der Kugelfläche eine beliebig gewählte, aber feste Lage hat. Bezeichnen wir also die Coordinaten des Elementes $d\omega$ mit ϱ, φ, ψ und die Coordinaten des eben genannten Punktes mit r, α, β, so kann der Werth von T, zufolge 37), durch folgende Reihe dargestellt werden:

53) $$T = \frac{1}{\varrho}\left(\Theta^{(0)} + \frac{r}{\varrho}\,\Theta^{(1)} + \frac{r^2}{\varrho^2}\,\Theta^{(2)} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n}{\varrho^{n+1}}\,\Theta^{(n)}.$$

Endlich ist in unserer Formel unter $\varrho^p{}_1 F_1$ derjenige besondere Werth zu verstehen, welchen die Function $\varrho^p F$ in jenem festen Punkt r, α, β besitzt; demnach ist $\varrho_1 = r$. Wenn wir hierauf achten, wenn wir ferner beachten, dass ϱ, φ, ψ die Coordinaten von $d\omega$, mithin ϱ der Radius der Kugelfläche ist, und wenn wir demgemäss $\varrho^2 d\tilde{\omega}$ statt $d\omega$ und ϱ statt ν setzen, so verwandelt sich unsere Formel 52) in:

$$\iint \left(T \frac{\partial \varrho^p F}{\partial \varrho} - \varrho^p F \frac{\partial T}{\partial \varrho} \right) \varrho^2 d\tilde{\omega} = 4\pi r^p F_1,$$

oder, wenn wir für T die Entwickelung 53) substituiren, in:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} r^n \iint \left(\varrho^{-(n+1)}\,\Theta^{(n)} \frac{\partial \varrho^p F}{\partial \varrho} - \varrho^p F \frac{\partial \varrho^{-(n+1)}\Theta^{(n)}}{\partial \varrho} \right) \varrho^2 d\tilde{\omega} = 4\pi r^p F_1.$$

Und diese Formel verwandelt sich, weil F und $\Theta^{(n)}$ unabhängig von ϱ sind, in:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} r^n \iint (p+n+1)\,\varrho^{p-n} F \Theta^{(n)} d\tilde{\omega} = 4\pi r^p F_1,$$

d. i. in:

54) $$\sum_{n=0}^{n=\infty} (p+n+1)\, r^n \varrho^{p-n} \iint F \Theta^{(n)} d\tilde{\omega} = 4\pi r^p F_1.$$

Nun ist F eine Kugelfunction von der gegebenen Ordnung p, ferner $\Theta^{(n)}$ eine Kugelfunction von der Ordnung n. Die hier auftretenden Integrale

$$\iint F \Theta^{(n)} d\tilde{\omega}$$

werden daher, zufolge des vorhergehenden Satzes 48), sämmtlich Null sein mit alleiniger Ausnahme desjenigen Integrales, in welchem n gleich gross ist mit der gegebenen Zahl p. In der Formel 54) reducirt sich daher die links stehende Summe auf ein einziges Glied, so dass wir erhalten:

$$(2p+1)\, r^p \iint F \Theta^{(p)} d\tilde{\omega} = 4\pi r^p F_1,$$

d. i.

55) $$\iint F \Theta^{(p)} d\tilde{\omega} = \frac{4\pi}{2p+1} F_1.$$

Die Grösse $\Theta^{(p)}$ ist [vergl. 37)] eine Function von φ, ψ, α, β; wir setzen daher $\Theta^{(p)} = \Theta^{(p)}(\varphi, \psi, \alpha, \beta)$. Ferner ist $F = F(\varphi, \psi)$. Ausserdem stellt F_1 denjenigen Werth vor, welchen die Function F im Punkt r, α, β besitzt; folglich $F_1 = F(\alpha, \beta)$. Endlich repräsentirt $d\tilde{\omega}$ ein Element der mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche, und zwar ein Element, dessen Coordinaten φ, ψ sind. Somit gelangen wir durch die Formel (56) zu folgendem Satz:

56) **Zweite Haupteigenschaft.** — Versteht man unter p irgend welche Zahl aus der Reihe

$$0, 1, 2, 3, \ldots . \infty,$$

und versteht man ferner unter

$$F = F(\varphi, \psi)$$

eine Kugelfunction von der Ordnung p, welche sammt ihren ersten Ableitungen nach x, y, z überall stetig ist auf einer mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche, so ist jederzeit:

$$\iint F(\varphi, \psi)\, \Theta^{(p)}(\varphi, \psi, \alpha, \beta)\, d\tilde{\omega} = \frac{4\pi}{2p+1} F(\alpha, \beta).$$

Die Integration ist hier ausgedehnt über alle Elemente $d\tilde{\omega}$ der genannten Kugelfläche. Ausserdem repräsentiren

$$\Theta^{(0)}(\varphi, \psi, \alpha, \beta), \quad \Theta^{(0)}(\varphi, \psi, \alpha, \beta), \text{ etc.}$$

diejenigen Kugelfunctionen, welche auftreten, wenn man die reciproce Entfernung zweier Punkte ϱ, φ, ψ und r, α, β nach Potenzen von ϱ oder r entwickelt [vergl. (37)].

Die beiden Haupteigenschaften (48) und (56) können bekanntlich unmittelbar in Anwendung gebracht werden, um eine beliebig gegebene, von irgend zwei Argumenten φ, ψ abhängende Function $f(\varphi, \psi)$ nach Kugelfunctionen zu entwickeln. Handelt es sich nämlich darum, diese Function in eine Reihe zu verwandeln:

$$57) \qquad f(\varphi, \psi) = f^{(0)}(\varphi, \psi) + f^{(1)}(\varphi, \psi) + f^{(2)}(\varphi, \psi) +,$$

deren einzelne Glieder Kugelfunctionen resp. von der 0ten, 1ten, 2ten, u. s. w. Ordnung sind, so multiplicirt man beide Seiten der Formel (57) mit

$$\Theta^{(p)}(\varphi, \psi, \alpha, \beta)\, d\tilde{\omega}$$

wo p eine beliebig gewählte Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots . \infty$ vorstellt. Thut man dies, und integrirt man sodann über alle zur Kugelfläche gehörigen Elemente $d\tilde{\omega}$, so erhält man mit Rücksicht auf die erste Haupteigenschaft sofort:

$$\iint f(\varphi, \psi)\, \Theta^{(p)}(\varphi, \psi, \alpha, \beta)\, d\tilde{\omega} = \iint f^{(p)}(\varphi, \psi,)\, \Theta^{(p)}(\varphi, \psi, \alpha, \beta)\, d\tilde{\omega},$$

folglich mit Rücksicht auf die zweite Haupteigenschaft:

$$58) \qquad \iint f(\varphi,\psi)\, \Theta^{(p)}(\varphi,\psi,\alpha,\beta)\, d\bar{\omega} = \frac{4\pi}{2p+1} f^{(p)}(\alpha,\beta).$$

Auf der linken Seite befinden sich hier nur bekannte Functionen; denn f sollte gegeben sein, und $\Theta^{(p)}$ ist seiner Definition 37) zufolge ebenfalls als eine bekannte Function anzusehen. Durch die vorstehende Formel 58) findet demnach das allgemeine Glied

$$f^{(p)}(\alpha,\beta)$$

der verlangten Entwickelung seine vollständige Bestimmung.

Bei der Herleitung der beiden Haupteigenschaften ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Kugelfunctionen nicht nur den angegebenen Stetigkeitsbedingungen Genüge leisten, sondern auch, dass sie auf der Kugelfläche rundum eindeutig sind. Sollten, was namentlich bei gebrochenen Ordnungszahlen vielfach vorkommen wird, Kugelfunctionen existiren, welche mehrdeutig (jedoch nicht unendlichvieldeutig) sind, so werden sich jene Eigenschaften wahrscheinlich auch auf diesen Fall leicht übertragen lassen, und zwar dadurch, dass man die gewöhnliche einblättrige Kugelfläche in eine Riemann'sche Kugelfläche*) verwandelt, die Integration also nicht über die gewöhnliche Kugelfläche, sondern über die Riemann'sche Kugelfläche sich hinerstrecken lässt. Ich will dies jedoch nur als eine Vermuthung hinstellen.

§. 5.

Erweiterung der Green'schen Sätze.

Die bisher durchgeführten Untersuchungen lassen sich Schritt für Schritt auf den Fall übertragen, dass es sich nicht um ein Gebiet von drei Dimensionen, sondern um ein Gebiet von beliebig vielen Dimensionen handelt. Wir beginnen damit, dass wir zunächst die in §. 1 besprochenen Green'schen Sätze auf diesen Fall übertragen.

Das hier zu betrachtende Gebiet mag $(n+1)$ Dimensionen besitzen. An Stelle von x, y, z sollen demnach $n+1$ Variable $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ treten. Der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

wurde genügt durch die reciproke Entfernung zweier Punkte, nämlich durch den Ausdruck

$$\frac{1}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Dem analog ergiebt sich leicht, dass der Gleichung

*) Vergl. meine „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale". Leipzig 1865. S. 162—204.

1) $$\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0$$

genügt wird durch einen Ausdruck von der Form:

2) $$\frac{1}{[(x_0-a_0)^2+(x_1-a_1)^2+\ldots(x_n-a_n)^2]^{\frac{n-1}{2}}}$$

Demgemäss mag eine Gleichung von der Form 1) kurzweg mit $\varDelta U=0$, und ein Ausdruck von der Form 2) kurzweg mit T bezeichnet werden. Dieser Ausdruck T, welcher also der Gleichung $\varDelta T=0$ Genüge leistet, mag genannt werden die Directrix der beiden Werthsysteme $x_0, x_1, \ldots x_n$ und $a_0, a_1, \ldots a_n$.

Es seien $\varrho, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ beliebig gegebene Functionen von $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$; die Functionaldeterminante von $\varrho, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ nach $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ mag, was ihren absoluten, also positiven Werth anbelangt, bezeichnet werden mit $\frac{1}{D}$.

Wir betrachten dasjenige Gebiet, welches durch die Formel

3) $$\varrho < C \qquad \text{(Hauptgebiet)}$$

bestimmt wird, indem wir unter C eine gegebene Constante verstehen und nennen dieses Gebiet das Hauptgebiet. Das demselben zugehörige Grenzgebiet wird dann repräsentirt werden durch die Formel

4) $$\varrho = C. \qquad \text{(Grenzgebiet.)}$$

Mit anderen Worten: Zum Hauptgebiet sollen diejenigen Werthsysteme von $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ gerechnet werden, welche der Formel 3) genügen, zum Grenzgebiet diejenigen, durch welche die Formel 4) erfüllt wird. Zugleich mag vorausgesetzt werden, dass innerhalb dieser Gebiete keine Werthsysteme von $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ vorkommen, welche unendlich gross sind.

Die Uebertragung der Green'schen Sätze auf diese Gebiete giebt alsdann, wenn wir unter U und V zwei Functionen von $x_0, x_1, \ldots x_n$ verstehen, die den Gleichungen $\varDelta U=0, \varDelta V=0$ Genüge leisten, und die, ebenso wie ihre ersten Ableitungen nach $x_0, x_1, \ldots x_n$, innerhalb des Hauptgebietes überall stetig sind, folgende Formeln:

5) $$\overset{n}{S}[U(V,\varrho) - V(U,\varrho)]\, D\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n = 0,$$

6) $$\overset{n}{S}[T(V,\varrho) - V(T,\varrho)]\, D\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n = (n^2-1)\, N\,.\, V_1.$$

Hier ist unter $\overset{n}{S}$ eine Integration zu verstehen, die sich auf die n Variablen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ bezieht, und die sich hinerstreckt über das Grenzgebiet. Ferner repräsentirt T den Ausdruck 2); und gleichzeitig repräsentiren die in diesem Ausdruck enthaltenen Constanten $a_0, a_1, \ldots a_n$ irgend ein Werthsystem $x_0, x_1, \ldots x_n$, welches innerhalb des Hauptgebietes liegt. Dem entsprechend ist unter V_1 derjenige besondere Werth der Function V zu verstehen, welchen dieselbe annimmt, wenn man ihren Argumenten $x_0, x_1, \ldots x_n$ die Werthe $a_0, a_1, \ldots a_n$ zuertheilt.

Unter (U,ϱ), (V,ϱ) (T,ϱ) sind die Ausdrücke

$$(U,\varrho)=\frac{\partial U}{\partial x_0}\frac{\partial \varrho}{\partial x_0}+\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial \varrho}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial \varrho}{\partial x_n}, \qquad (V,\varrho)=\text{etc.}$$

zu verstehen. Endlich bedeutet N eine von n abhängende Zahl, zu deren Darstellung, jenachdem n gerade oder ungerade ist, entweder

die Formel: oder die Formel:

$$7)\qquad N=\frac{2.(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{1.3.5\ldots(n+1)} \qquad\qquad N=\frac{2.(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{2.4.6\ldots(n+1)}$$

erforderlich ist.

Für den Fall, dass die Function ϱ den Ausdruck hat:

$$8)\qquad \varrho^2=x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2$$

verwandeln sich die Ausdrücke (U,ϱ) etc. einfach in $\frac{\partial U}{\partial \varrho}$ etc. In diesem Fall nehmen daher die Green'schen Formeln 5), 6) folgende Gestalten an:

$$9)\qquad \overset{n}{S}\left[U\frac{\partial V}{\partial \varrho}-V\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right]D\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_n=0,$$

$$10)\qquad \overset{n}{S}\left[T\frac{\partial V}{\partial \varrho}-V\frac{\partial T}{\partial \varrho}\right]D\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_n=(n^2-1)\,N\,.\,V_1,$$

wo nun die Integration wieder ausgedehnt zu denken ist über das Grenzgebiet $\varrho=C$, d. i. über das Gebiet:

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2=C^2.$$

§. 6.

Die Ultrakugelfunctionen.

Die Grössen ϱ, φ_1, φ_2, ... φ_n mögen in ihrer Abhängigkeit von x_0, x_1, x_2, ... x_n bestimmt gedacht werden durch folgende Relationen:

$$11)\qquad \begin{aligned} x_0&=\varrho\,.\,\Phi_0(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n)=\varrho\,.\,\Phi_0,\\ x_1&=\varrho\,.\,\Phi_1(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n)=\varrho\,.\,\Phi_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=\varrho\,.\,\Phi_n(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n)=\varrho\,.\,\Phi_n,\end{aligned}$$

wo Φ_0, Φ_1, ... Φ_n beliebige Functionen sein sollen, welche der Gleichung

$$12)\qquad \Phi_0^2+\Phi_1^2+\ldots+\Phi_n^2=1$$

identisch Genüge leisten. Alsdann ergiebt sich aus den Relationen 11) unmittelbar:

$$13)\qquad \varrho^2=x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2,$$

so dass wir also hier einen Fall vor uns haben, auf welchen die Formeln 9) und 10) Anwendung finden.

Wir unterscheiden einerseits Functionen, die von den $n+1$ Argumenten ϱ, φ_1, φ_2, ... φ_n abhängen, und andererseits Functionen, die nur von den n Argumenten φ_1, φ_2, ... φ_n abhängig sind. Bedeutet

$$F=F(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n)$$

irgend welche Function der letzeren Art, und bedeutet ferner p eine beliebig gegebene, positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl, so kann leicht nachgewiesen werden, dass der Ausdruck

$$\Delta(\varrho^p F) \text{ oder } \frac{\partial^2 \varrho^p F}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varrho^p F}{\partial x_1^2} + \dots \frac{\partial^2 \varrho^p F}{\partial x_n^2}$$

in folgender Weise umgestaltet werden kann:

14) $$\Delta(\varrho^p F) = \varrho^{p-2}\left[\varrho^2 \Delta F + p(p+n-1)F\right],$$

und ferner nachgewiesen werden, dass $\varrho^2 \Delta F$ eine Function ist, die nur von $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ abhängt, von ϱ aber unabhängig ist. Hieraus ergiebt sich unmittelbar folgender Satz:

15) Versteht man unter p eine beliebig gegebene, positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl, so wird jederzeit eine nur von $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ abhängende Function F existiren, welche der Gleichung

$$\Delta(\varrho^p F) = 0$$

Genüge leistet.

Definition. — Diese Function F soll hinfort eine **Ultrakugelfunction p^{ter} Ordnung** genannt werden.

Der Formel 14) zufolge bleibt die Gleichung $\Delta(\varrho^p F) = 0$ im Wesentlichen ungeändert, wenn man p vertauscht mit $-(p+n-1)$. Zwei Gleichungen von der Form

$$\Delta(\varrho^p F) = 0 \text{ und } \Delta(\varrho^{p'} F) = 0$$

sind also unter einander identisch, sobald

$$p' = -(p+n-1),$$

d. i. sobald

$$p + p' = -(n-1)$$

ist. Mit anderen Worten: Die beiden Gleichungen sind unter einander identisch, sobald die in ihnen enthaltenen Exponenten p, p' von folgender Art sind:

$$p = -\frac{n-1}{m} + m,$$

$$p' = -\frac{n-1}{2} - m.$$

Wir werden demnach sämmtliche Gleichungen von der Form $\Delta(\varrho^p F) = 0$ auf doppelte Weise erhalten können, entweder dadurch, dass wir den Exponenten p von $-\frac{n-1}{2}$ bis $+\infty$ wachsen, oder dadurch, dass wir jenen Exponenten von $-\frac{n-1}{2}$ bis $-\infty$ abnehmen lassen. Gleiches gilt natürlich auch von den durch jene Gleichungen definirten Ultrakugelfunctionen. Also:

16) Bei einem Gebiet von $n+1$ Dimensionen können sämmtliche überhaupt vorhandenen Ultrakugelfunc-

tionen auf **doppelte** Weise erhalten werden, nämlich entweder dadurch, dass man ihre Ordnungszahl von $-\frac{n-1}{2}$ bis $+\infty$ wachsen, oder dadurch, dass man dieselbe von $-\frac{n-1}{2}$ bis $-\infty$ abnehmen lässt.

Um diese Willkür zu vermeiden, setzen wir fest, dass in Zukunft unter den Ordnungszahlen der genannten Functionen nur diejenigen verstanden werden sollen, welche **grösser** als $-\frac{n-1}{2}$, oder (im Grenzfall) **gleich** $-\frac{n-1}{2}$ sind.

Wenn wir analog mit den Relationen 11) setzen:

$$a_0 = r \,.\, \Phi_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n),$$
$$a_1 = r \,.\, \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = r \,.\, \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n),$$

so lässt sich die in 2) angegebene, der Gleichung $\Delta T = 0$ genügende Directrix T in folgender Weise entwickeln:

$$17)\qquad T = \frac{1}{r^{n-1}}\left(\Theta^{(0)} + \frac{\varrho}{r}\,\Theta^{(1)} + \frac{\varrho^2}{r^2}\,\Theta^{(2)} + \ldots\right),$$

$$18)\qquad T = \frac{1}{\varrho^{n-1}}\left(\Theta^{(0)} + \frac{r}{\varrho}\,\Theta^{(1)} + \frac{r^2}{\varrho^2}\,\Theta^{(2)} + \ldots\right).$$

Die Coefficienten Θ haben in beiden Entwickelungen gleiche Bedeutung, und hängen nur ab von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Leicht lässt sich nachweisen, dass der Coefficient

$$\Theta^{(p)} = \Theta^{(p)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

eine Ultrakugelfunction p^{ter} Ordnung ist, und zwar sowohl in Bezug auf die in ihm enthaltenen φ, als auch in Bezug auf die in ihm vorkommenden α. Zugleich lässt sich zeigen, dass ein solcher Coefficient keinerlei Abänderung erleidet, wenn man die φ und α mit einander vertauscht.

Durch Anwendung der Formel 9) ergiebt sich nun, in ähnlicher Weise, wie früher bei den Kugelfunctionen, folgender Satz:

19) Erste Haupteigenschaft. — Versteht man unter $F = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ und $G = G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ irgend zwei Ultrakugelfunctionen **verschiedener** Ordnung, welche sammt ihren ersten Ableitungen nach $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ überall **stetig** sind auf dem Grenzgebiet $\varrho = 1$, so ist das über dieses Grenzgebiet hinerstreckte $n$fache Integral

$$\overset{n}{S} F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)\, G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)\, D\, d\varphi_1 d\varphi_2 \ldots d\varphi_n$$

jederzeit gleich **Null**.

Die Ordnungszahlen von F und G können [vergl. 16)] alle ganzen oder gebrochenen Werthe annehmen, die grösser als $-\frac{n-1}{2}$, oder (im Grenzfall) gleich $-\frac{n-1}{2}$ sind. Vorausgesetzt wird nur, dass sie unter einander verschieden sind. Ferner ergiebt sich, wenn wir die Formel 10) benutzen, folgender Satz:

20) Zweite Haupteigenschaft. — Versteht man unter p irgend welche Zahl aus der Reihe

$$0, 1, 2, 3, \dots \infty,$$

und versteht man ferner unter

$$F = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)$$

eine Ultrakugelfunction von der Ordnung p, welche sammt ihren ersten Ableitungen nach $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ überall stetig ist auf dem Grenzgebiet $\varrho = 1$, so ist jederzeit:

$$\overset{n}{S} F(\varphi_1, \varphi_2, \dots)\, \Theta^{(p)}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots)\, D\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \dots d\varphi_n$$
$$= \frac{(n^2-1)N}{2p+n-1} F(\alpha_1, \alpha_2, \dots).$$

Die $n$fache Integration ist hier hinerstreckt über das genannte Grenzgebiet. Ausserdem repräsentiren

$$\Theta^{(0)}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots), \quad \Theta^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \text{ etc.}$$

diejenigen Ultrakugelfunctionen, welche durch Entwickelung der Directrix T [vergl. 2), 17), 18)] zu Tage treten.

Zu erinnern würde schliesslich noch sein, dass $\frac{1}{D}$ die Functionaldeterminante von $\varrho, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ nach $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ vorstellt, dass folglich D selber die Functionaldeterminante von $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ nach ϱ, $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ ist. Und zwar sind (wie schon in §.5 bemerkt wurde) unter $\frac{1}{D}$ und D die absoluten, also positiven Werthe dieser Determinanten zu verstehen. Endlich ist unter dem in der letzten Haupteigenschaft 20) auftretenden N eine gewisse von n abhängende Zahl zu verstehen, nämlich die in 7) angegebene.

Dass man mit Hülfe dieser beiden Haupteigenschaften 19) und 20) eine beliebig gegebene, von $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ abhängende Function

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)$$

nach Ultrakugelfunctionen zu entwickeln im Stande ist, bedarf kaum noch der Erwähnung. Das dabei einzuschlagende Verfahren wird nämlich, wie man sofort übersieht, vollkommen ähnlich sein mit demjenigen, welches früher in §.4 besprochen wurde.

Die hiermit beendeten Untersuchungen werden zeigen, wie man in der Theorie der Kugelfunctionen und Ultrakugelfunctionen mit grosser Leichtigkeit zu einer allgemeinen Uebersicht gelangen kann. Es mag mir schliesslich noch erlaubt sein, darauf aufmerksam zu machen, dass die hier in Anwendung gebrachten Methoden sich wahrscheinlich auch dann empfehlen dürften, wenn man tiefer in die Einzelnheiten der Theorie hinabzusteigen beabsichtigt, als es hier mein Vorsatz war.

Als Beleg für diese meine Ansicht glaube ich an eine früher von mir angestellte Untersuchung*) erinnern zu dürfen, in welcher ich die Entwickelung einer Function mit imaginärem Argument nach den Kugelfunctionen der ersten und zweiten Art besprochen habe und in welcher ich namentlich auf eine überraschende Analogie zwischen den genannten Entwickelungen einerseits und zwischen den Entwickelungen nach auf- und absteigenden Potenzen andererseits aufmerksam gemacht habe.

Jene Untersuchung ist, wie man bei genauerer Ueberlegung leicht finden wird, mit Hülfe ähnlicher Methoden, wie die hier angewandten, bewerkstelligt worden und spricht daher für die von mir geäusserte Ansicht.

*) Ueber die Entwickelung einer Function mit imaginärem Argument nach den Kugelfunctionen der ersten und zweiten Art. Halle 1862.

Tübingen. April 1866.

IV.

Analytisch-geometrische Untersuchungen.

Von

Dr. A. Enneper.

(Fortsetzung der Abhandlung pag. 377. T. IX dieser Zeitschrift.)

V.

Transformationen Curven doppelter Krümmung in ebene Curven.

In den „Mémoires présentés à l'Institut par divers savans" (Paris 1810, T. I. pag. 420) hat Lancret zuerst gezeigt, dass eine Curve doppelter Krümmung durch Abwickelung der developpabeln Fläche in eine Gerade übergeht, welche von den rectificirenden Ebenen der Curve gebildet wird, d. h. den Ebenen, welche durch die Tangenten der Curve gehen und auf den Krümmungsradien senkrecht stehen. Bestimmt man umgekehrt die developpable Fläche, welche eine Curve, die auf der Fläche liegt, durch Abwickelung in eine Gerade transformirt, so ergiebt sich die rectificirende Fläche der Curve. Die Lösung eines allgemeinern Problems hat Molins (Journ. de Math. IIième Série T. I. p. 265) gegeben, nämlich: durch eine Curve eine developpable Fläche so zu legen, dass die Curve durch Abwickelung derselben in einen Kreisbogen übergeht, wobei selbstverständlich nur von solchen Theilen der Curve die Rede sein kann, deren Krümmungsradien kleiner wie der Radius des Kreisbogens sind. Da sich durch eine Curve unzählig viele developpable Flächen legen lassen, so kann die Curve durch Abwickelung derselben in beliebige ebene Curven transformirt werden. Im Folgenden ist die Lösung des Problems gegeben: durch eine gegebene Curve im Raume eine developpable Fläche so zu legen, dass die Curve oder ein Theil derselben in eine beliebige, gegebene, plane Curve transformirt wird.

§. 1.

Die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes einer Curve Γ seien Functionen von s, wo ∂s das Bogenelement der Curve bedeutet. Seien:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;$$
$$\lambda,\ \mu,\ \nu;$$
$$l,\ m,\ n;$$

die Winkel, welche respective die Tangente, die Hauptnormale und Binormale im Punkte (ξ, η, ζ) mit den Coordinatenaxen bilden, durch ϱ werde der Krümmungshalbmesser und durch r der Torsionsradius bezeichnet. Für den Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) einer Curve Γ_1 mögen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \lambda_1, \mu_1, \nu_1;\ l_1, m_1, n_1;\ \varrho_1, r_1, s_1$ analoge Bedeutungen haben, wie $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ für den Punkt (ξ, η, ζ). Ist die Curve Γ_1 von der Curve Γ abhängig, so ist auch s_1 Function von s.

Sei (x, y, z) ein Punkt einer developpabeln Fläche, welcher mit dem Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) auf derselben Generatrix liegt. Bezeichnet man durch w die Distanz der beiden Punkte (x, y, z) und (ξ_1, η_1, ζ_1), so finden die Gleichungen statt:

$$1)\qquad \begin{aligned} x &= \xi_1 + w \,.\, \cos\alpha_1, \\ y &= \eta_1 + w \,.\, \cos\beta_1, \\ z &= \zeta_1 + w \,.\, \cos\gamma_1. \end{aligned}$$

Sieht man in den vorstehenden Gleichungen w als Function von s an, so stellen dieselben eine Curve vor, welche auf der Fläche liegt. Wird die Fläche auf der xy-Ebene ausgebreitet, so entspricht der Punkt (x_1, y_1) der transformirten Curve dem Punkte (x, y, z) der Curve im Raume durch die Gleichungen:

$$2)\qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= w \cos \varepsilon_1 + \int \cos \varepsilon_1 \,\partial s_1, \\ y_1 &= w \sin \varepsilon_1 + \int \sin \varepsilon_1 \,\partial s_1, \\ \varepsilon_1 &= \int \frac{\partial s_1}{\varrho_1}. \end{aligned} \right.$$

In den vorstehenden Gleichungen ist w natürlich dieselbe Function von s_1, wie in den Gleichungen 1). Bezeichnet man durch R den Krümmungshalbmesser der planen Curve im Punkte (x_1, y_1), so ist:

$$\pm \frac{1}{R} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial s_1}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{\partial x_1}{\partial s_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial s_1^2} - \frac{\partial y_1}{\partial s_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial s_1^2},$$

oder wegen der Gleichungen 2):

$$3)\quad \pm \frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho_1} \frac{1}{\sqrt{\left\{ \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{w}{\varrho_1}\right)^2 \right\}}} - \frac{\varrho_1}{w} \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1 + \frac{\partial w}{\partial s_1}}{\sqrt{\left\{ \left(1 + \frac{\partial w}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{w}{\varrho_1}\right)^2 \right\}}}.$$

Für $w = 0$ giebt die vorstehende Gleichung $R = \varrho_1$, man erhält so das bekannte Resultat, dass der Krümmungshalbmesser der Wendecurve durch Abwickelung der Fläche unverändert bleibt. Dieser Satz wird von Lancret (l. c. p. 420) Fourier zugeschrieben.

§. 2.

Sei (ξ, η, ζ) ein Punkt einer Curve Γ und (ξ_1, η_1, ζ_1) ein Punkt der Wendecurve Γ_1 einer developpabeln Fläche, welche die Curve Γ enthält. Es wird vorausgesetzt, dass die beiden Punkte (ξ, η, ζ) und (ξ_1, η_1, ζ_1) auf derselben Kante der Fläche liegen. Bezeichnet man durch p die Distanz der bemerkten Punkte, so hat man folgende Gleichungen:

$$4)\qquad \xi_1 = \xi + p\cos\alpha_1,\quad \eta_1 = \eta + p\cos\beta_1,\quad \zeta_1 = \zeta + p\cos\gamma_1.$$

Bezeichnen ψ und φ näher zu bestimmende Functionen von s, so kann man setzen:

$$5)\qquad \begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \cos\alpha\,.\cos\psi + \cos\lambda\,.\sin\psi\,.\cos\varphi + \cos l\,.\sin\psi\,.\sin\varphi,\\ \cos\beta_1 &= \cos\beta\,.\cos\psi + \cos\mu\,.\sin\psi\,.\cos\varphi + \cos m\,.\sin\psi\,.\sin\varphi,\\ \cos\gamma_1 &= \cos\gamma\,.\cos\psi + \cos\nu\,.\sin\psi\,.\cos\varphi + \cos n\,.\sin\psi\,.\sin\varphi. \end{aligned}$$

Die vorstehenden Gleichungen mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multiplicirt und addirt, geben: $\cos\alpha\,.\cos\alpha_1 + \cos\beta\,.\cos\beta_1 + \cos\gamma\,.\cos\gamma_1 = \cos\psi$; ψ ist also der Winkel, welchen die Curve Γ mit der Generatrix der Fläche bildet. Die Curve Γ wird als gegeben angesehen, so dass in 4) und 5) s_1 Function von s ist. Die erste Gleichung 5) nach s differentiirt giebt:

$$6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\cos\alpha_1}{\partial s} = &-\cos\alpha\,.\sin\psi\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho}+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\\ &+\cos\lambda\,.\left\{\frac{\cos\psi}{\varrho}+\cos\psi\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial s}+\sin\varphi\sin\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right\}\\ &+\cos l\,.\left\{\cos\psi\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial s}-\cos\varphi\sin\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Die erste Gleichung 4) nach s differentiirt, giebt:

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)\cos\alpha_1 + \cos\alpha + p\frac{\partial\cos\alpha_1}{\partial s}.$$

Substituirt man hierin für $\frac{\partial\cos\alpha_1}{\partial s}$ und $\cos\alpha_1$ ihre Werthe aus 5) und 6), so folgt:

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left\{1+\left(\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)\cos\psi - p\sin\psi\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho}+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\right\}\cos\alpha\\ &+\left\{\frac{p\cos\psi}{\varrho}+\left(\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)\sin\psi\cos\varphi + p\cos\psi\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial s}\right.\\ &\qquad\left.+p\sin\psi\sin\varphi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right\}\cos\lambda\\ &+\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)\sin\psi\,.\sin\varphi + p\cos\psi\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial s}\right.\\ &\qquad\left.-p\sin\psi\cos\varphi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right\}\cos l = 0. \end{aligned}\right.$$

Man erhält durch Differentiation der Gleichungen 4) und 5) noch zwei analoge Gleichungen, in denen α, λ, l durch β, μ, m und γ, ν, n ersetzt sind. Diese Gleichungen zeigen, dass in der Gleichung 7) die Coefficienten

von $\cos\alpha$, $\cos\lambda$, $\cos l$ verschwinden müssen. Die Gleichung 7) zerfällt also in die folgenden:

$$
8)\quad \begin{cases}
1+\left(\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)\cos\psi - p\sin\psi\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho}+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=0,\\
\frac{p\cos\psi}{\varrho}+\left(\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)\sin\psi\cos\varphi + p\cos\psi\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial s}\\
\qquad +p\sin\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\sin\varphi=0,\\
\left(\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)\sin\psi\sin\varphi + p\cos\psi\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial s}\\
\qquad -p\sin\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\cos\varphi=0.
\end{cases}
$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit $\sin\varphi$, die dritte mit $\cos\varphi$ bildet die Differenz der Producte, so folgt:

$$p\left\{\frac{\cos\psi\sin\varphi}{\varrho}+\sin\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right\}=0.$$

Setzt man $p=0$, so geben die Gleichungen 4) $\xi_1=\xi$, $\eta_1=\eta$, $\zeta_1=\zeta$, die Curven Γ und Γ_1 sind dann identisch. Dieser Fall ist in der allgemeinen Gleichung:

$$9)\quad \frac{\cos\psi\,.\,\sin\varphi}{\varrho}+\sin\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)=0,$$

für $\psi=0$ und $\varphi=0$ enthalten. Mittelst dieser Gleichung erhält man aus 8):

$$10)\quad p\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho}+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)=\sin\psi,$$

$$11)\quad \frac{\partial s_1}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}=\cos\psi.$$

Findet die Gleichung 9) statt, so ist durch die Gleichungen 4), 5), 10) und 11) eine beliebige developpable Fläche definirt, welche die gegebene Curve Γ enthält. Die Gleichungen 1) gehen in 4) über für $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$ und $v=-p$. Setzt man in 3) $w=-p$, sieht s_1 als Function von s an, so folgt:

$$
12)\quad \begin{cases}
\pm\frac{1}{R}=\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}\frac{1}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial s_1}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{p}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)^2\right\}}}\\
+\frac{1}{p\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\frac{\partial s_1}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial s_1}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{p}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)^2\right\}}}.
\end{cases}
$$

Die linke Seite der Gleichung 6) ist gleich $\cos\lambda_1\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}$; reducirt man die rechte Seite mittelst der Gleichung 9), so folgt:

13) $\frac{\cos\lambda_1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\frac{\sin\psi}{p}(-\cos\alpha\sin\psi+\cos\lambda\cos\psi\cos\varphi+\cos l\cos\psi\sin\varphi)$.

Diese und zwei ähnliche Gleichungen quadrirt und addirt geben: $\left(\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)^2=\left(\frac{\sin\psi}{p}\right)^2$, also, mit Rücksicht auf 10):

$$14)\quad \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\frac{\sin\psi}{p},\\ \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\frac{\cos\varphi}{\varrho}+\frac{\partial\psi}{\partial s}.\end{array}\right.$$

Setzt man in 12) $p\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\sin\psi$ und nach 11) $\frac{\partial s_1}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}=\cos\psi$, so folgt: $\frac{1}{R}=\sin\psi-\frac{\partial\psi}{\partial s}$, oder nach 10):

$$15)\quad \pm\frac{1}{R}=\frac{\cos\varphi}{\varrho}.$$

Die Gleichung 13) geht wegen 14) über in:

$$\cos\lambda_1=-\cos\alpha\,.\,\sin\psi+\cos\lambda\cos\psi\cos\varphi+\cos l\cos\psi\sin\varphi.$$

Diese Gleichung nach s differentiirt, giebt:

$$\frac{\cos\alpha_1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}+\frac{\cos l_1}{r_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\cos\alpha\,.\cos\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}+\frac{\cos\varphi}{\varrho}\right)$$
$$+\cos\lambda\,.\left\{\frac{\sin\psi}{\varrho}+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial s}-\cos\psi\sin\varphi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right\}$$
$$+\cos l\left\{\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial s}+\cos\psi\cos\varphi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right\}.$$

Wegen der Gleichungen 5), 9), 10) und 14) geht die vorstehende Gleichung über in:

$$\frac{\cos l}{r_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\frac{1}{\varrho}\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}(\cos\lambda\sin\varphi-\cos l\cos\varphi).$$

Auf ähnliche Art erhält man die folgenden Gleichungen:

$$16)\quad \left\{\begin{array}{l}\frac{\cos l_1}{r_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\frac{1}{\varrho}\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}(\cos\lambda\sin\varphi-\cos l\cos\varphi),\\ \frac{\cos m_1}{r_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\frac{1}{\varrho}\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}(\cos\mu\sin\varphi-\cos m\cos\varphi),\\ \frac{\cos n_1}{r_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\frac{1}{\varrho}\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}(\cos\nu\sin\varphi-\cos n\cos\varphi).\end{array}\right.$$

Diese Gleichungen quadrirt und addirt, geben: $\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)^2=\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^2$, setzt man:

$$\frac{1}{r_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\sin\varphi}{\sin\psi},$$

so geben die Gleichungen 16) mit $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ multiplicirt und addirt: $\cos l\,.\cos l_1+\cos m\,.\cos m_1+\cos n\,.\cos n_1=\cos\varphi$, d. h. φ ist der Winkel,

welchen die Normale zur Krümmungsebene der Curve Γ mit der Normalen zur developpabeln Fläche im Punkte (ξ, η, ζ) bildet. Die Gleichungen 16) zeigen unmittelbar, dass die Normalebene der Curve Γ die Normale der developpabeln Fläche enthält. Mit Beziehung hierauf enthält die Gleichung 15) folgenden Satz:

> Wird der Krümmungshalbmesser im Punkte Π einer Curve Γ, welche auf einer developpabeln Fläche liegt, vom Punkte Π aus auf der Normalen zur Fläche abgeschnitten, ferner im Endpunkte dieser Segments ein Perpendikel errichtet, welches die Binormale der Curve im Punkte Π_1 trifft, so ist $\Pi\Pi_1$ der Krümmungshalbmesser der Curve nach Abwickelung der Fläche.

Nimmt man in 15) φ constant, so folgt:

> Schneidet die Krümmungsebene einer Curve die developpable Fläche, welche die Curve enthält, unter einem constanten Winkel, so steht der Krümmungshalbmesser zum Krümmungshalbmesser der transformirten Curve nach Abwickelung der Fläche in constantem Verhältnisse und umgekehrt.

Die Gleichung der berührenden Ebene zur developpabeln Fläche, welche die Curve Γ enthält, ist:

$$(x-\xi_1)\cos l_1 + (y-\eta_1)\cos m_1 + (z-\zeta_1)\cos n_1 = 0,$$

oder auch:

$$(x-\xi)\cos l_1 + (y-\eta_1)\cos m_1 + (z-\zeta_1)\cos n_1 = 0.$$

Wegen der Gleichungen 16) wird die vorstehende Gleichung:

$$17)\quad \begin{aligned}(x-\xi)(\cos\lambda\sin\varphi - \cos l\cos\varphi) + (y-\eta)(\cos\mu\sin\varphi - \cos n\cos\varphi)\\ + (z-\zeta)(\cos\nu\sin\varphi - \cos n\cos\varphi) = 0.\end{aligned}$$

Dieses ist die Gleichung einer Ebene, welche die developpable Fläche einhüllt. Differentiirt man die vorstehende Gleichung zweimal nach s, so erhält man für den Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) der Wendecurve folgende Gleichungen:

$$18)\left\{\begin{aligned}
&(\xi_1-\xi)\cos\alpha + (\eta_1-\eta)\cos\beta + (\zeta_1-\zeta)\cos\gamma = -\frac{\sin\varphi}{\varrho D}\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right),\\
&(\xi_1-\xi)\cos\lambda + (\eta_1-\eta)\cos\mu + (\zeta_1-\zeta)\cos\nu = \frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{\varrho^2 D},\\
&(\xi_1-\xi)\cos l + (\eta_1-\eta)\cos m + (\zeta_1-\zeta)\cos n = \frac{\sin^3\varphi}{\varrho^2 D}.\\
&D = \frac{\cos\varphi}{\varrho}\left\{\left(\frac{\sin\varphi}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right\} + \frac{\sin\varphi}{\varrho}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\\
&\qquad - \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial}{\partial s}\frac{\sin\varphi}{\varrho}.
\end{aligned}\right.$$

Die vorhergehenden Entwickelungen erfordern eine Modification, wenn die developpable Fläche cylindrisch ist, wobei von einer Wendecurve der Fläche nicht mehr die Rede sein kann. In diesem Falle sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

constant, in der Gleichung 6) müssen die Factoren von $\cos\alpha$, $\cos\lambda$, $\cos l$ einzeln verschwinden. Hieraus folgt:

$$19)\qquad \frac{\cos\varphi}{\varrho}+\frac{\partial\psi}{\partial s}=0,\quad \frac{\cos\psi\sin\varphi}{\varrho}+\sin\psi\left(\frac{1}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)=0.$$

Finden diese Gleichungen statt, so folgt umgekehrt, dass $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ constant sind, die developpable Fläche also cylindrisch ist.

Nimmt man in den Gleichungen 19) φ constant, setzt $\varphi=d$, so folgt durch Elimination von ψ:

$$\frac{\sin d\,\frac{\partial}{\partial s}\frac{r}{\varrho}}{1+\left(\sin d\,\frac{r}{\varrho}\right)^2}=\frac{\cos d}{\varrho}.$$

Durch diese Gleichung sind die Curven einer cylindrischen Fläche charakterisirt, deren Krümmungsebenen die Fläche unter dem constanten Winkel d schneiden.

§. 3.

Wird die developpable Fläche, welche die Curve Γ enthält, in der xy-Ebene ausgebreitet, entspricht der Punkt (x_1, y_1) der transformirten Curve dem Punkte (ξ, η, ζ) von Γ, so geben die Gleichungen 2) für $w=-p$:

$$x_1=-p\cos\varepsilon_1+\int\cos\varepsilon_1\,\partial s_1,\quad y_1=-p\sin\varepsilon_1+\int\sin\varepsilon_1\,\partial s_1,\quad \varepsilon_1=\int\frac{\partial s_1}{\varrho_1}.$$

Nun ist nach 11) $\frac{\partial s_1}{\partial s}=\cos\psi+\frac{\partial p}{\partial s}$, folglich:

$$\int\cos\varepsilon_1\,\partial s_1=\int\cos\varepsilon_1\frac{\partial s_1}{\partial s}\partial s=\int\cos\varepsilon_1\cos\psi\,\partial s+\int\frac{\partial p}{\partial s}\cos\varepsilon_1\,\partial s$$

oder:

$$\int\cos\varepsilon_1\partial s_1-p\cos\varepsilon_1=\int\left(\cos\varepsilon_1\cos\psi+p\sin\varepsilon_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial s}\right)\partial s;$$

Die erste Gleichung 14) giebt aber $\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial s_1}{\partial s}=\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial s}=\frac{\sin\psi}{p}$, hierdurch geht die vorstehende Gleichung über in: $\int\cos\varepsilon_1\,\partial s_1-p\cos\varepsilon_1=\int\cos(\varepsilon_1-\psi)\,\partial s$. Die Gleichungen 2) werden für $v=-p$:

$$20)\qquad x_1=\int\cos(\varepsilon_1-\psi)\,\partial s,\quad y_1=\int\sin(\varepsilon_1-\psi)\,\partial s.$$

Die zweite Gleichung 14) giebt $\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial s}-\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{\cos\varphi}{\varrho}$, also

$$\varepsilon_1-\psi=\int\frac{\cos\varphi}{\varrho}\,\partial s+\psi_0,$$

wo ψ_0 eine beliebige Constante bedeutet. Setzt man:

$$21)\qquad \Theta=\int\frac{\cos\varphi}{\varrho}\partial s,$$

also $\varepsilon_1-\psi=\Theta+\psi_0$, so gehen die Gleichungen 20) über in:

$$x_1=\int\cos(\Theta+\psi_0)\,\partial s,\quad y_1=\int\sin(\Theta+\psi_0)\,\partial s,$$

oder:

$$x_1 \cos\psi_0 + y_1 \sin\psi_0 = \int \cos\Theta\, \partial s, \quad y_1 \cos\psi_0 - x_1 \sin\psi_0 = \int \sin\Theta\, \partial s.$$

Da der Winkel ψ_0 sich nur auf eine Drehung der Coordinatenaxen bezieht, so kann man $\psi_0 = 0$ setzen und erhält so die einfachern Gleichungen:

$$22) \qquad x_1 = \int \cos\Theta\, \partial s, \quad y_1 = \int \sin\Theta\, \partial s.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit 21) geben die Curve, in welche Γ durch Abwickelung der Fläche übergeht; ist die transformirte Curve gegeben, so erhält man aus 21) und 22) eine Gleichung zur Bestimmung von Θ, also auch von φ. Ist φ bekannt, so bestimmen die Gleichungen 18) den Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) der Wendecurve der developpabeln Fläche, auf deren Tangente der Punkt (ξ, η, ζ) liegt, wodurch die Fläche bestimmt ist.

Soll die transformirte Curve eine Gerade sein, so ist $R = \infty$, die Gleichung 15) giebt dann $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Die Gleichung 17) wird hierdurch: $(x-\xi)\cos\lambda + (y-\eta)\cos\mu + (z-\zeta)\cos\nu = 0$, was die Gleichung der rectificirenden Ebene der Curve Γ ist. Die Curve Γ ist in diesem Falle eine kürzeste Linie der developpabeln Fläche.

Ist die transformirte Curve ein Kreisbogen mit dem Halbmesser k, so hat man $R = k$, die Gleichung 15) giebt dann $\cos\varphi = \pm\frac{\varrho}{R}$. Die Curve Γ schliesst in diesem Falle auf der developpabeln Fläche unter allen Curven von gleicher Länge den grössten Flächenraum ein. Liegt die Curve Γ auf einer Kugelfläche mit dem Halbmesser k, so ist $k^2 = \varrho^2 + \left(r\frac{\partial\varrho}{\partial s}\right)^2$. Eliminirt man ϱ zwischen dieser Gleichung und $\cos\varphi = \pm\frac{\varrho}{k}$, so folgt: $\frac{1}{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}$. Die Gleichungen 18) geben dann:

$$(\xi_1 - \xi)\cos\alpha + (\eta_1 - \eta)\cos\beta + (\zeta_1 - \zeta)\cos\gamma = 0,$$
$$(\xi_1 - \xi)\cos\lambda + (\eta_1 - \eta)\cos\mu + (\zeta_1 - \zeta)\cos\nu = \varrho,$$
$$(\xi_1 - \xi)\cos l + (\eta_1 - \eta)\cos m + (\zeta_1 - \zeta)\cos n = \operatorname{tang}\varphi \cdot \varrho = \sqrt{(k^2 - \varrho^2)}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen (x, y, z) statt ξ_1, η_1, ζ_1, so leitet man aus denselben leicht die folgenden ab:

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = k^2,$$
$$(x-\xi)\cos\alpha + (y-\eta)\cos\beta + (z-\zeta)\cos\gamma = 0,$$
$$(x-\xi)\cos\lambda + (y-\eta)\cos\mu + (z-\zeta)\cos\nu = \varrho.$$

Die beiden letzten der vorstehenden Gleichungen folgen durch succesive Differentiation der ersten nach s. Hieraus folgt:

Wird eine Curve Γ auf einer Kugelfläche mit dem Halbmesser k zur Directrix einer zweiten Kugelfläche mit demselben Halbmesser genommen, so ist die Wendecurve der einhüllenden Fläche gleichzeitig Wendecurve der developpabeln Fläche, durch deren Abwickelung die Curve Γ in einen Kreisbogen transformirt wird.

Setzt man in den Gleichungen 19) $\frac{\cos\varphi}{\varrho} = \pm\frac{1}{k}$, eliminirt ψ und φ, so folgt:

$$\left\{\cot\left(\psi_0 \mp \frac{s}{k}\right)\frac{k^2-\varrho^2}{\varrho k} \pm \frac{\partial\varrho}{\partial s}\right\}^2 = \frac{k^2-\varrho^2}{r^2},$$

wo ψ_0 eine beliebige Constante bedeutet. Durch die vorstehende Gleichung ist die Curve einer cylindrischen Fläche charakterisirt, welche unter allen Curven von gleicher Länge den grössten Flächeninhalt umschliesst.

Bestimmen die Gleichungen 22) die Evolvente eines Kreises mit dem Halbmesser k, so ist $x_1\frac{\partial x_1}{\partial s} + y_1\frac{\partial y_1}{\partial s} = k$ oder $x_1\cos\Theta + y_1\sin\Theta = k$.

Differentiirt man diese Gleichung zweimal nach s, so folgt mit Rücksicht auf 21):

$$x_1\cos\Theta + y_1\sin\Theta = k, \qquad x_1\sin\Theta - y_1\cos\Theta = \frac{1}{\frac{\partial\Theta}{\partial s}} = \frac{\varrho}{\cos\varphi},$$

$$x_1\cos\Theta + y_1\sin\Theta = \frac{\varrho}{\cos\varphi}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{\varrho}{\cos\varphi}$$

oder x_1, y_1 eliminirt $k - \frac{\varrho}{\cos\varphi}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{\varrho}{\cos\varphi} = 0$. Durch Integration folgt hieraus:

$$23)\qquad \left(\frac{\varrho}{\cos\varphi}\right)^2 = g + 2ks,$$

wo g eine Constante bedeutet.

Die Gleichung $\frac{1}{2}\log(x_1^2+y_1^2) = \cot d.\operatorname{arctang}\frac{y_1}{x_1}$ der logarithmischen Spirale nach s differentiirt giebt nach 22): $x_1\sin(d-\Theta) + y_1\cos(d-\Theta) = 0$. Durch Differentiation nach s folgt:

$$-x_1\cos(d-\Theta) + y_1\sin(d-\Theta) = -\sin d\,\frac{\varrho}{\cos\varphi},$$

$$\left\{x_1\sin(d-\Theta) + y_1\cos(d-\Theta)\right\}\frac{\cos\varphi}{\varrho} + \cos d = \sin d\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{\varrho}{\cos\varphi},$$

oder einfacher $\cot d = \frac{\partial}{\partial s}\,\frac{\varrho}{\cos\varphi}$, folglich, wenn g eine beliebige Constante ist:

$$24)\qquad \frac{\varrho}{\cos\varphi} = g + s\cot d.$$

Da nach 15) $\pm\frac{\varrho}{\cos\varphi}$ der Krümmungshalbmesser der transformirten Curve ist, so geben die Gleichungen 23) und 24) Relationen zwischen dem Krümmungshalbmesser und dem Bogen der transformirten Curve. Das Problem, durch eine gegebene Curve Γ eine developpable Fläche so zu legen, dass die Curve nach Abwickelung der Fläche in eine gegebene plane Curve Γ_2 übergehe, kommt darauf hinaus, den Krümmungshalbmesser der Curve Γ_2 durch den Bogen auszudrücken.

Die Gleichungen einer Cycloide sind:

$x_1 = k(\omega - \sin\omega)$, $y_1 = k(1 - \cos\omega)$, hieraus folgt $\frac{\partial x_1}{\partial s} = 2k \sin^2 \frac{1}{2}\omega \, . \frac{\partial \omega}{\partial s}$,

$\frac{\partial y_1}{\partial s} = 2k \sin\frac{1}{2}\omega \cos\frac{1}{2}\omega \frac{\partial \omega}{\partial s}$, also $2k \sin\frac{1}{2}\omega \frac{\partial \omega}{\partial s} = \pm 1$. Für den Krümmungshalbmesser R findet man die Gleichung:

$\pm \frac{1}{R} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \omega}{\partial s}$ oder, wegen 21), $\frac{\cos\varphi}{\varrho} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \omega}{\partial s} = -\frac{1}{4k \sin\frac{1}{2}\omega}$. Aus

$2k \sin\frac{1}{2}\omega \frac{\partial \omega}{\partial s} = \pm 1$ folgt $-\cos\frac{1}{2}\omega = \frac{g \pm s}{4k}$, wo g eine Constante bedeutet.

Setzt man diesen Werth von $\cos\frac{1}{2}\omega$ in $-4k \sin\frac{1}{2}\omega$, $\cos\varphi = \varrho$, so folgt:

$$\left(\frac{\varrho}{\cos\varphi}\right)^2 + (g \pm s)^2 = (4k)^2.$$

Für $\varphi = 0$ geben die Gleichungen 18) $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$, $\zeta_1 = \zeta$, die Curve Γ ist dann Wendecurve der developpabeln Fläche. Setzt man in den vorhergehenden Gleichungen $\varphi = 0$, so erhält man Bedingungsgleichungen zwischen dem Krümmungshalbmesser und Bogen einer Curve, welche ausdrücken, dass die Curve durch Abwickelung ihrer Tangentenfläche in eine gegebene plane Curve übergeht. Nimmt man z. B. in 24) $\varphi = 0$ und $g = 0$, so folgt:

> Ist der Krümmungshalbmesser einer Curve im Raume proportional dem Bogen, so geht die Curve durch Abwickelung ihrer Tangentenfläche in eine logarithmische Spirale über.

V.

Theorie des Anorthoskops und der anorthoskopischen Figuren.

Von

Dr. Fr. Weber,

Privatlehrer in Pforzheim.

(Hierzu Tafel II, Figur 1 bis 17.)

Unter den zahlreichen physikalischen Apparaten, welche die Andauer der Gesichtsempfindungen und die dadurch nothwendig hervorgerufenen Täuschungen auf eine recht einfache Weise demonstriren, nimmt das Plateau'sche Anorthoskop eine hervorvorragende Stelle ein. Dasselbe besteht in seiner neuesten Einrichtung im Wesentlichen aus zwei parallelen, vertical stehenden Scheiben, von denen jede mittelst einer mechanischen Vorrichtung um eine durch ihren Mittelpunkt gehende horizontale Axe drehbar ist. Die Drehungsaxen der beiden Scheiben liegen in einer und derselben horizontalen Geraden; die mechanische Vorrichtung ist so beschaffen, dass das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Scheiben stets rational und constant ist und dass die Bewegungen der beiden Scheiben sowohl gleichläufige, als auch entgegengesetztläufige sein können. Die beiden Scheiben mögen einfach als vordere und hintere unterschieden werden. Die vordere Scheibe ist opak und besitzt eine Anzahl von geradlinigen, sehr schmalen Spalten, welche von der Nähe des Mittelpunktes aus in radialer Richtung bis nahe zum Rande laufen und so auf der Scheibe vertheilt sind, dass die Winkel zwischen je zwei auf einander folgenden immer gleiche Grössenwerthe besitzen. Die hintere Scheibe ist transparent; sie empfängt ihre Beleuchtung von irgend einer hinter ihr befindlichen Lichtquelle. Diese hintere Scheibe ist nun Träger irgend einer ebenen Figur. Werden die beiden Scheiben in eine hinreichend schnelle Umdrehung gesetzt, so erblickt das Auge, welches sich in der Verlängerung der gemeinschaftlichen Drehungsaxe der beiden Scheiben einige Fuss vom Instrumente befindet und die vordere Scheibe unaufhörlich betrachtet, eine

Figur, die (mit Ausnahme eines einzigen, weiter unten bemerkten Falles) auch nicht im mindesten Aehnlichkeit mit der auf der hinteren Scheibe befindlichen Figur besitzt, welche allgemein als ein Zerrbild der letzteren bezeichnet werden kann.

Die erste Nachricht über sein Instrument gab Plateau im Jahre 1836. Am 9. Januar 1836 legte er dasselbe der Brüsseler Akademie vor, begleitet von folgenden Notizen (Poggendorff's Annal. der Physik und Chemie, Band XXXVII, S. 464):

„Das Anorthoskop besteht im Wesentlichen aus: 1) einer Reihe von transparenten Scheiben mit unförmlichen Figuren darauf; 2) einer schwarzen Pappscheibe mit mehreren Spalten; 3) einer mechanischen Vorrichtung, enthaltend eine grosse Rolle mit doppelter Hohlkehle, die zwei kleinere von ungleichem Durchmesser, auf einer gemeinschaftlichen Axe befindlich, in Umlauf setzt. Beim Gebrauche des Instruments steckt man die schwarze Scheibe auf die vordere der kleinen Rollen und eine der transparenten Scheiben auf die hintere; dann beleuchtet man die letztere Scheibe von der Rückseite, stellt sich einige Fuss vom Instrument entfernt, die Augen in der Höhe der kleinen Rolle haltend und lässt einer zweiten Person die Handhabe drehen. Obgleich sich dann die transparente Scheibe mit einer grossen Geschwindigkeit bewegt, scheint sie doch still zu stehen, und die missgestaltete Figur ist in eine vollkommen regelmässige umgewandelt. Wenn man regelmässige Figuren erblicken soll, müssen die Figuren auf der transparenten Scheibe missgestaltet gezeichnet werden nach einem Gesetze, welches abhängt von dem Geschwindigkeitsverhältniss beider Scheiben und von der relativen Richtung ihrer Bewegungen."

Bei dem Instrumente, welches Plateau, unmittelbar nach seiner Erfindung, in die Hände des Publikums gegeben hatte, verhielten sich die Geschwindigkeiten der beiden Scheiben wie 4 : 1; die Bewegungen der beiden Scheiben waren entgegengesetzt gerichtet. Dieses so eingerichtete Instrument verwandelte die auf der hinteren Scheibe befindliche Figur in eine bestimmte andere; die Grösse der Verzerrung der entstandenen Figur war in bestimmter Weise abhängig von dem Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten und von der Entgegengesetztläufigkeit der beiden Scheiben. Es fragte sich jetzt, wie ändert sich die Grösse der Verzerrung der verwandelten Figur, wenn das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten 4 : 1 in irgend ein anderes übergeht oder wenn die beiden Scheiben aus der Entgegengesetztläufigkeit in die Gleichläufigkeit gebracht werden? welchen Einfluss auf die Verwandlung hat eine Vermehrung oder Verminderung der Spaltenzahl? Die Lösung dieser Fragen veröffentlichte Plateau in einer kleinen Arbeit, betitelt: „Zweite Notiz über eine neue, sonderbare Anwendung des Verweilens der Eindrücke auf der Netzhaut" (Poggendorff's Annal. der Phys. und Chemie, Band 155, S. 209). In dem ersten Theile dieser Arbeit behandelt Plateau das Anorthoskop mit gleichläufigen Scheiben, in

dem zweiten das Anorthoskop mit entgegengesetztläufigen Scheiben und löst, von geometrischen Betrachtungen ausgehend, für jeden dieser beiden Fälle folgende Fragen: 1) In welcher Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der beiden Scheiben steht die Grösse der Verzerrung einer Figur? 2) Wie viel Spalten dürfen in der vorderen, opaken Scheibe angebracht werden?

Mit der Beantwortung dieser Fragen ist aber die Theorie des Anorthoskops nicht erschöpft; die Bestimmung der Grösse der Verzerrung als Function der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Scheiben ist nur die Anbahnung des Weges zur Lösung der Hauptaufgabe, welche hier gestellt werden muss, nämlich der Aufgabe, aus dem Bildungsgesetze der auf der transparenten Scheibe befindlichen Figur und aus den nach Grösse und Richtung gegebenen Winkelgeschwindigkeiten der beiden Scheiben das Bildungsgesetz der im Anorthoskop entstehenden Figur zu bestimmen, und umgekehrt, aus dem Bildungsgesetze der im Anorthoskop entstehenden Figur und aus den nach Grösse und Richtung gegebenen Winkelgeschwindigkeiten der beiden Scheiben das Bildungsgesetz der auf der transparenten Scheibe liegenden Figur zu finden. Nach der Lösung dieser beiden Aufgaben wird es dann auch noch möglich sein, die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Scheiben nach Grösse und Richtung aus den Bildungsgesetzen der beiden Figuren, der auf der transparenten Scheibe gezeichneten und der im Anorthoskop daraus entstandenen, zu bestimmen. Diese drei Aufgaben sind den drei Hauptproblemen der Katoptrik, nämlich den Aufgaben, bei gegebenem Object und gegebener Beschaffenheit des Spiegels das Spiegelbild zu bestimmen, bei gegebenem Spiegelbild und gegebener Beschaffenheit des Spiegels das Object zu bestimmen und bei gegebenem Object und gegebenem Spiegelbild die Beschaffenheit des Spiegels zu finden, vollständig analog. Wir wollen deshalb die auf der transparenten Scheibe des Anorthoskops befindliche Figur der Kürze wegen als Object und die im Anorthoskop hieraus resultirende Figur als anorthoskopisches Bild jenes Objects bezeichnen. Um grössere Allgemeinheit zu erzielen, trennen wir nicht, wie Plateau, die beiden Fälle der Gleich- und Entgegengesetztläufigkeit, sondern suchen die entsprechenden Gleichungen aus allgemeineren Betrachtungen für beide Fälle zu gleicher Zeit abzuleiten. Zu diesem Zwecke sollen einfache phoronomische Betrachtungen als Ausgangspunkt der folgenden Abhandlung dienen. Dieselbe wird I. die allgemeine Beziehung zwischen dem Objecte und dem anorthoskopischen Bilde; II. die Discussion dieser allgemeinen Beziehung und die Bestimmung der Anzahl der anorthoskopischen Bilder; III. die Bestimmung der grösstmöglichen Spaltenzahl; IV. die allgemeinen Eigenschaften der anorthoskopischen Figuren; V. das anorthoskopische Bild der geraden Linie; und VI. das anorthoskopische Bild der Kreislinie zu ihrem Gegenstande haben.

I.

Allgemeine Beziehung zwischen dem Objecte und dem anorthoskopischen Bilde.

Zwei parallele, vertical stehende, concentrisch hinter einander liegende Scheiben mögen sich um eine durch ihre Mittelpunkte gehende horizontale Axe drehen; die vordere mag zur Zeit t die Winkelgeschwindigkeit v_1, die hintere zu derselben Zeit die Winkelgeschwindigkeit v_2 haben. Beide Geschwindigkeiten sollen in der Beziehung stehen, dass in jedem Zeitpunkte die Gleichung $\frac{v_2}{v_1} = k'$ gilt, wo k' eine constante, rationale Grösse bedeutet. Der Radius OR' der vorderen Scheibe und der Radius OR'' der hinteren Scheibe mögen sich in dem Zeitpunkte $t = 0$ in der Verticallage OX befinden, welche als Anfangsrichtung gelten soll. (Tafel II, Fig. 1.) Die von dieser Verticallage aus von den Radien OR' und R'' nach rechts beschriebenen Winkel sollen als positiv, die nach links beschriebenen als negativ gelten. Bezeichnen wir die von den Radien OR' und OR'' während der Zeit t zurückgelegten Winkel mit w_1 und w_2, so können wir allgemein setzen:

$$w_1 = v_1 t + \tfrac{1}{2} \frac{dv_1}{dt} dt + \ldots$$

$$w_2 = v_2 t + \tfrac{1}{2} \frac{dv_2}{dt} dt + \ldots$$

oder, da $\frac{v_2}{v_1} = k'$:

$$w_1 = v_1 t + \tfrac{1}{2} \frac{dv_1}{dt} dt + \ldots$$

$$w_2 = k'\left(v_1 t + \tfrac{1}{2} \frac{dv_1}{dt} dt + \ldots\right).$$

Der Winkel w, welchen die Radien OR' und OR'' zur Zeit t bilden, oder welchen der Radius OR'' mit dem unmittelbar hinter OR' liegenden Radius OR''_1 einschliesst, besitzt offenbar folgende Grösse:

$$w = w_1 - w_2.$$

Hiernach gilt folgende Proportion:

$$w_1 : w = w_1 : w_1 - w_2,$$

oder, wenn auf der rechten Seite dieser Proportion die obigen Werthe für w_1 und w_2 eingesetzt werden:

$$w_1 : w = 1 : 1 - \frac{v_2}{v_1}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$w_1 = \frac{w}{1 - \frac{v_2}{v_1}} = \frac{w}{1 - k'}.$$

Im Fall der Gleichläufigkeit der beiden Scheiben gilt also die

Gleichung: $w_1 = \frac{w}{1 - \frac{v_2}{v_1}} = \frac{w}{1-k'}$; im Fall der Entgegengesetztläufigkeit aber: $w_1 = \frac{w}{1 + \frac{v_2}{v_1}} = \frac{w}{1+k'}$.

Nach diesen einfachen Betrachtungen kehren wir wieder zu unserem Gegenstande, dem Anorthoskope zurück. Der Zweck, welchen man beim Gebrauche des Anorthoskops beabsichtigt, ist, wie schon oben erwähnt, die Verwandlung irgend einer Figur in eine andere. Die durch das Anorthoskop verwandelte Figur ist nichts Anderes, als die Summe der Eindrücke, welche das durch die Einschnitte der vorderen Scheibe sehende Auge von der auf der hinteren, transparenten Scheibe gezeichneten Figur erhält. Alle diejenigen Punkte dieser letzteren Figur, welche das durch einen Einschnitt der vorderen Scheibe hindurchsehende Auge in irgend einem Zeitmomente erhält, lagern sich, auf einer geraden Linie angeordnet, auf der Retina, so dass auf der letzteren nach einer Reihe von Zeitmomenten, während deren Verlauf das Auge durch den Einschnitt sah, sich ein System von Punkten der auf der transparenten Scheibe befindlichen Figur vorfindet, welches auf einer Reihe von geraden Linien ausgebreitet ist, die sämmtlich von dem Mittelpunkt der Drehung auslaufen. Diese Linien werden continuirlich neben einander liegen, sobald die Zeit der einmaligen Umdrehung der vorderen Scheibe gerade so gross oder kleiner ist, als die Zeit, während welcher der Eindruck auf der Netzhaut noch haftet, nachdem der Gegenstand schon aus dem Gesichtskreis entfernt ist.

Alle diejenigen Punkte der auf der transparenten Scheibe befindlichen Figur oder des Objects, welche auf einem und demselben Radius dieser Scheibe liegen, werden auch in der resultirenden Figur in einer von dem Mittelpunkte der vorderen Scheibe nach deren Peripherie gezogenen Geraden liegen. Die Lage aber, welche zwei mit Bildpunkten übersähete Radien der transparenten Scheibe gegen einander haben, wird eine andere sein, als die Lage, welche die mit denselben Bildpunkten versehenen Radien in der neuen, durch das Anorthoskop gebildeten Figur besitzen. Das anorthoskopische Bild wird also aus dem Object im Anorthoskop durch Verschiebung, Verzerrung in der Richtung der Drehung erzeugt; das anorthoskopische Bild ist nichts Anderes, als die fächerförmige Zusammenziehung, resp. Ausbreitung des Objectes. Die Grösse dieser Ausbreitung, resp. Zusammenziehung können wir nach den obigen Betrachtungen sofort als Function der beiden Winkelgeschwindigkeiten v_2 und v_1 und der Drehungsrichtung der beiden Scheiben angeben. Lassen wir nämlich an die Stelle des Radius OR' der vorderen Scheibe eine feine Spalte treten und nehmen wir an, es finden sich auf den Radien OR'' und OR''_1 der hinteren Scheibe eine Reihe von Bildpunkten, so erfahren wir nach der obigen Gleichung, dass der Winkel w_1, welchen diejenigen beiden Radien in der entstehenden Figur ein-

schliessen, welche dieselben Reihen von Bildpunkten tragen, mit dem Winkel w, den die Radien OR'' und OR''_1 bilden, in folgender Relation steht:

$$w_1 = \frac{w}{1 - \frac{v_2}{v_1}} = \frac{w}{1 - k'} \quad \text{oder:}$$

$$w = w_1 \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = w_1 (1 - k').$$

Wir erhalten also folgende zwei Sätze:

„Schliessen zwei mit bestimmten Bildpunkten versehene Radien der transparenten Scheibe den Winkel w ein, so bilden die mit denselben Bildpunkten behafteten Radien in der entstehenden Figur den Winkel $\frac{w}{1 - k'}$."

„Schliessen zwei mit bestimmten Bildpunkten versehene Radien in der entstehenden Figur den Winkel w_1 ein, so bilden die mit denselben Bildpunkten besetzten Radien der transparenten Scheibe den Winkel $w_1 (1 - k')$."

Ehe wir hier weiter gehen, wollen wir eine Bemerkung anreihen, welche für alles Folgende gilt. Gegenstand unserer mathematischen Betrachtung kann nämlich das wirkliche Anorthoskop mit seinen Spalten nicht sein. An die Stelle der Einschnitte der vorderen Scheibe müssen wir unendlich schmale Einschnitte setzen. Jede Spalte mit einer bestimmten, endlichen Breite giebt dem entstehenden anorthoskopischen Bilde eine ziemlich unbestimmte Contour und zwar wächst die Unbestimmtheit mit der Breite der Spalten.

II.

Discussion der Gleichung: $w_1 = \frac{w}{1 - k'}$; Bestimmung der Anzahl der entstehenden anorthoskopischen Bilder.

Die Discussion der genannten Gleichung macht es nothwendig, die beiden möglichen Fälle der Gleich- und Entgegengesetztläufigkeit der beiden Scheiben auseinander zu halten und anzunehmen, dass die vordere Scheibe nur einen einzigen Einschnitt trägt. Im Falle der Entgegengesetztläufigkeit ist:

$$w_1 = \frac{w}{1 + \frac{v_2}{v_1}} = \frac{w_1 + w_2}{1 + k'},$$

oder: $$w_1 (1 + k') = w_1 + w_2,$$

wo w_1 derjenige Winkel ist, um welchen sich die Spalte der vorderen Scheibe während einer gewissen Zeit aus ihrer Anfangslage gedreht hat, w_2 dagegen den Winkel bedeutet, welchen derjenige Radius der hinteren

Scheibe, der in der anfänglichen Lage durch die Spalte zu sehen war, während derselben Zeit beschrieben hat. Ist $w_1 + w_2 = 2\pi$ geworden, so befindet sich die Spalte abermals vor dem Radius der hinteren Scheibe, welcher in der Anfangslage hinter ihr lag, dann ist also das ganze Bild an der Spalte vorübergegangen. Bezeichnen wir den speciellen Werth von w_1, welcher die Summe $w_1 + w_2$ zu 2π macht, mit w_0, so wird

$$w_0(1 + k') = 2\pi \text{ und daher } w_0 = \frac{2\pi}{1 + k'},$$

w_0 ist also in diesem Falle immer kleiner, als 2π.

Nehmen wir an, die anfängliche Lage der Spalte sei diejenige gewesen, in welcher der erste Punkt der auf der transparenten Scheibe befindlichen Figur durch dieselbe sichtbar war, so wird die ganze Figur an der Spalte vorübergegangen sein, sobald sich die Spalte um den Winkel $w_0 = \frac{2\pi}{1 + k'}$ gedreht hat, vorausgesetzt, dass die Figur den Winkelraum 2π der transparenten Scheibe gerade ausfüllt; ist dieser Winkelraum kleiner, als 2π, so ist die ganze Figur schon früher vor der Spalte vorübergegangen. Nach einer abermaligen Drehung der Spalte um w_0 ist wiederum das ganze Bild an derselben vorübergezogen. Und so fort. Es entstehen also mehrere Bilder, die sich um den Mittelpunkt der Drehung gruppiren. Die Anzahl dieser Bilder ist gleich dem Zahlenwerthe des Quotienten

$$\frac{2\pi}{w_0} = 1 + \frac{v_2}{v_1} = 1 + k'.$$

Der Winkelraum, welchen jedes Bild einnimmt, ist kleiner, als der Winkelraum, welcher von dem Objecte auf der transparenten Scheibe umfasst wird; die einzelnen entstehenden Bilder können mithin als Zusammenziehungen des Objectes bezeichnet werden. Damit das Auge diese Bilder deutlich wahrnehmen kann, muss der Quotient $\frac{v_2}{v_1}$ eine ganze Zahl sein; ist dieses nicht der Fall, so fallen die bei den successiven Umdrehungen entstehenden Bilder nicht auf einander, sondern greifen in einander über und zerstören sich gegenseitig. Beträgt der Winkel w_0 gerade $\frac{2\pi}{1 + k'}$, so haben je zwei auf einander folgende Bilder wenigstens einen Punkt gemeinsam; die ganze Erscheinung bietet dann einen ununterbrochenen Zug um den Mittelpunkt der Drehung dar, in welchem, falls $1 + \frac{v_2}{v_1}$ eine ganze Zahl ist, $1 + \frac{v_2}{v_1}$ Bilder deutlich zu erkennen sind; besitzt der Winkel w_0 aber einen kleineren Werth als $\frac{2\pi}{1 + k'}$, und ist $1 + \frac{v_2}{v_1}$ eine ganze Zahl, so entstehen $1 + \frac{v_2}{v_1}$ Bilder, welche um den Mittelpunkt der Drehung symme-

trisch vertheilt sind und in bestimmten Zwischenräumen getrennt von einander liegen.

Im Falle der **Gleichläufigkeit** der beiden Scheiben gilt nach oben die Gleichung:

$$w_1 = \frac{w}{1 - \frac{v_2}{v_1}} = \frac{w_1 - w_2}{1 - \frac{v_2}{v_1}}$$

oder:

$$w_1 \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = w_1 - w_2.$$

Der Factor $\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)$ wird positiv, wenn $v_2 < v_1$; negativ, wenn $v_2 > v_1$.

a) Es sei $v_2 < v_1$. In diesem Falle ist

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1} = 1 - \frac{v_2}{v_1} = \lambda,$$

wo λ einen ächten Bruch bezeichnet. Das anorthoskopische Bild ist also eine **Ausbreitung** des Objectes auf der transparenten Scheibe, und zwar wächst die Grösse der Ausbreitung in eben dem Maasse, als λ kleiner wird, d. h., als v_2 und v_1 sich der Gleichheit nähern. Derjenige Werth von w_1, der zu dem Werthe $w_1 - w_2 = 2\pi$ gehört, ist $w_0 = \frac{2\pi}{\lambda} => 2\pi$; die Spalte der vorderen Scheibe muss also mehr als eine Umdrehung machen, um mit demselben Radius der hinteren Scheibe zur Deckung zu kommen. Es kann hiernach in diesem Falle nur ein einziges Bild entstehen. Der grösste Winkelraum, den dieses Bild einnehmen kann, ist 2π; es darf also der Winkelraum des auf der transparenten Scheibe befindlichen Bildes die Grenze $2\pi\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)$ nicht überschreiten. Das einzige Bild, welches in diesem Falle im Anorthoskop resultirt, kann nur dann deutlich gesehen werden, wenn die auf einander folgenden Coincidenzen der Spalte der vorderen Scheibe mit irgend einem Punkte der hinteren Scheibe an einem und demselben Orte geschehen. Dann muss die Spalte in der Zeit, welche von einer Coincidenz bis zur nächstfolgenden verstreicht, eine oder mehrere ganze Umdrehungen machen. Während dieser Zeit beschreibt jeder Radius der hinteren Scheibe den Winkel 2π, die Spalte der vorderen Scheibe den Winkel $w_1 = \frac{2\pi}{1 - \frac{v_2}{v_1}} = 2\pi . \frac{v_1}{v_1 - v_2}$.

Soll also ein deutliches Bild entstehen, so muss zwischen v_2 und v_1 die Bedingungsgleichung stattfinden: $\frac{v_1}{v_1 - v_2} = n$, wo n irgend eine ganze Zahl ist.

Aus dieser Bedingungsgleichung ergiebt sich: $v_1 = \frac{n}{n-1} v_2$. Nachdem sich die vordere Scheibe einmal herumgedreht hat, hat sich ein Radius der hin-

teren Scheibe um den Winkel $2\pi\left(1-\frac{v_2}{v_1}\right)=2\pi\cdot\frac{1}{n}$, also gerade um den Winkel gedreht, welchen die zu verwandelnde Figur einnehmen darf. Befand sich also die Spalte der vorderen Scheibe zu Anfang der Drehung gerade vor dem ersten Punkte dieser Figur, so wird dieselbe in den $n-1$ folgenden Umdrehungen immer vor dem leeren, unbeschriebenen Theile der hinteren Scheibe vorübergehen. Theilt man aber die hintere Scheibe in n gleiche Sectoren und bringt in jedem Sector dieselbe Zeichnung mit der nämlichen Lage zum Mittelpunkt an, so werden Figuren ohne Unterbrechung erzeugt, die sich alle vollständig decken, wie es das von Plateau in den Handel gebrachte Anorthoskop zeigt.

b) Es sei $v_2 > v_1$. Aus der Gleichung $\frac{w_1-w_2}{w_1}=1-\frac{v_2}{v_1}$ ergiebt sich dann

$$w_1=\frac{w_1-w_2}{1-\frac{v_2}{v_1}}=-\frac{w_1-w_2}{\frac{v_2}{v_1}-1}.$$

In diesem Falle ist also w_1 immer negativ. Dieser negative Werth von w_1 sagt, dass alle die Bildpunkte, welche auf der transparenten Scheibe in Bezug auf irgend einen Radius nach rechts liegen, in der im Anorthoskop entstehenden Figur in Bezug auf den entsprechenden Radius nach links liegen und umgekehrt. Fände also in der Drehungsrichtung keine Verzerrung statt, so würde eine auf der transparenten Scheibe gezeichnete linke Hand im Anorthoskop als rechte Hand erscheinen. Während wir bisher die anorthoskopischen Figuren immer aus den auf der transparenten Scheibe befindlichen durch Zusammenziehung oder Ausdehnung in der Richtung der Drehung hervorgehen sahen, finden wir hier eine zweite Entstehungsart derselben, die Entstehung durch Umkehrung. Da die Bedeutung des Vorzeichens in der letzten Gleichung jetzt klar ist, halten wir uns in dem Folgenden nur an die Gleichung:

$$w_1=\frac{w_1-w_2}{\frac{v_2}{v_1}-1}.$$

Der Nenner $\frac{v_2}{v_1}-1$ in dieser Gleichung kann entweder grösser, als die Einheit, oder kleiner, als die Einheit sein. Hiernach müssen wir unterscheiden:

$$\alpha)\quad \frac{v_2}{v_1}-1>1,\ \text{d. h. } v_2>2v_1;$$

$$\beta)\quad \frac{v_2}{v_1}-1=1,\ \text{d. h. } v_2=2v_1;$$

$$\gamma)\quad \frac{v_2}{v_1}-1<1,\ \text{d. h. } v_2<2v_1.$$

c) In diesem Falle wird:

$$x_1\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)=x_1-x_2=x.$$

Die im Anorthoskop entstehende Figur ist also, abgesehen von der Umkehrung eine Zusammenziehung der auf der transparenten Scheibe befindlichen Figur in der Richtung der Drehung. Nachdem die hintere Scheibe eine ganze Umdrehung gemacht hat, nachdem also sämmtliche Punkte derselben hinter der Spalte vorübergegangen sind, hat sich die vordere Scheibe um den Winkel $\frac{2\pi}{\frac{v_2}{v_1}-1}$ gedreht; die letztere wird also eine ganze Umdrehung gemacht haben, wenn die erstere $\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)$ Umdrehungen vollendet hat. Ist der Quotient $\frac{v_2}{v_1}$ gleich einer ganzen Zahl, so steht die Spalte der vorderen Scheibe nach einer ganzen Umdrehung genau wieder vor derselben Stelle der hinteren Scheibe, als zu Anfang ihrer Drehung, so entstehen also $\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)$ Bilder, welche symmetrisch um den Mittelpunkt der Drehung gruppirt sind. Der Winkelraum, welchen eines der entstandenen Bilder ausfüllt, ist der $\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)^{te}$ Theil desjenigen Winkelraumes, welchen das auf der hinteren Scheibe befindliche Bild einnimmt; erfüllt das letztere den ganzen Winkelraum 2π, so resultiren $\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)$ Bilder, welche, ohne einen Zwischenraum zwischen sich zu lassen, symmetrisch um den Mittelpunkt der Drehung lagern. Die hier auftretende Erscheinung ist demnach, die Umgekehrtheit des Bildes abgerechnet, ganz ähnlich derjenigen, welche wir oben in dem Falle gefunden haben, in welchem sich die beiden Scheiben des Anorthoskops mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach entgegengesetzten Richtungen bewegten; auch dort fanden wir $\left(1+\frac{v_2}{v_1}\right)$ resultirende Bilder, welche sich symmetrisch um den Mittelpunkt der Drehung legten. Sollen die hier entstehenden Bilder, abgesehen von der Umkehrung, mit den dort entstehenden, bei gleichem Bilde auf der transparenten Scheibe, identisch werden, so muss offenbar zwischen den in den beiden Fällen stattfindenden Winkelgeschwindigkeiten v_2, v_1 und v'_2 und v'_1 eine gewisse Relation gelten. Diese Relation lässt sich auf folgende Weise bestimmen: Drehen sich die beiden Scheiben mit den Geschwindigkeiten v_2 und v_1 nach gleichen Richtungen und ist $\frac{v_2}{v_1}-1>1$, so gilt, sofern man blos auf den absoluten Werth von w_1 Rücksicht nimmt, die Gleichung:

$$w_1 = \frac{w_1 - w_2}{\frac{v_2}{v_1} - 1}.$$

Drehen sich die beiden Scheiben mit den Geschwindigkeiten v'_2 und v'_1 nach entgegengesetzten Richtungen, so ist nach dem Obigen:

$$w'_1 = \frac{w_1 - w_2}{1 + \frac{v'_2}{v'_1}}.$$

Liegt nun in beiden Fällen eine und dieselbe Figur auf der hinteren Scheibe, so werden die entstehenden Bilder in Bezug auf Ausdehnung gleich, wenn

$$w_1 = w'_1, \text{ d. h. wenn } \frac{v_2}{v_1} - 1 = 1 + \frac{v'_2}{v'_1}$$

oder wenn

$$\frac{v_2}{v_1} = 2 + \frac{v'_2}{v'_1}.$$

Die in beiden Fällen entstehenden Bilder werden vollkommen identisch, sobald die transparente Scheibe in dem Fall der gleichen Drehungsrichtung der beiden Scheiben umgekehrt in den Apparat gebracht wird, d. h. so in den Apparat gebracht wird, dass die früher der Spalte zugekehrte Seite jetzt zu der von der Spalte abgewendeten wird.

Wir haben somit das Resultat erhalten, dass aus einem und demselben Bilde auf der transparenten Scheibe bei ganz verschiedenen Geschwindigkeitssystemen der beiden Scheiben dieselben Bilder erhalten werden können. Diese Geschwindigkeitssysteme v_2 und v_1 und v'_2 und v'_1 stehen in der Relation: $\frac{v_2}{v_1} = 2 + \frac{v'_2}{v'_1}$.

β) $$\frac{v_2}{v_1} - 1 = 1, \text{ oder } v_2 = 2v_1.$$

In diesem Falle wird $w_1 = -\frac{w_1 - w_2}{\frac{v_2}{v_1} - 1} = -(w_1 - w_2) = -w$;

die entstehende Figur ist also nichts Anderes, als die Umkehrung der auf der transparenten Scheibe befindlichen Figur. Befindet sich auf der transparenten Scheibe eine linke Hand, so ist die entstehende Figur eine rechte Hand; sieht ein auf der transparenten Scheibe befindliches Gesicht von links nach rechts, so sieht das im Anorthoskop erzeugte Gesicht von rechts nach links. Dieser Unterschied der erzeugten und der zu Grunde gelegten Figur wird aber aufgehoben, sobald die hintere Scheibe eine Figur trägt, welche durch eine in die Radialrichtung fallende Gerade in zwei congruente Theile zerlegt wird. So giebt eine auf der hinteren Scheibe gezeichnete Kreislinie im Anorthoskop in diesem Falle genau wieder dieselbe Kreislinie.

Auch hier können wir wieder zu diesem System der Geschwindigkeiten der gleichläufigen Scheiben ein System von Geschwindigkeiten der entgegengesetztläufigen Scheiben finden, welches, ganz abgesehen von der Umkehrung der Bilder, dieselben Bilder erzeugt. Nennen wir diese Geschwindigkeiten bei entgegengesetztläufigen Scheiben wieder v'_2 und v'_1, so gilt folgende Relation:

$$\frac{v_2}{v_1}=2+\frac{v'_2}{v'_1},\text{ d. h. } 2=2+\frac{v'_2}{v'_1}.$$

Es muss also stets $v'_2=0$ sein, während v'_1 jeden beliebigen Werth, der von 0 verschieden ist, annehmen kann.

γ) $$\frac{v_2}{v_1}-1<1,\text{ d. h. } v_2<2v_1.$$

Für diesen Fall kommt

$$w_1=-\frac{w_1-w_2}{\frac{v_2}{v_1}-1}.$$

oder wenn wir von dem negativen Zeichen absehen und den ächten Bruch $\frac{v_2}{v_1}-1$ mit λ bezeichnen

$$w_1=\frac{w_1-w_2}{\lambda}$$

In diesem Falle umfasst also die im Anorthoskop entstehende Figur einen grösseren Winkelraum, als die auf der transparenten Scheibe befindliche. Der grösste Winkelraum, den die entstehende Figur umfassen kann, ist 2π; der hierzu gehörige Winkelraum der auf der transparenten Scheibe befindlichen Figur ist $2\pi\lambda$. Die Anzahl solcher gleich grosser Winkelräume auf der transparenten Scheibe ist $\frac{1}{\lambda}$. Soll das entstehende Bild ein klares, bestimmtes sein, so muss der reciproke Werth von λ gleich einer ganzen Zahl sein. Hiernach können in diesem Falle auf der transparenten Scheibe $\frac{1}{\lambda}$ Figuren angebracht werden, von denen eine jede den Winkelraum $2\pi\lambda$ umfasst und mit allen anderen die gleiche Lage gegen den Mittelpunkt der Drehung einnimmt.

Dasselbe Bild (abgesehen von der Umkehrung) wird aber auch noch durch ein zweites System von Winkelgeschwindigkeiten v'_2 und v'_1 bei einer und derselben transparenten Scheibe erzeugt. Lassen wir diese Winkelgeschwindigkeiten v'_2 und v'_1 für gleichläufige Bewegungen gelten und setzen wir $v'_2<v'_1$, so ist nach Seite 140, Fall a:

$$w'_1=\frac{w_1-w_2}{1-\frac{v'_2}{v'_1}}.$$

In dem obigen Falle ist:

$$w_1 = \frac{w_1 \cdot - w_1}{\frac{v_2}{v_1} - 1}$$

die Relation, welche zwischen diesen beiden Geschwindigkeitssystemen bestehen muss, ist hiernach:

$$\frac{v_2}{v_1} - 1 = 1 - \frac{v'_2}{v'_1}$$

d. h.

$$\frac{v_2}{v_1} + \frac{v'_2}{v'_1} = 2.$$

III.

Bestimmung der Anzahl der Spalten, welche in der vorderen Scheibe des Anorthoskops angebracht werden können.

In den bisherigen Entwickelungen haben wir immer die Annahme gemacht, dass sich in der vorderen Scheibe des Anorthoskops nur eine Spalte befindet; diese Annahme machten wir zum Zweck einer einfacheren Bestimmung der Ausdehnung und der Anzahl der anorthoskopischen Bilder. Wir lassen jetzt die gemachte Annahme fallen und stellen die Frage: Wieviel Spalten können in jedem der im vorhergehenden Abschnitt unterschiedenen Fälle in der vorderen Scheibe angebracht werden?

Besitzen die beiden Scheiben des Anorthoskops eine entgegengesetztläufige Bewegung, so hat die vordere Scheibe, mithin auch eine Spalte derselben, den Winkel $2\pi \frac{v_1}{v_2}$ beschrieben, nachdem die transparente Scheibe eine volle Umdrehung gemacht hat. Befindet sich nach dieser Drehung der vorderen Scheibe eine zweite Spalte vor derjenigen Stelle des auf der transparenten Scheibe befindlichen Objectes, welche vor der Drehung durch die erste Spalte sichtbar war, so liefert diese zweite Spalte bei der nächsten ganzen Umdrehung der transparenten Scheibe ein zweites Bild, welches sich mit dem durch die erste Spalte entstandenen vollständig deckt. Nach diesen zwei ganzen Umdrehungen der hinteren Scheibe hat sich die vordere um den Winkel $2.2\pi \frac{v_1}{v_2}$ gedreht. Ist in der vorderen Scheibe eine dritte Spalte vorhanden, welche mit der zweiten den Winkel $2\pi \frac{v_1}{v_2}$ und mit der ersten den Winkel $2.2\pi \frac{v_1}{v_2}$ einschliesst, so empfängt das Auge bei der nächstfolgenden ganzen Umdrehung der hinteren Scheibe durch diese dritte Spalte ein Bild, das sich mit den durch die erste und zweite Spalte erhaltenen vollständig deckt. Hieraus geht hervor, dass soviele Spalten in der vorderen Scheibe angebracht werden

können, als der Quotient $\frac{2\pi}{2\pi\frac{v_1}{v_2}}$ d. h. der Quotient $\frac{v_2}{v_1}$ Einheiten zählt. $\left(\frac{v_2}{v_1}\right.$ muss nach Seite 139 einer ganzen Zahl gleich sein.$\left.\right)$

Bei Gleichläufigkeit der beiden Scheiben haben wir oben die beiden Fälle $v_2 > v_1$ und $v_2 < v_1$ unterschieden. Auch hier halten wir diese Fälle getrennt.

1) $v_2 < v_1$. Auf Seite 140 sind wir in diesem Falle zu dem Resultate gekommen, dass $\frac{v_1}{v_1 - v_2}$ Figuren auf der transparenten Scheibe, durch die eine Spalte der vorderen Scheibe angesehen, eine Figur erzeugen. Soll dasselbe bei mehreren Spalten stattfinden, so muss nach jeder Coincidenz einer Spalte mit dem ersten Punkte einer der auf der hinteren Scheibe befindlichen Figuren die Coincidenz der nächstfolgenden Spalte mit dem ersten Punkte der nächstfolgenden Figur der hinteren Scheibe an einer und derselben Stelle des Raumes geschehen. Während der Zeit, welche von einer solchen Coincidenz bis zur nächstfolgenden verstreicht, hat sich die hintere Scheibe um den Winkel $2\pi\frac{v_1 - v_2}{v_1}$ gedreht; die vordere Scheibe hat während derselben Zeit den Winkel $2\pi\frac{v_1 - v_2}{v_2}$ beschrieben. Dieser letztere Winkel ist also derjenige Winkel, welchen je zwei benachbarte Spalten einschliessen müssen; die Anzahl der Spalten ergiebt sich hiernach gleich dem Quotienten $\frac{2\pi}{2\pi\left(\frac{v_1 - v_2}{v_2}\right)}$ d. h. gleich dem Quotienten $\frac{v_2}{v_1 - v_2}$.
Aus dem Obigen wissen wir, dass die Entstehung eines Bildes in diesem Falle fordert, dass der Quotient $\frac{v_2}{v_1 - v_2}$ eine ganze Zahl ist.

2) $v_2 > v_1$.

a) $\frac{v_2}{v_1} - 1 > 1$.

Nach Seite 139 kann in diesem Falle nur dann ein wirkliches Bild entstehen, wenn die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Scheiben so gewählt sind, dass der Quotient $\frac{v_2}{v_1}$ gleich einer ganzen Zahl wird. Wir wollen annehmen, es befinden sich in der vorderen Scheibe in gleichen Winkelabständen von einander n Spalten. Soll bei diesen n Spalten ein Bild resultiren, so muss nach jeder ganzen Umdrehung der hinteren Scheibe derjenige Punkt auf derselben, welcher in der Ruhelage der beiden Scheiben durch eine Spalte sichtbar war, immer mit einer Spalte coincidiren.

Während aber die hintere Scheibe eine ganze Umdrehung macht, dreht sich die vordere Scheibe um den Winkel $2\pi\frac{v_1}{v_2}$; die Anzahl der Spalten wird also in diesem Falle durch den Quotienten $\frac{2\pi}{2\pi\frac{v_1}{v_2}}$ d. h. durch den Quotienten $\frac{v_2}{v_1}$ bestimmt.

β) $$\frac{v_2}{v_1}-1=1.$$

Nach einer ganzen Umdrehung der hinteren Scheibe hat die vordere nur eine halbe Umdrehung vollendet. Derjenige Punkt der auf der transparenten Scheibe befindlichen Figur, welcher vor dieser ganzen Umdrehung mit der Spalte coincidirte, liegt nach der ganzen Umdrehung hinter demjenigen Radius der vorderen Scheibe, der sich in der Verlängerung der Spalte befindet. In der Richtung dieses Radius kann also eine zweite Spalte angebracht werden. Hiernach ist in diesem Falle die grösstmögliche Zahl der Spalten zwei; diese zwei Spalten müssen sich diametral gegenüber liegen.

γ) $$\frac{v_2}{v_1}-1<1.$$

Nach Seite 144 können in diesem Falle $\frac{v_1}{v_2-v_1}$ Figuren auf der transparenten Scheibe angebracht werden, vorausgesetzt, dass $\frac{v_1}{v_2-v_1}$ eine ganze Zahl ist. Infolge der Bedingung $\frac{v_2}{v_1}-1<1$ kann aber $\frac{v_1}{v_2-v_1}$ nur dann gleich einer ganzen Zahl sein, wenn v_2-v_1 gleich der Einheit ist; hiernach können also v_1 Figuren auf der transparenten Scheibe angebracht werden. In der Anfangslage der beiden Scheiben mag sich eine Spalte vor dem ersten Punkte irgend einer der v_1 Figuren befinden. Der Winkel, um welchen sich die hintere Scheibe drehen muss, damit der erste Punkt der nächstfolgenden Figur an dieselbe Stelle des Raumes gelangt, ist $2\pi\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)$; während derselben Zeit dreht sich die vordere Scheibe um den Winkelbetrag $2\pi\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)\frac{v_1}{v_2}=2\pi\left(\frac{v_2-v_1}{v_2}\right)$. Je zwei auf einander folgende Spalten müssen also den Winkel $2\pi\left(\frac{v_2-v_1}{v_2}\right)$ einschliessen; die grösstmögliche Anzahl der Spalten beträgt hiernach in diesem Falle $\frac{v_2}{v_2-v_1}$ d. h. v_2, da die Differenz v_2-v_1 immer gleich der Einheit sein muss.

Das Ergebniss der obigen, nach Plateau ausgeführten Untersuchungen mag schliesslich in der folgenden kleinen Tafel zusammengestellt werden.

	Zahl der entstehenden Bilder.	Zahl der Spalten.	Verwandlungsweise der auf der transparenten Scheibe angebrachten Figur.
Scheiben entgegengesetzt laufend	$1+\frac{v_2}{v_1}$	$\frac{v_2}{v_1}$	Zusammenziehung.
Scheiben in gleicher Richtung laufend			
1) $v_2 < v_1$	1	$\frac{v_2}{v_1 - v_2}$	Ausbreitung.
2) $v_2 > v_1$			
α) $\frac{v_2}{v_1} - 1 > 1$	$\frac{v_2}{v_1} - 1$	$\frac{v_2}{v_1}$	Zusammenziehung mit Umkehrung.
β) $\frac{v_2}{v_1} - 1 = 1$	1	2	Umkehrung.
γ) $\frac{v_2}{v_1} - 1 < 1$	1	v_2	Ausbreitung mit Umkehrung.

IV.

Allgemeine Eigenschaften der anorthoskopischen Figuren.

Wir haben in dem Vorhergehenden eine allgemeine Theorie des Anorthoskops diesem Abschnitte vorausgeschickt, weil eine vollständige Bestimmung der Eigenschaften der anorthoskopischen Figuren nur dann möglich ist, wenn die Natur und Wirkungsweise des Anorthoskops nach allen Seiten hin dargelegt ist. Wir sind daselbst zu dem Resultate gekommen, dass der Winkel w_1, welchen zwei mit bestimmten Punkten des Objects besetzte Radien der transparenten Scheibe einschliessen, und der Winkel w, den die mit denselben Punkten versehenen Radien im anorthoskopischen Bilde begrenzen, so von einander abhängig sind, wie es die Gleichung

$$w_1 = \frac{w}{1 \pm \frac{v_2}{v_1}} = \frac{w}{1 \pm k'}$$

zeigt, wo v_2 und v_1 die absoluten Werthe der Drehungsgeschwindigkeiten der hinteren und vorderen Scheibe bedeuten; bei entgegengesetztläufiger Bewegung der beiden Scheiben hat das positive, bei gleichläufiger Bewegung der beiden Scheiben das negative Vorzeichen Gültigkeit. Es geht hieraus hervor, dass die Entfernungen der einzelnen Punkte vom Mittel-

punkte der Drehung im anorthoskopischen Bilde genau dieselben sind, wie die Entfernungen der entsprechenden Punkte des auf der transparenten Scheibe befindlichen Objects von demselben Mittelpunkte der Drehung; nur die Lage der einzelnen Punkte im anorthoskopischen Bilde gegen einander ist eine andere, als die gegenseitige Lage der entsprechenden Punkte in dem auf der transparenten Scheibe gezeichneten Objecte. Der Hauptpunkt der Ebene, in welcher sich das anorthoskopische Bild ausbreitet, ist also der Mittelpunkt der Drehung der beiden Scheiben; er muss, wenn die anorthoskopischen Bilder einer Betrachtung im Sinne der analytischen Geometrie unterzogen werden sollen, zu einem ausgezeichneten Punkte des gewählten Coordinatensystems gemacht werden. Die Wahl zwischen den zwei gebräuchlichsten Coordinatensystemen, dem Parallel- und Polarcoordinatensystem, kann keine zweifelhafte sein; die Art der Entstehung der anorthoskopischen Bilder zeigt mit Entschiedenheit darauf hin, dass nur durch die Anwendung des Polarcoordinatensystems die grösstmögliche Einfachheit und Eleganz in der Betrachtung der hierher gehörigen Figuren erzielt werden kann.

Die Aufgaben, welche hier zu behandeln sind, sind im Wesentlichen die folgenden drei:

1) Die Geschwindigkeit einer jeden Scheibe des Anorthoskops ist ihrer Grösse und Richtung nach gegeben; es soll aus dem auf der transparenten Scheibe befindlichen Objecte, dessen Bildungsgesetz ein bekanntes ist, das anorthoskopische Bild desselben bestimmt werden;
2) die Geschwindigkeit einer jeden Scheibe des Anorthoskops ist ihrer Grösse und Richtung nach gegeben; es soll aus dem anorthoskopischen Bilde, dessen Bildungsgesetz bekannt ist, das dazu gehörige, auf der transparenten Scheibe befindliche Object bestimmt werden;
3) das auf der transparenten Scheibe befindliche Object und das daraus entstandene anorthoskopische Bild sind ihren Bildungsgesetzen nach vollständig bekannt; es soll die Geschwindigkeit einer jeden Scheibe des Anorthoskops nach Grösse und Richtung bestimmt werden.

Die Lösung dieser Aufgaben ist höchst einfach. Das auf der transparenten Scheibe befindliche Object sei gegeben. Die auf ein Polarcoordinatensystem, das seinen Pol im Mittelpunkt der Scheibe hat und die durch diesen Mittelpunkt gehende Verticale zur Anfangsrichtung besitzt, bezogene Gleichung dieses Objects möge sein:

$$\varrho = F(\varphi)$$

wo $F(\varphi)$ eine ganz beliebige Function von φ bedeutet. Dann ist nach der Relation:

$$w_1 = \frac{w}{1 \pm k'}$$

oder, wenn wir für w_1, ψ und für w, φ setzen, nach der Relation:

$$\psi = \frac{\varphi}{1 \pm k'}$$

die Gleichung des zu diesem Object gehörigen anorthoskopischen Bildes, bezogen auf dasselbe Coordinatensystem mit demselben Pole und derselben Anfangsrichtung, die folgende:

$$\varrho = F\{\psi(1 \pm k')\},$$

wo F dieselbe Function wie oben bedeutet.

Ist umgekehrt die Gleichung des anorthoskopischen Bildes gegeben, bezogen auf ein Polarcoordinatensystem, welches seinen Pol im Mittelpunkte der Drehung der beiden Scheiben und seine Anfangsrichtung in der durch diesen Mittelpunkt gehenden Verticalen hat, nämlich:

$$\varrho = F(\psi)$$

wo $F(\psi)$ eine ganz beliebige Function von ψ darstellt, so ist die Gleichung des Objects auf der transparenten Scheibe des Anorthoskops in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem mit demselben Pol und derselben Anfangsrichtung nach der Relation

$$\psi = \frac{\varphi}{1 \pm k'}$$

die folgende:

$$\varrho = F\left[\frac{\varphi}{1 \pm k'}\right].$$

Hieraus ergiebt sich eine höchst einfache Construction des anorthoskopischen Bildes aus seinem Object und umgekehrt des Objects aus seinem anorthoskopischen Bilde bei gegebenen Bewegungen der Scheiben des Anorthoskops.

Ist in Tafel II, Fig. 2 der Curvenzug ABC das auf der transparenten Scheibe befindliche Object, so wird das dazu gehörige anorthoskopische Bild auf folgende Weise gewonnen. Von dem Mittelpunkte der Drehung o aus legt man eine Schaar von concentrischen Kreisbögen durch den Curvenzug ABC, welche die angenommene Anfangsrichtung ox und den Curvenzug der Reihe nach in den Punkten $M'N'$, $M''N''$, $M'''N'''$ ... schneiden. Hierauf trägt man von den Punkten M', M''... der Anfangsrichtung aus auf den einzelnen Kreisbögen $M'N'$, $M''N''$... die Strecken $\frac{1}{(1 \pm k')} \cdot M'N'$, $\frac{1}{(1 \pm k')} M''N''$, $\frac{1}{(1 \pm k')} M'''N'''$, ... ab und verbindet die auf diese Weise auf den einzelnen Kreisbögen erhaltenen Punkte durch einen Linienzug. Dieser Linienzug stellt dann das anorthoskopische Bild der Curve ABC gemäss der Relation $\psi = \frac{\varphi}{\pm k'}$ dar.

Auf ganz ähnliche Weise wird, wie leicht erhellt, aus dem anorthoskopischen Bilde das dazu gehörige Object construirt.

In Tafel II, Fig. 3 ist $C'AD'B$ das anorthoskopische Bild der Kreislinie $CADB$ für den Fall, dass $(1 \pm k') = \frac{1}{2}$ und o der Mittelpunkt der Drehung ist; $C''AD''B$ ist das anorthoskopische Bild derselben Kreislinie bei demselben Mittelpunkte der Drehung in dem Falle, dass $(1 \pm k')$ den Werth 2 annimmt.

Sind endlich

$$\varrho = F(n\varphi) \text{ und } \varrho = F(\varphi),$$

wo n irgend eine positive oder negative reelle Grösse bedeutet, die auf das angegebene Polarcoordinatensystem bezogenen Gleichungen des anorthoskopischen Bildes und des auf der transparenten Scheibe befindlichen Objects, so muss nach unserer Relation sein:

$$n = 1 \pm k' = 1 \pm \frac{v_2}{v_1},$$

also:

$$n - 1 = \pm \frac{v_2}{v_1}.$$

Ist $(n-1)$ positiv, so haben die beiden Scheiben des Anorthoskops entgegengesetzt gerichtete Bewegungen; fällt dagegen $(n-1)$ negativ aus, so drehen sich die beiden Scheiben des Anorthoskops nach gleichen Richtungen. Der absolute Werth von $(n-1)$ giebt das Verhältniss der Grösse der Drehungsgeschwindigkeit der hinteren Scheibe zu der Grösse der Drehungsgeschwindigkeit der vorderen Scheibe an. Ergiebt sich z. B. $(n-1) = 5$, so verhält sich die Drehungsgeschwindigkeit der hinteren Scheibe zu der der vorderen wie $5:1$; findet sich $(n-1) = \frac{1}{2}$, so dreht sich die vordere Scheibe doppelt so schnell, als die hintere.

In den beiden ersten Aufgaben, deren specielle Durchführung an einzelnen Beispielen uns in dem Folgenden beschäftigen wird, spielt der Factor $\left(1 \pm \frac{v_2}{v_1}\right)$ oder $(1 \pm k')$ eine ganz ausgezeichnete Rolle; er ist für die Gestalt des anorthoskopischen Bildes massgebend und ist dasjenige Moment in der Bildungsweise desselben, aus dem alle seine Eigenthümlichkeiten hervorgehen. Es wird daher wohl gestattet sein, diesem ausgezeichneten Factor einen besonderen Namen und ein besonderes Zeichen beizulegen, ihn als Modul der Verwandlung zu bezeichnen und durch den Buchstaben k darzustellen. Die einzelnen Zahlenwerthe, welche k annehmen kann, erstrecken sich von $-\infty$ bis $+\infty$.

Wenn die Polargleichung des auf der transparenten Scheibe befindlichen Objects in Bezug auf ein Polarcoordinatensystem, dessen Pol im Drehungsmittelpunkte der beiden Scheiben liegt und eine bestimmte Anfangsrichtung hat,

$$\varrho = F(\varphi)$$

und die auf dasselbe Polarcoordinatensystem bezogene Gleichung des anorthoskopischen Bildes

$$\varrho = F(k\psi)$$

ist, so ist in der ersteren Figur

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{dF(\varphi)}{d\varphi};$$

in der letzteren aber:

$$\frac{d\varrho}{d\psi} = \frac{dF(k\psi)}{d\psi} = k \cdot \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}.$$

Weiter ist:

$$\frac{d^2\varrho}{d\psi^2} = k^2 \cdot \frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2}$$

$$\frac{d^3\varrho}{d\psi^3} = k^3 \cdot \frac{d^3F(\varphi)}{d\varphi^3}$$

und allgemein:

$$\frac{d^n\varrho}{d\psi^n} = k^n \cdot \frac{d^nF(\varphi)}{d\varphi^n}.$$

Die Grösse der Fläche, welche auf der transparenten Scheibe von der Anfangsrichtung der Polarcoordinaten, dem zu dem Argument φ gehörigen Radius vector ϱ und dem zwischen beiden liegenden Curvenstück eingeschlossen wird, ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi [F(\varphi)]^2 \, d\varphi;$$

die Grösse der Fläche im anorthoskopischen Bilde, welche von der Anfangsrichtung der Polarcoordinaten, dem zu dem Argument ψ, wo $\psi = \frac{\varphi}{k}$, gehörigen Radius vector ϱ und dem zwischen diesen beiden Geraden liegenden Curvenstück eingeschlossen wird, beträgt:

$$F' = \tfrac{1}{2}\int_0^\psi \Big[F(k\psi)\Big]^2 . \, d\psi = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}\int_0^\varphi \Big[F(\varphi)\Big]^2 . \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{k} F.$$

Es gilt hiernach folgender interessante Satz:

> „Die Fläche, welche das auf der transparenten Scheibe befindliche Object einschliesst, verhält sich zu der Fläche, welche das anorthoskopische Bild umfasst, wie die Grösse des Verwandlungsmoduls k zu der Einheit."

Ist k kleiner, als die Einheit, so ist die Fläche des anorthoskopischen Bildes grösser, als die Fläche des Objectes auf der transparenten Scheibe; ist k grösser, als die Einheit, so gilt das Umgekehrte; besitzt k einen negativen Werth, so ist das anorthoskopische Bild durch Zusammen-

ziehung, resp. Ausbreitung mit **Umkehrung** aus dem Objecte hervorgegangen.

Die Länge s der auf der transparenten Scheibe gezeichneten Curve $\varrho = F(\varphi)$ innerhalb der Argumentwerthe $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ ist

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{\left[F(\varphi)\right]^2 + \left[\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\right]^2} \cdot d\varphi$$

und die Länge s' des im Anorthoskope aus diesem Curvenstück hervorgehenden Curvenstücks beträgt:

$$s' = \int_0^{\psi} \sqrt{\left[F(k\psi)\right]^2 + \left[\frac{dF(k\psi)}{d\psi}\right]^2} \cdot d\psi$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^{\varphi} \sqrt{\left[F(\varphi)\right]^2 + \frac{1}{k^2}\left[\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\right]^2} \cdot d\varphi.$$

Hiernach gilt zwischen den correspondirenden Längen die Relation:

$$s : s' = \int_0^{\varphi} \sqrt{\left[F(\varphi)\right]^2 + \left[\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\right]^2} \cdot d\varphi$$

$$: \frac{1}{k} \int_0^{\varphi} \sqrt{\left[F(\varphi)\right]^2 + \frac{1}{k^2}\left[\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\right]^2} \cdot d\varphi.$$

V.

Das anorthoskopische Bild der geraden Linie.

Es sei der Mittelpunkt O der hinteren Scheibe des Anorthoskops Pol des Coordinatensystems; als Anfangsrichtung der Coordinaten mag derjenige Radius der Scheibe genommen werden, welcher auf der geraden Linie RR' (siehe Figur 4) senkrecht steht. Die Polargleichung dieser Geraden ist dann:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos\varphi},$$

wo ϱ_0 den Abstand OB darstellt. Die auf dasselbe Coordinatensystem bezogene Gleichung des anorthoskopischen Bildes dieser geraden Linie RR' ist dann nach der Relation $\psi = \frac{\varphi}{k}$ die folgende:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos k\psi}.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Curve wird durch die Anfangsrichtung in zwei congruente Theile zerlegt. Da sich der absolute Werth des Nenners $\cos k\psi$ zwischen den Grenzen 0 und 1 bewegt, wird der Radius vector ϱ zwischen den Grenzwerthen ϱ_0 und ∞ variiren. Wir werden

die Gestalt der durch $\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos k\psi}$ ausgedrückten Curve am besten übersehen können, wenn wir die Frage beantworten, für wieviel Werthe der Variabeln ψ der Radius vector einen unendlich grossen Werth annimmt, oder wie gross die Anzahl der Asymptoten ist, welche an die Curve gelegt werden können.

Es sei zunächst k eine ganze Zahl. Die Werthe der Variabeln ψ, für welche der Radius vector einen unendlich grossen Werth annimmt, sind:

$$\psi = \frac{\pi}{2k}, \quad \frac{3\pi}{2k}, \quad \frac{5\pi}{2\pi} \ldots (2n-1)\frac{\pi}{2k} \ldots$$

Die Anzahl der Richtungen, nach denen ein Unendlichwerden des Radius vectors eintritt, ist gleich der Anzahl derjenigen Glieder dieser Reihe, welche zwischen dem ersten und demjenigen Gliede liegen, dessen Stellenzahl m sich aus der folgenden Gleichung ergiebt:

$$(2m-1)\frac{\pi}{2k} = 2\pi + \frac{\pi}{2k}.$$

Hieraus folgt $m = 2k+1$; da zwischen dem ersten und dem m^{ten} Gliede $m-1$ Glieder liegen, muss die Anzahl der Richtungen, nach denen der Radius vector einen unendlich grossen Werth annimmt, gleich $2k$ sein. Nach der Gleichung $\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos k\psi}$ muss aber der Radius vector sowohl in der durch $\psi = (2n-1)\frac{\pi}{2k}$, als auch in der durch $\psi = (2n-1)\frac{\pi}{2k} + \pi$ bestimmten Richtung unendlich gross werden; es fallen demnach je zwei von den $2k$ Richtungen einander diametral gegenüber. Die Zahl der Asymptoten beträgt also in dem Falle, dass k eine ganze Zahl ist, k.

Ist der Verwandlungsmodul k keiner ganzen Zahl gleich, so unterscheiden wir:

1) $k = \frac{n}{m}$, wo n eine gerade Zahl, m eine ungerade Zahl;

2) $k = \frac{n}{m}$, wo n eine ungerade Zahl, m eine gerade Zahl;

3) $k = \frac{n}{m}$, wo n sowohl, als m eine ungerade Zahl.

1) Die Werthe der Variabeln ψ, für welche der Radius vector unendlich gross wird, sind der Reihe nach

$$\psi = \frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, \quad 3\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, \ldots (2\lambda-1)\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, \quad [2(\lambda+1)]-1\frac{m}{n}\frac{\pi}{2} \ldots$$

Für $\lambda = n$ wird das $(n+1)^{te}$ Glied dieser Reihe gleich $m\pi + \frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$, das $(n+2)^{te}$ Glied gleich $m\pi + 3\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$ u. s. w. Die $(n+1)^{te}$ Richtung, in

welcher der Radius vector unendlich gross wird, liegt also der ersten diametral gegenüber, die $(n+2)^{te}$ der zweiten u. s. w. Die Anzahl der Richtungen, nach denen der Radius vector unendlich gross wird, beträgt in diesem Falle also $2n$, die Anzahl der Asymptoten aber n.

2) Der Radius vector wird unendlich gross, wenn

$$\psi = \frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, \quad 3\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, \ldots (2\lambda - 1)\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, \quad [2(\lambda+1)-1]\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}\ldots$$

Wird $\lambda = n$, so wird das $(n+1)^{te}$ Glied dieser Reihe gleich $m\pi + \frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$, das $(n+2)^{te}$ gleich $m\pi + 3\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$ u. s. w.; in diesem Falle fällt also die $(n+1)^{te}$ Richtung, nach welcher der Radius vector unendlich gross wird, wieder mit der ersten zusammen, die $(n+2)^{te}$ mit der zweiten u. s. w. Der Radius vector wird in diesem Falle nur nach n Richtungen hin unendlich gross.

3) Die Werthe von ψ, für welche der Radius vector unendlich gross wird, sind:

$$\psi = \frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, \quad 3\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, \ldots (2\lambda - 1)\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, [2(\lambda+1)-1]\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}\ldots$$

Setzen wir $\lambda = 2n$, so nimmt das $(2n+1)^{te}$ Glied dieser Reihe den Werth $2m\pi + \frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$, das $(2n+2)^{te}$ Glied den Werth $2m\pi + 3\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}, \ldots$ an. Die Anzahl der Richtungen, nach denen der Radius vector unendlich gross wird, beträgt in diesem Falle $2n$, von denen je zwei diametral entgegengesetzt liegen.

Die Untersuchung über die Gestalt der Curve wollen wir mit der Antwort auf die Frage nach der Convexität oder Concavität der Curve gegen den Pol des Coordinatensystems beschliessen. Bekanntlich ist die Curve $\mu = f(w)$ gegen den Pol concav oder convex, je nachdem

$$f(w) \text{ und } f(w) + 2\frac{\left(\frac{d f(w)}{dw}\right)^2}{f(w)} - \frac{d^2 f(w)}{dw^2}$$

dasselbe Zeichen haben oder nicht. In unserem Falle ist $f(w) = \frac{\varrho_0}{\cos k\psi}$ und $f(w) + 2\frac{\left(\frac{d f(w)}{dw}\right)^2}{f(w)} - \frac{d^2 f(w)}{dw^2} = \frac{\varrho_0}{\cos k\psi}(1-k^2)$; es geht hieraus hervor, dass, wenn der Verwandlungsmodul $k < 1$, die Curve continuirlich concav, wenn der Verwandlungsmodul $k > 1$, die Curve continuirlich convex gegen den Pol der Coordinaten ist. Die Figuren 5 und 6 mögen als Bilder für die beiden Fälle dienen; in Fig. 5 ist $k = 2$, in Fig. 6 $k = \frac{1}{2}$.

Die Fläche, welche von der Anfangsrichtung des Coordinatensystems, dem zu dem Argument ψ gehörigen Radius vector und dem zwischen beiden liegenden Curvenstück umschlossen wird, ist:

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{\psi} \frac{\varrho_0^2}{\cos^2 k\psi}\, d\psi = \frac{1}{2k}\int_0^{\Theta} \frac{\varrho_0^2}{\cos^2\Theta}\, d\Theta$$

$$= \frac{\varrho_0^2}{2k}\, tg\,\Theta = \frac{\varrho_0^2}{2k}\, tg\, k\psi.$$

Die auf der transparenten Scheibe des Anorthoskops liegende, der Fläche F entsprechende Fläche F' beträgt:

$$F' = \frac{\varrho_0^2}{2}\, tg\,\varphi = \frac{\varrho_0^2}{2}\, tg\, k\psi.$$

Hiernach besteht, wie wir schon oben allgemein gefunden haben, die Relation:

$$F = \frac{F'}{k}.$$

Die Länge des Curvenstücks, welches zwischen den Radien ϱ_0 und ϱ liegt, beträgt:

$$s = \int_0^{\psi} \sqrt{\frac{\varrho_0^2}{\cos^2 k\psi} + k^2 \frac{\varrho_0^2 \sin^2 k\psi}{\cos^4 k\psi}}\,.\, d\psi$$

$$= \varrho_0 \int_0^{\psi} \frac{\sqrt{\cos^2 k\psi + k^2 \sin^2 k\psi}}{\cos^2 k\psi}\,.\, d\psi.$$

Zum Zweck der Integration unterscheiden wir die beiden Fälle $k > 1$ und $k < 1$.

1) $k > 1$.

Setzen wir $k\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, so wird

$$s = \frac{\varrho_0}{k} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^2\varphi + k^2 \cos^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \varrho_0 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,.\, d\varphi.$$

Da $k > 1$, so ist $1 - \frac{1}{k^2}$ immer < 1; unter Anwendung von Legendre's Bezeichnung können wir an die Stelle der letzten Gleichung die folgende setzen:

$$s = \varrho_0 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi \quad mod \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}.$$

Die Form dieser Gleichung sagt uns, dass s der von dem Scheitel an gerechnete Bogen einer Hyperbel ist, deren grosse Halbaxe a den

Werth $\varrho_0 \sqrt{1-\frac{1}{k^2}}$ und deren kleine Halbaxe b den Werth $\varrho_0 . \frac{1}{k}$ besitzt. Der Grössenwerth dieses Bogens findet sich, nach der Legendre'schen Bezeichnungsweise ausgedrückt, durch die weitere Entwickelung der letzten Gleichung als der folgende:

$$s = \varrho_0 \left\{ cotg\, \varphi\, \Delta\varphi - \frac{1}{k^2} F(\varphi) + \frac{1}{k^2} F^I + E(\varphi) - E^I \right\} mod \sqrt{1-\frac{1}{k^2}}.$$

Das dem Curvenstück s entsprechende Stück der geraden Linie auf der transparenten Scheibe, deren Gleichung $\varrho = \frac{\varrho_0}{cos\, \varphi}$, hat folgende Länge

$$s_1 = \varrho_0\, tg\, \varphi'.$$

Nach der bekannten Relation $\psi = \frac{\varphi'}{k}$ und der obigen Substitution $k\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ wird hieraus:

$$s_1 = \varrho_0\, tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varrho_0\, cotg\, \varphi.$$

Es findet demnach zwischen den zwei entsprechenden Längen s und s_1 folgende Beziehung statt:

$$s : s_1 = \varrho_0 \left\{ cotg\, \varphi\, \Delta\varphi - \frac{1}{k^2} F(\varphi) + \frac{1}{k^2} F^I + E(\varphi) - E^I \right\} : \varrho_0\, cotg\, \varphi$$

$$= cotg\, \varphi\, \Delta\varphi - \frac{1}{k^2} F(\varphi) + \frac{1}{k^2} F^I + E(\varphi) - E^I : cotg\, \varphi.$$

Aus diesem Verhalten der beiden Längen s und s_1 kann folgende einfache geometrische Darstellungsweise derselben gewonnen werden. Es sei ACB ein Zweig der Hyperbel, deren grosse Halbaxe $a = \varrho_0 \sqrt{1-\frac{1}{k^2}}$ und deren kleine Halbaxe $b = \varrho_0 . \frac{1}{k}$, deren numerische Excentricität also gleich $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}$ ist. (Siehe Fig. 7.) O sei der Mittelpunkt der Hyperbel. Die Entfernung des Mittelpunktes von dem Brennpunkte E beträgt

$$\sqrt{\varrho_0^2\left(1-\frac{1}{k^2}\right) + \varrho_0^2 \frac{1}{k^2}} = \varrho_0.$$

Die Gerade OY mag auf der Geraden OE senkrecht stehen und mit der grossen Halbaxe $\varrho_0 \sqrt{1-\frac{1}{k^2}}$ als Radius mag um den Mittelpunkt O ein Kreis beschrieben werden. Zieht man die Gerade ON, welche mit der Geraden OY den Winkel φ einschliesst, fällt man vom Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Kreisperipherie ein Perpendikel auf OE und legt von dem Fusspunkte P dieses Perpendikels aus eine Tangente PQ an den Hyperbelast BC, so erhält man einen Hyperbelbogen AC von der Länge

$$s = \varrho_0 \left\{ cotg\, \varphi\, \varDelta \varphi - \frac{1}{k^2} F(\varphi) + \frac{1}{k^2} F' + E(\varphi) - E' \right\}.$$

Errichtet man jetzt in dem Brennpunkte E der Hyperbel ein Perpendikel zur Geraden OE und verlängert dasselbe bis zum Durchschnittspunkte F, so besitzt die Gerade EF die Länge $\varrho_0 \,.\, tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varrho_0\, cotg\, \varphi$ und stellt demnach die Länge s_1 dar.

2) $k < 1$.

In diesem Falle wird

$$s = \frac{\varrho_0}{k} \int_0^\varphi \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi + k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi}\, d\varphi = \frac{\varrho_0}{k} \int_0^\varphi \frac{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi} \,.\, d\varphi$$

$$= \frac{\varrho_0}{k} \int_0^\varphi \frac{\varDelta \varphi}{\cos^2 \varphi}\, d\varphi \; mod \sqrt{1 - k^2},$$

wenn $k\psi = \varphi$ gesetzt wird.

Da

$$\frac{\varDelta \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\varDelta^2 \varphi}{\cos^2 \varphi\, \varDelta \varphi} = \frac{k^2}{\cos^2 \varphi\, \varDelta \varphi} + (1 - k^2) \frac{1}{\varDelta \varphi},$$

so folgt:

$$s = \frac{\varrho_0}{k} \left\{ k^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi\, \varDelta \varphi} + (1 - k^2) \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta \varphi} \right\} = \varrho_0 k \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi\, \varDelta \varphi}$$

$$+ \varrho_0 \frac{(1 - k^2)}{k} F(\varphi).$$

Die Entwickelung des Integrales $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi\, \varDelta \varphi}$ giebt endlich:

$$s = \frac{\varrho_0}{k} \{ tg\, \varphi\, \varDelta \varphi + F(\varphi) - E(\varphi) \} \,.\, mod \left(\sqrt{1 - k^2}\right).$$

Die s entsprechende Länge s' der auf der transparenten Scheibe befindlichen Geraden hat den Werth:

$$s' = \varrho_0\, tg\, \varphi;$$

es findet hiernach zwischen beiden Längen folgende Beziehung statt:

$$s : s' = \frac{1}{k} \{ tg\, \varphi\, \varDelta \varphi + F(\varphi) - E(\varphi) \} : tg\, \varphi.$$

Nachdem wir einige der geometrischen Eigenschaften der Curve $\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos k\psi}$ dargelegt haben, wollen wir noch eine merkwürdige mechanische Eigenschaft derselben erwähnen; die Curve $\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos k\psi}$ ist näm-

lich eine derjenigen Bahnen, welche von einem Körper durchlaufen werden, der von einem ruhenden Centralkörper angezogen wird nach dem directen Verhältniss der Massen und nach der umgekehrten dritten Potenz der Entfernung.

Wird ein sich bewegender Körper von einem ruhenden Centralkörper mit der Kraft $F(\varrho)$ angezogen, wo $F(\varrho)$ irgend eine Function von ϱ bedeutet, so ist die Gleichung der von dem angezogenen Körper beschriebenen Bahn durch Polarcoordinaten, welche ihren Pol in dem Centralkörper haben, ausgedrückt, die folgende:

$$\varphi = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{c^2}{\varrho\sqrt{-c^4 + \varrho^2\left\{\Phi(\varrho_0) - 2\int_{\varrho_0}^{\varrho} F(\varrho)\, d\varrho\right\}}}\, d\varrho,$$

wo c^2 die constante Flächengeschwindigkeit $\varrho^2 \frac{d\varphi}{dt}$, ϱ_0 der specielle Werth des Radius ϱ ist, welchen derselbe in dem Momente besitzt, in welchem die Curvengeschwindigkeit v den Werth $\sqrt{\Phi(\varrho_0)}$ annimmt und wo endlich die Richtung ϱ_0 als Anfangsrichtung der Coordinaten gilt. Setzen wir den speciellen Fall $F(\varrho) = \frac{m}{\varrho^3}$, so erhalten wir als Polargleichung der Bahn, welche der angezogene Körper um den Centralkörper beschreibt, die folgende Gleichung:

$$\varphi = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{c^2}{\varrho\sqrt{-c^4 + \varrho^2\left\{\Phi(\varrho_0) - \frac{m}{\varrho_0^2} + \frac{m}{\varrho^2}\right\}}}\, d\varrho,$$

oder:

$$\varphi = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{c^2}{\varrho\sqrt{-c^4 + m + \varrho^2\left\{\Phi(\varrho_0) - \frac{m}{\varrho_0^2}\right\}}}\, d\varrho.$$

Die fünf verschiedenen Fälle, welche hier unterschieden werden können, sind: $m - c^4 = 0$; $\Phi(\varrho_0) - \frac{m}{\varrho_0^2} = 0$; $m - c^4 > 0$, $\Phi(\varrho_0) - \frac{m}{\varrho_0^2} > 0$; $m - c^4 > 0$, $\Phi(\varrho_0) - \frac{m}{\varrho_0^2} < 0$; $m - c^4 < 0$, $\Phi(\varrho_0) - \frac{m}{\varrho_0^2} > 0$. Im letzteren Falle wird:

$$\varphi = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{c^2}{\sqrt{-(c^4 - m)\varrho^2 + \varrho^4\left\{\Phi(\varrho_0) - \frac{m}{\varrho_0^2}\right\}}}\, d\varrho,$$

oder:

$$\frac{\sqrt{c^4 - m}}{c^2}\,\varphi = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{-\varrho^2 + \frac{\Phi(\varrho_0)\cdot\varrho_0^2 - m}{c^4 - m}\cdot\frac{\varrho^4}{\varrho_0^2}}}.$$

Nehmen wir an, der Winkel, welchen die Richtung der Curvengeschwindigkeit $\sqrt{\Phi(\varrho_0)}$ mit der Anfangsrichtung bildet, ist gleich einem rechten, so erhalten wir:

$$\frac{\sqrt{c^4-m}}{c^2}\,\varphi = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{-\varrho^2+\frac{\varrho^4}{\varrho_0^2}}} = Arc\cos = \frac{\varrho_0}{\varrho},$$

also:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos\frac{\sqrt{c^4-m}}{c^2}\cdot\varphi} = \frac{\varrho_0}{\cos k\varphi}, \quad \text{wenn } \frac{\sqrt{c^4-m}}{c^2} = k \text{ gesetzt wird.}$$

VI.

Das anorthoskopische Bild der Kreislinie.

Auf der transparenten Scheibe des Anorthoskops mag sich in einer beliebigen Lage zum Drehungsmittelpunkt der Scheibe eine Kreislinie finden. Nennen wir (Fig. 8) die Entfernung des Kreismittelpunktes von dem Drehungsmittelpunkte b, setzen wir den Radius der Kreislinie gleich r und nehmen wir den Drehungsmittelpunkt zum Pol der Coordinaten und die den Drehungsmittelpunkt mit dem Kreismittelpunkt verbindende Gerade als Anfangsrichtung, so ist die Gleichung der Kreislinie die folgende:

$$\varrho = b\cos\varphi \pm \sqrt{r^2 - b^2\sin^2\varphi}.$$

Das anorthoskopische Bild dieser Kreislinie hat dann nach der Relation $\psi = \frac{\varphi}{k}$ folgende, auf dasselbe Coordinatensystem bezogene Gleichung:

$$\varrho = b\cos k\psi \pm \sqrt{r^2 - b^2\sin^2 k\psi}.$$

Die Gestalt dieser Curve wird wesentlich bedingt durch die Grösse des Parameters b; wir wollen deswegen auch bei der Discussion der letzten Gleichung folgende Hauptfälle unterscheiden:

1) Der Mittelpunkt der Drehung liegt ausserhalb der Kreislinie,
$$b > r;$$

2) der Mittelpunkt der Drehung liegt auf der Kreislinie,
$$b = r;$$

3) der Mittelpunkt der Drehung liegt innerhalb der Kreislinie,
$$b < r;$$

4) der Mittelpunkt der Drehung fällt mit dem Kreismittelpunkte zusammen,
$$b = 0.$$

1) In diesem Falle sagt die obige Gleichung, dass das anorthoskopische Bild der Kreislinie sich nur in dem Winkelraume $\psi = -\frac{Arc\sin\frac{r}{b}}{k}$ und

$\psi = + \frac{Arc\ sin \frac{r}{b}}{k}$ befindet, dass dasselbe von der Anfangsrichtung in zwei congruente Theile zerlegt wird und dass jedem Werth der Variabeln ψ, mit Ausnahme des äussersten Werthes $\psi = \pm \frac{Arc\ sin \frac{r}{b}}{k}$, zwei Werthe des Radius vector zugehören. Das anorthoskopische Bild der Kreislinie ist also in diesem Falle eine einfache geschlossene Curve, die sich in ihrem Laufe bei sehr kleinem k bedeutend, bei sehr grossem k nur sehr wenig von der Anfangsrichtung entfernt. Die Figuren 9 und 10 stellen die Curve bei gegebenem Parameter $b = OQ$ und gegebenem Radius $r = QP$ dar; in Fig. 9 ist der Verwandlungsmodul $k = \frac{1}{2}$ und in Fig. 10 $k = 2$ gesetzt.

2) Nimmt der Parameter b den speciellen Werth r an, so geht die obige Gleichung in die folgende über:

$$\varrho = 2r\ cos\, k\psi.$$

Während die Variable ψ von 0 an stetig wächst, nimmt der Radius vector nach dieser Gleichung periodisch abwechselnd die Werthe von $2r$ bis 0 an; der durch diese Gleichung ausgedrückte Curvenzug besteht hiernach aus einer Anzahl von geschlossenen Curvenstücken, die sämmtlich in dem Pole des Coordinatensystems zusammenhängen und sämmtlich congruent sind. Der ganze Curvenzug trägt ein blattartiges oder sternförmiges Aussehen. Jeder Theil dieses blattartigen Gebildes oder jedes Blatt, wie wir der Kürze halber sagen wollen, umfasst den Winkelraum $\frac{\pi}{k}$; die Anzahl der Blätter hängt in jedem einzelnen Falle von dem jedesmaligen Werthe des Verwandlungsmoduls k ab; zur Bestimmung derselben unterscheiden wir die beiden Fälle:

a) k ist eine ganze Zahl;

b) k ist eine gebrochene Zahl von der Form $\frac{m}{n}$, wo m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten.

a) Es wird

$$\varrho = \pm 2r, \text{ wenn } \psi = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k} \ldots\ldots \lambda\frac{\pi}{k} \ldots$$

Für $\lambda = k$ nimmt $\psi = \lambda\frac{\pi}{k}$ den Werth $\psi = \pi$ an; es ist dann $k\psi = k\pi$. Hieraus folgt für ϱ der Werth $+2r$, wenn k eine gerade Zahl und der Werth $-2r$, wenn k eine ungerade Zahl ist; im ersten Falle liegen in dem Winkelraume von $\psi = 0$ bis $\psi = \pi$ k Blätter, im ganzen Winkelraume von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ also $2k$ Blätter; im letzteren Falle befinden sich dagegen in dem ganzen Winkelraume nur k Blätter, da für $\psi = \pi$ der Radius vector in die Anfangslage zurückfällt. Das erhaltene Resultat ist also: Ist k eine gerade Zahl, so hat die Curve

$2k$ Blätter; ist k eine ungerade Zahl, so besitzt die Curve k Blätter. In Fig. 11 ist $k=3$.

b) Es wird

$$\varrho = \pm 2r, \text{ wenn } \psi = 0.\ \frac{n}{m}\pi,\ 2\frac{n}{m}\pi \ldots\ \lambda . \frac{n}{m}\pi \ldots$$

Für $\lambda = m$ nimmt $\psi = \lambda \frac{n}{m}\pi$ den Werth $n\pi$, also $k\psi$ den Werth $m\pi$ an; zu dem Werthe der Variabeln $\psi = n\pi$ gehört also in diesem Falle der Werth des Radius vector $\varrho = \pm 2r$, je nachdem die Zahl m gerade oder ungerade ist. Sind beide Zahlen m und n gerade, so fällt nach dem Wachsen der Variabeln ψ von 0 bis $n\pi$ der Radius vector wieder mit seinem anfänglichen Werth zusammen; die Curve besteht dann aus m Blättern. Stellen m und n ungerade Zahlen dar, so fällt ebenfalls der Radius vector nach dem Wachsen der Variabeln ψ von 0 bis $n\pi$ wieder mit seinem Anfangswerth zusammen; der Curvenzug besitzt dann ebenfalls m Blätter. Ist n eine gerade, m eine ungerade Zahl, so fällt der Radius vector für den Werth der Variabeln $\psi = n\pi$ in die seiner Anfangslage entgegengesetzte Richtung und erst bei einer weiteren Zunahme der Variabeln um $n\pi$ wieder in seine ursprüngliche Richtung; während der Zunahme $\psi = 0$ bis $\psi = n\pi$ beschreibt der Radius vector m Blätter, während der Zunahme $\psi = 0$ bis $\psi = 2n\pi$ also $2m$ Blätter. Wenn endlich n eine ungerade, m eine gerade Zahl ist, so beschreibt der Radius vector innerhalb der Werthe der Variabeln $\psi = 0$ bis $\psi = n\pi$ m Blätter; da nach einem weiteren Wachsen der Variabeln ψ um $n\pi$ wiederum m Blätter vom Radius vector gebildet werden und dieser für $\psi = 2n\pi$ wieder mit seiner Anfangslage zusammenfällt, so besteht die Curve auch in diesem Falle aus $2m$ Blättern. Es ergiebt sich hiernach folgendes Resultat: Sind m und n gleichartige Zahlen, so besitzt die Curve m Blätter; sind aber m und n ungleichartige Zahlen, so besteht die Curve aus $2m$ Blättern. In Fig. 12 ist $k=\frac{1}{2}$.

Die genannte Curve gehört, wie Durège in dem Aufsatze: „Ueber eine besondere Art der cyklischen Curven" dieser Zeitschrift, Jahrg. 9, Heft 3 nachgewiesen hat, zu den cyklischen Curven. Wird der Mittelpunkt des festen Kreises zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen, die Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte O und o in derjenigen Lage als positive x-Axe betrachtet, in welcher der beschreibende Punkt in dieselbe und zwar von O aus in die Richtung Oo fällt, wird der Radius des festen Kreises R_0, der des beweglichen r_0 und die Entfernung des beschreibenden Punktes von o r' genannt, so sind die durch rechtwinklige Coordinaten ausgedrückten Gleichungen der Epi-, Hypo- und Pericykloide der Reihe nach die folgenden:

$$x = (R_0 + r_0)\cos\varphi + r'\cos\frac{R_0 + r_0}{r_0}\varphi, \qquad x = (R_0 - r_0)\cos\varphi + r'\cos\frac{R_0 + r_0}{r_0}\varphi,$$

$$y = (R_0 + r_0)\sin\varphi + r'\sin\frac{R_0 + r_0}{r_0}\varphi, \qquad y = (R_0 - r_0)\sin\varphi - r'\sin\frac{R_0 + r_0}{r_0}\varphi,$$

$$x=(r_0-R_0)\cos\varphi+r'\cos\frac{r_0-R_0}{r_0}\varphi,$$

$$y=(r_0-R_0)\sin\varphi+r'\sin\frac{r_0-R_0}{r_0}\varphi,$$

wo φ den von der Centrallinie Oo und der positiven x-Axe eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Wird in diesen Gleichungen r' der Reihe nach gleich (R_0+r_0), (R_0-r_0), (r_0-R_0) angenommen, so gehen sie in die folgenden über:

$$x=2(R_0+r_0)\cos\frac{2r_0+R_0}{r_0}\varphi.\cos\frac{R_0}{2r_0}\varphi,$$

$$y=2(R_0+r_0)\sin\frac{2r_0+R_0}{r_0}\varphi.\cos\frac{R_0}{2r_0}\varphi,$$

$$x=2(R_0-r_0)\cos\frac{2r_0-R_0}{2r_0}\varphi.\cos\frac{R_0}{2r_0}\varphi,$$

$$y=2(R_0-r_0)\sin\frac{2r_0-R_0}{2r_0}\varphi.\cos\frac{R_0}{2r_0}\varphi,$$

$$x=2(r_0-R_0)\cos\frac{2r_0-R_0}{2r_0}\varphi.\cos\frac{R_0}{2r_0}.\varphi,$$

$$y=2(r_0-R_0)\sin\frac{2r_0-R_0}{2r_0}\varphi.\cos\frac{R_0}{2r_0}.\varphi.$$

Durch Einführung von Polarcoordinaten ϱ und ψ, wo $\varrho^2=x^2+y^2$ und ψ den Winkel bedeutet, welchen ϱ mit der positiven x-Axe bildet, entstehen folgende Gleichungen:

$$\varrho=2(R_0+r_0)\cos\frac{R_0}{2r_0+R_0}.\psi$$

$$\varrho=2(R_0-r_0)\cos\frac{R_0}{2r_0-R_0}.\psi$$

$$\varrho=2(r_0-R_0)\cos\frac{R_0}{2r_0-R_0}.\psi.$$

In der ersten Gleichung, in der Gleichung der Epicykloide, ist der Factor $\frac{R_0}{2r_0+R_0}$ immer kleiner, als die Einheit; in der zweiten, der Gleichung der Hypocykloide, kann der Factor $\frac{R_0}{2r_0-R_0}$ sowohl positiv, als negativ sein, muss aber seinem absoluten Werthe nach einen Werth haben, welcher grösser, als die Einheit ist; in der dritten Gleichung, der Gleichung der Pericykloide, ist der Factor $\frac{R_0}{2r_0-R_0}$ ebenfalls kleiner, als die Einheit. Da alle drei Gleichungen genau dieselbe Form haben, wie unsere obige Gleichung $\varrho=2r\cos k\psi$, so folgt, dass die durch dieselbe dargestellte blatt- oder sternförmige Curve als eine besondere Art der Epicykloiden, oder der Hypocykloiden oder der Pericykloiden angesehen werden kann; als Hypocykloide kann die Curve betrachtet werden, wenn der Verwand-

lungsmodul k grösser als die Einheit ist, als Epi- und Pericykloide, wenn der Verwandlungsmodul k weniger als die Einheit beträgt. Hiernach ist die Curve

$$\varrho = 2r\cos k\psi$$

eine Epicykloide,

in welcher $r' = R_0 + r_0$, $R_0 = r\dfrac{2k}{1+k}$, $r_0 = r\dfrac{1-k}{1+k}$, wenn $k < 1$;

eine Hypocykloide,

in welcher $r' = R_0 - r_0$, $R_0 = r\dfrac{2k}{k-1}$, $r_0 = r\dfrac{k+1}{k-1}$, wenn $k > 1$

eine Pericykloide,

in welcher $r' = r_0 - R_0$, $R_0 = r\dfrac{2k}{1-k}$, $r_0 = r\dfrac{1+k}{1-k}$, wenn $k < 1$.

Die durch die Constanten $R_0 = r\dfrac{2k}{k-1}$ und $r_0 = r\dfrac{k+1}{k-1}$ definirte Hypocykloide ist aber nicht die einzige; die Curve $\varrho = 2r\cos k\psi$ kann noch als eine zweite Hypocykloide angesehen werden. Da nämlich die Curve bei negativem Verwandlungsmodul ganz dieselbe ist, wie bei gleich grossen positiven, so kann sie auch als eine Hypocykloïde aufgefasst werden, deren Constanten aus den Constanten der obigen Hypocykloide dadurch hergeleitet werden, dass der Verwandlungsmodul in denselben negativ gesetzt wird. Diese zweite Hypocykloide ist also durch die folgenden Constanten definirt:

$$R'_0 = r\frac{2k}{k+1}, \quad r'_0 = r\frac{k-1}{k+1}.$$

Die erste Hypocykloide ist, da $R_0 - r_0 < r_0$, eine verkürzte, die zweite, bei welcher $R'_0 - r'_0 > r'_0$, eine verlängerte. Zwischen den Constanten dieser beiden Hypocykloiden bestehen die Beziehungen:

$$\frac{R_0}{R'_0} = \sqrt{\frac{r_0}{r'_0}},$$

$$\frac{r_0}{R'_0} + \frac{r'_0}{R'_0} = 1,$$

$$(R_0 - r_0)^2 = (R'_0 - r'_0)^2 = r_0 r'_0.$$

Ist der Werth des Verwandlungsmoduls k numerisch kleiner, als die Einheit, so kann, wie schon hervorgehoben, die Curve $\varrho = 2r\cos k\psi$ erstens als Epicykloide und zweitens als Pericykloide betrachtet werden. Die Constanten der Epicykloide sind dann $R_0 = r.\dfrac{2k}{1+k}$ $r_0 = r\dfrac{1-k}{1+k}$, die Constanten der Pericykloide $R'_0 = r\dfrac{2k}{1-k}$, $r'_0 = r\dfrac{1+k}{1-k}$; zwischen den vier Constanten R_0, r_0, R'_0 und r'_0 bestehen die folgenden Relationen:

$$\frac{r'_0}{R'_0}-\frac{r_0}{R_0}=1,$$
$$r'_0-R'_0=r_0+R_0,$$
$$\frac{R_0}{R'_0}=\sqrt{\frac{r_0}{r'_0}}.$$

3) In diesem Falle gehört zu jedem beliebigen Werthe des Arguments ψ ein bestimmter, zwischen den Grenzen $r+b$ und $r-b$ liegender Radius vector; die Curve zieht sich also rings um den Pol des Coordinatensystems herum und liegt innerhalb zweier um den Pol mit den Radien $r+b$ und $r-b$ gezogener Kreislinien. Drückt der Verwandlungsmodul k eine ganze Zahl aus, so erreicht der Radius vector während einer Umdrehung um den Pol k mal den Maximal- und k mal den Minimalwerth und fällt am Ende derselben in seinen anfänglichen Werth zurück; die Curve besteht dann aus einem Blatte, welches sich aus k, in der Entfernung $r-b$ vom Pol zusammenhängenden, Blatttheilen zusammensetzt. In der Fig. 13 ist $k=3$ und in der Fig. 14 $k=4$ angenommen; Q ist der Mittelpunkt der Kreislinie und O Pol des Coordinatensystems. Jeder der k Blatttheile ist ein anorthoskopisches Bild der als Object genommenen Kreislinie. Ist der Verwandlungsmodul k ein Bruch $\frac{m}{n}$, so besteht die Curve in einem Linienzuge, welcher sich n mal um den Pol des Coordinatensystems herumschlingt; in diesem Linienzuge erreicht der Radius vector m mal den Maximal- und m mal den Minimalwerth. Auch diesen Curvenzug wollen wir der Kürze wegen mit dem Namen eines Blattes belegen und den einzelnen, zwischen je zwei Maximalwerthen des Radius vector liegenden m Theilen, von denen ein jeder das anorthoskopische Bild der Kreislinie darstellt, die Benennung Blatttheil lassen. Beispiele für diesen Fall sind die Figuren 15 und 16; in der ersteren ist $k=\frac{1}{2}$ und in der letzteren $k=\frac{3}{2}$ angenommen. $ACBD$ ist die als Object dienende Kreislinie, Q ihr Mittelpunkt, O Pol des Coordinatensystems.

4) Die Gleichung $\varrho=b\cos k\psi\pm\sqrt{r^2-b^2\sin^2 k\psi}$ reducirt sich in dem Falle, dass $b=0$ ist, auf $\varrho=r$. Das anorthoskopische Bild der Kreislinie ist in diesem Falle gleich der Kreislinie selbst und von dem Verwandlungsmodul k vollständig unabhängig.

Der Inhalt der von der Curve $\varrho=b\cos k\psi\pm\sqrt{r^2-b^2\sin^2 k\psi}$ begrenzten Fläche beträgt in dem Falle, dass $b\geqq r$ ist

$$F=\int_0^{\frac{\operatorname{Arc}\sin\frac{r}{b}}{k}} 4b\cos k\psi\sqrt{r^2-b^2\sin^2 k\psi}\,.\,d\psi.$$

Setzen wir $\sin k\psi=x$, so wird:

$$F=\frac{4b}{k}\int_0^{\frac{r}{b}}\sqrt{r^2-b^2x^2}\,dx.$$

Da $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\tfrac{1}{2}a^2\,Arc\sin\frac{x}{a}+C$$
ist, so kommt:
$$F=\frac{r^2\pi}{k}.$$
Ist $b<r$, so beträgt die einem einzelnen Blatttheile, welcher das anorthoskopische Bild der Kreislinie darstellt, zugehörige Fläche:
$$F=\int_0^{\frac{\pi}{k}}\{b^2\cos^2 k\psi+r^2-b^2\sin^2 k\psi+2b\cos k\psi\sqrt{r^2-b^2\sin^2 k\psi}\}\,d\psi$$
oder, wenn $k\psi=\varphi$ gesetzt wird,
$$F=\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\{b^2\cos 2\varphi+r^2+2b^2\cos\varphi\sqrt{r^2-b^2\sin^2\varphi}\}\,d\varphi.$$

Hieraus folgt:
$$F=\frac{r^2\pi}{k}.$$

Es ergeben sich also folgende Sätze:

„Alle die verschiedenen Curven, welche im Anorthoskop bei demselben Verwandlungsmodul k und irgend einem Parameter $b>r$ aus der Kreislinie erzeugt werden, schliessen dieselbe Fläche ein, nämlich eine Fläche, welche den k^{ten} Theil der von der Kreislinie begrenzten Fläche ausmacht. Das Anorthoskop bietet also das Mittel dar, eine unendliche Reihe von Curven zu finden, welche alle dieselbe Fläche, nämlich einen beliebigen Theil einer Kreisfläche, einschliessen."

„Das anorthoskopische Bild der Kreislinie umgrenzt eine Fläche, welche bei dem Verwandlungsmodul k gleich ist dem k^{ten} Theile der von der Kreislinie umschlossenen Fläche."

Schliesslich mögen noch einige bemerkenswerthe, auf die Länge bezügliche Eigenschaften unserer Curve angeführt werden. Ist $b\geqq r$, so ist die Länge der Curve
$$S=2\int_0^{\frac{Arc\sin\frac{r}{b}}{k}}\Bigg\{b\cos k\psi\sqrt{\frac{r^2-b^2(1-k^2)\sin^2 k\psi}{r^2-b^2\sin^2 k\psi}}+\sqrt{r^2-b^2(1-k^2)\sin^2 k\psi}$$
$$+b\cos k\psi\sqrt{\frac{r^2-b^2(1-k^2)\sin^2 k\psi}{r^2-b^2\sin^2 k\psi}}-\sqrt{r^2-b^2(1-k^2)\sin^2 k\psi}\Bigg\}d\psi$$
$$=4b\int_0^{\frac{Arc\sin\frac{r}{b}}{k}}\cos k\psi\sqrt{\frac{r^2-b^2(1-k^2)\sin^2 k\psi}{r^2-b^2\sin^2 k\psi}}.\,d\psi.$$

Es sei erstens $k > 1$. Setzen wir

$$\sin^2 k\psi = \left(\frac{r}{b}\right)^2 (1 - y^2),$$

so wird:

$$S = 4r \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) y^2}{1 - y^2}} \, dy = 4r\, E^I \bmod \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}.$$

Zweitens sei $k < 1$. Wird

$$\sin^2 k\psi = \left(\frac{r}{b}\right)^2 y^2$$

gesetzt, so kommt:

$$S = \frac{4r}{k} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - (1 - k^2)\, y^2}{1 - y^2}} \, dy = \frac{4r}{k} E^I \bmod \sqrt{1 - k^2}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

„Alle die unendlich vielen Curven, welche bei demselben Verwandlungsmodul k und irgend einem Parameter b, dessen Werth grösser, als r ist, aus der Kreislinie im Anorthoskop erzeugt werden, haben die gleiche Länge, nämlich die Länge einer Ellipse, deren Halbaxen r und $\frac{r}{k}$ sind, d, h. der Ellipse, in welche das anorthoskopische Bild der Kreislinie bei dem Verwandlungsmodul k übergehen würde, wenn der Parameter b den Werth ∞ annähme."

„Besitzt der Parameter b den speciellen Werth r, so hat das anorthoskopische Bild der Kreislinie [je ein Blatt der unter 2) besprochenen Curve] bei dem Verwandlungsmodul k eine Länge, welche der Länge einer Ellipse mit den Halbaxen r und $\frac{r}{k}$ gleich ist."

Hiernach haben in der Fig. 17 die Curven $AC'BD'$, $AC''BD''$, $AC'''BD'''$, zu denen die Parameterwerthe $b = QM'$, $b = QM''$, $b = QM'''$ gehören und die denselben Verwandlungsmodul $k = \frac{1}{2}$ besitzen, gleiche Länge mit der Ellipse $APBR$, welche das anorthoskopische Bild der Kreislinie $ACBD$ für den Verwandlungsmodul $k = \frac{1}{2}$ und den Parameter $b = \infty$ ist.

Die Ellipse mit den Halbaxen r und $\frac{r}{k}$ umschliesst die Fläche $\frac{r^2\pi}{k}$, also eine Fläche, welche gleich ist der von dem anorthoskopischen Bilde der Kreislinie begrenzten Fläche. Die zwei letzten Sätze müssen also zu den folgenden erweitert werden:

„Alle die unendlich vielen Curven, welche bei demselben Verwandlungsmodul k und irgend einem Parameter b, dessen Werth grösser, wie r ist, aus der Kreislinie im Anorthoskop erzeugt werden, haben die gleiche Fläche und Länge, nämlich die Fläche und Länge einer Ellipse, deren Halbaxen r und $\frac{r}{k}$ sind, d. h. der Ellipse, in welche das anorthoskopische Bild der Kreislinie bei dem Verwandlungsmodul k übergehen würde, wenn der Parameter b den Werth ∞ annähme."

„Besitzt der Parameter b den speciellen Werth r, so hat das anorthoskopische Bild der Kreislinie bei dem Verwandlungsmodul k gleiche Fläche und Länge mit einer Ellipse, deren Halbaxen r und $\frac{r}{k}$ sind."

Ist $b < r$, so besteht die Curve $\varrho = b \cos k\psi \pm \sqrt{r^2 - b^2 \sin^2 k\psi}$ aus einer bestimmten, vom Verwandlungsmodul k abhängenden Anzahl von blattartigen Gebilden, von denen ein jedes einzeln das anorthoskopische Bild der Kreislinie darstellt. Die Länge dieses letzteren ist in diesem Falle:

$$S = 2b \int_0^{\frac{\pi}{k}} \cos k\psi \sqrt{\frac{r^2 - b^2(1-k^2)\sin^2 k\psi}{r^2 - b^2 \sin^2 k\psi}}\, d\psi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{k}} \sqrt{r^2 - b^2(1-k^2)\sin^2 k\psi} \,.\, d\psi$$

oder, wenn $k\psi = \varphi$ gesetzt wird:

$$S = \frac{2b}{k} \int_0^{\pi} \cos k\psi \sqrt{\frac{r^2 - b^2(1-k^2)\sin^2\varphi}{r^2 - b^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi + \frac{2}{k} \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 - b^2(1-k^2)\sin^2\varphi} \,.\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{k} \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 - b^2(1-k^2)\sin^2\varphi} \cdot d\varphi,$$

da $\int_0^{\pi} \cos\varphi \sqrt{\frac{r^2 - b^2(1-k^2)\sin^2\varphi}{r^2 - b^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi = 0$ ist.

Ist nun erstens $k < 1$, so wird:

$$S = \frac{2r}{k} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}(1-k^2)\sin^2\varphi} \,.\, d\varphi = \frac{4r}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}(1-k^2)\sin^2\varphi} \,.\, d\varphi$$

$$= \frac{4r}{k} E^I \bmod \frac{b}{r}\sqrt{1-k^2}.$$

Die Länge des anorthoskopischen Bildes der Kreislinie ist also gleich dem Umfange einer Ellipse, deren grosse Halbaxe gleich $\frac{r}{k}$ und deren kleine Halbaxe gleich $\frac{r}{k}\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}(1-k^2)}$ ist.

In dem Falle $k > 1$ setzen wir in

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{k}} \sqrt{r^2 - b^2(1-k^2)\sin^2 k\psi}\,.\,d\psi$$

$\sin^2 k\psi = 1 - y^2$ und erhalten:

$$S = \frac{4}{k}\sqrt{r^2 + b^2(k^2-1)}\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2(k^2-1)}{r^2+b^2(k^2-1)}y^2}{1-y^2}}\,dy$$

$$= \frac{4\sqrt{r^2 + b^2(k^2-1)}}{k}\cdot E^1 \bmod.\frac{b\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{r^2+b^2(k^2-1)}}.$$

Das anorthoskopische Bild der Kreislinie hat hiernach eine Länge, welche gleich ist der Länge einer Ellipse, deren grosse Halbaxe gleich $\frac{r}{k}\sqrt{1 + \frac{b^2}{r^2}(k^2-1)}$ und deren kleine Halbaxe gleich $\frac{r}{k}$ ist.

Wir können also schliesslich folgenden Satz hinstellen:

„Das anorthoskopische Bild der Kreislinie hat in dem Falle, dass der Parameter b kleiner, als r ist, eine Länge, welche gleich kommt dem Umfange einer Ellipse mit den Halbaxen $\frac{r}{k}$ und $\frac{r}{k}\sqrt{1-\frac{b^2}{r^2}(1-k^2)}$."

Kleinere Mittheilungen.

VI. Summe von Cubikzahlen. Im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift (XI, 248—251) wurde über eine Abhandlung des H. Genocchi berichtet, welche hauptsächlich mit der cubischen Summe einer Reihe von Cubikzahlen sich beschäftigt, beiläufig jedoch auch bei der Gleichung

$$x^3+(x+r)^3+\ldots+[x+(n-1)\,r]^3=y^2$$

verweilt. Inzwischen hat H. Eugène Catalan (gegenwärtig Professor in Lüttich) einen specielleren Fall dieser letzteren Gleichung, wenn nämlich $r=1$ und x und y als ganze positive Zahlen angenommen werden, zum Gegenstande eines besonderen Aufsatzes gewählt, welcher wieder in den Atti dell' Accademia Pontificia de' nuovi Lincei Vol. XX (Sitzung vom 2. December 1866) abgedruckt ist. Der Gang der Untersuchung ist folgender. Die in unserem früheren Referate angeführten Summenformeln begründen die Identität

$$x^3+(x+1)^3+\ldots+(x+n-1)^3=n\left(x+\frac{n-1}{2}\right)\left[x^2+(n-1)\,x+\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

oder, indem die Summe der gegebenen Reihe y^2 sein soll und unter Anwendung der Abkürzung $2x+n-1=z$

$$1)\qquad y^2=\frac{n}{8}.z.(z^2+n^2-1).$$

Die Definition von z ergiebt: $z\equiv n-1\ (mod\ 2)$, so dass eine der Zahlen n, z und damit sicherlich das Product nz durch 2 theilbar sein muss; aus demselben Grunde ist eine der beiden Quadratzahlen n^2, z^2 gerade, die andere ungerade, ihre Summe daher von der Form $4k+1$ und somit z^2+n^2-1 durch 4 theilbar. Demnach ist y^2 (was übrigens auch aus dem Sinne dieser Zahl als Summe ganzer Zahlen hervorgeht, wie H. Catalan einfacher hätte schliessen dürfen, wenn er nicht die obigen Bemerkungen über Theilbarkeit anderweitig brauchte) selbst eine ganze Zahl, deren Wurzel wieder ganz oder irrational sein wird, und ebenso auch die Wurzel ihres 16fachen, also von

$$2nz\,(z^2+n^2-1).$$

Nennen wir $2nz = \alpha$, $z^2 + n^2 - 1 = \beta$, $z + n = \sigma$, $z - n = \delta$, wodurch $\sigma^2 = \alpha + \beta + 1$, $\delta^2 = \beta - \alpha + 1$ sich ergiebt, die Gleichung 1) aber in

$$2) \qquad 16y^2 = \alpha . \beta$$

übergeht, so zeigt sich, dass die Aufgabe darauf hinausläuft:

„zwei ganze Zahlen α, β zu finden, deren jede durch 4 theilbar ist, und deren Product $\alpha . \beta$ ebenso wie $\alpha + \beta + 1$ und $\beta - \alpha + 1$ Quadratzahlen sein müssen."

Die gemachte Annahme $\delta^2 = \beta - \alpha + 1$ führt zu $\beta = \alpha + \delta^2 - 1$ und diese in Verbindung mit 2) zu

$$64y^2 = 4\alpha\beta = 4\alpha^2 + 4\alpha(\delta^2 - 1) + (\delta^2 - 1)^2 - (\delta^2 - 1)^2$$
$$= (2\alpha + \delta^2 - 1)^2 - (\delta^2 - 1)^2,$$

oder:

$$3) \qquad (8y)^2 + (\delta^2 - 1)^2 = (2\alpha + \delta^2 - 1)^2.$$

Da aber bekanntlich die allgemeine Formel für pythagorische Zahlen

$$(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

heisst, so sind zwei Auflösungen denkbar, je nachdem man von den beiden zu addirenden Quadratzahlen die eine oder die andere mit der ersten und zweiten Quadratzahl der allgemeinen Formel identificirt. Also entweder:

$$4) \qquad 2\alpha + \delta^2 - 1 = u^2 + v^2, \quad \delta^2 - 1 = u^2 - v^2, \quad 8y = 2uv,$$

oder:

$$5) \qquad 2\alpha + \delta^2 - 1 = u^2 + v^2, \quad 8y = u^2 - v^2, \quad \delta^2 - 1 = 2uv.$$

Die erste Auflösung giebt durch Vereinigung der beiden ersten Gleichungen:

$$6) \qquad \alpha = v^2, \quad \beta\ (= \alpha + \delta^2 - 1) = u^2;$$

die zweite giebt in ähnlicher Weise:

$$7) \qquad 2\alpha = (u - v)^2, \quad 2\beta = (u + v)^2,$$

wonach entweder α und β oder das Doppelte jeder dieser Zahlen Quadratzahlen sind.

Gehen wir auf die früheren Werthe zurück, welche α und β genannt worden waren, so verwandelt sich 6) in:

$$2nz = v^2, \quad z^2 + n^2 - 1 = u^2.$$

Es sei $\frac{n}{z} = \frac{p}{q}$, wo p, q theilerfremd sein sollen. Daraus folgt:

$$n = p\gamma, \quad z = q\gamma,$$

wo wegen $z \equiv n - 1 \ (mod\ 2)$ von den Zahlen p, q die eine gerade, die andere ungerade sein muss, und aus demselben Grunde γ ungerade. Ferner erweist uns $v^2 = 2nz = 2pq\gamma^2$, dass $2pq$ eine Quadratzahl sein muss, und bei der Theilerfremdheit von p und q, dass eine dieser Zahlen ein ungerades Quadrat, die andere die Hälfte eines geraden Quadrates sein muss.

Führt man überdies die Werthe von n und z in $z^2 + n^2 - 1 = u^2$ ein, so entsteht:

$$8) \qquad (p^2+q^2)\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Bei beliebiger Annahme der Zahlen pq, unter Wahrung der für dieselben soeben gefundenen Bedingung, kann man aus 8) ganzzahlige Werthe von γ und u finden. Alsdann wird schliesslich:

$$9) \qquad n = p.\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma+1}{2}, \quad y^2 = 2pq.\left(\frac{\gamma u}{4}\right)^2.$$

Beispielsweise sei $p=8$, $q=9$, so geht die 8) über in $145\gamma^2 - u^2 = 1$, welche die Wurzeln $\gamma = 1$, $u = 12$ besitzt, also $x = 1$, $n = 8$, $y = 36$.

Oder: $p = 1$, $q = 25$. Diesmal heisst die 8) $629\gamma^2 - u^2 = 1$, woraus $\gamma = 313$, $u = 7850$, also $x = 3600$, $n = 626$, $y = 6142625$.

Von der Auflösung 7) ausgehend, findet H. Catalan:

$$4nz = (u-v)^2, \quad 2(z^2+n^2-1) = (u+v)^2.$$

Bei $n = p\gamma$, $z = q\gamma$ wie im ersteren Falle wird

$$4pq\gamma^2 = (u-v)^2, \quad 2[(q^2+p^2)\gamma^2 - 1] = (u+v)^2.$$

Daraus folgt einestheils, dass p und q theilerfremde Quadrate sind; anderentheils muss dass Doppelte von $(q^2+p^2)\gamma^2 - 1$ eine ganze Quadratzahl, also durch 4 theilbar sein, demnach $(q^2+p^2)\gamma^2 - 1$ durch 2 theilbar, $(q^2+p^2)\gamma^2$ ungerade und folglich γ ungerade, von p und q eines gerade, das andere ungerade sein. Hier stellt sich also für p und q die Bedingung so, dass eine dieser Zahlen ein gerades, die andere ein ungerades Quadrat sein muss.

Setzt man $(u+v)^2 = 4w^2$, so entsteht die der früheren Gleichung 8) entsprechende:

$$10) \qquad (p^2+q^2)\gamma^2 - 2w^2 = 1,$$

aus welcher bei bedingungsmässiger, sonst willkürlicher Annahme von p und q ganzzahlige Werthe von γ und w gefunden werden müssten. H. Catalan erklärt nun, trotz aller Bemühungen damit nicht zu Stande gekommen zu sein und stellt deshalb die Frage auf, ob es wohl möglich sei, in der Gleichung 10) einen Widerspruch nachzuweisen, der ihre Lösbarkeit überhaupt verhindere? Sollten sich dagegen die verlangten γ, w finden lassen, so würde schliesslich:

$$11) \qquad n = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma+1}{2}, \quad y^2 = pq.\left(\frac{\gamma w}{2}\right)^2.$$

M. Cantor.

VII. Ueber den Krümmungs-Schwerpunkt algebraischer Curven. Von Dr. Carl Neumann, Prof. in Tübingen. Denkt man sich eine gegebene Curve als eine materielle Linie von überall gleichem Querschnitt und von einer Dichtigkeit, welche an jeder Stelle dem Krümmungs-Radius umgekehrt proportional ist, so wird der Schwerpunkt dieser materiellen Linie bekanntlich der Krümmungs-Schwerpunkt der Curve genannt. (Vergl. Steiner, Crelle's Journal Bd. I, pag. 56.) Der hergebrachten Gewohnheit

entsprechend, mag ausserdem unter dem Schwerpunkt eines Punktsystemes derjenige Punkt verstanden werden, welcher zu diesem Namen berechtigt ist, sobald sämmtliche Punkte des gegebenen Systems materiell und von gleicher Masse gedacht werden.

Ist u eine beliebige ganze rationale Function der Coordinaten x, y, so besitzt der Krümmungs-Schwerpunkt der Curve

$$u = Const$$

einige Eigenschaften, auf welche aufmerksam zu machen, der Zweck dieser Note ist. Es gelten nämlich folgende Sätze:

Erster Satz. Legt man parallel zu einer beliebig gegebenen Richtung sämmtliche Tangenten an die Curve $u = Const$, so ist der Schwerpunkt der Berührungspunkte jederzeit identisch mit dem Krümmungs-Schwerpunkt der Curve.

Zweiter Satz. Construirt man sämmtliche Schnittpunkte der beiden Curven $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, so ist der Schwerpunkt dieser Schnittpunkte identisch mit dem Krümmungs-Schwerpunkt der Curve $u = Const$.

Dritter Satz. Aendert man in der Gleichung $u = Const$ die auf der rechten Seite stehende $Const$, so erhält man ein System von Curven, welche sämmtlich ein und denselben Krümmungs-Schwerpunkt besitzen.

Vierter Satz. Ist die Function u, was den Grad ihrer höchsten Terme anbelangt, von der n^{ten} Dimension, und ist ferner $u \equiv v + w$, wo v die Terme n^{ter} und $(n-1)^{ter}$ Dimension, w dagegen alle übrigen Terme umfassen soll, so kann w beliebig geändert werden, ohne dass dadurch der Krümmungs-Schwerpunkt der Curve $u = Const$ in seiner Lage irgend welche Aenderung erleidet.

Der erste dieser Sätze ist zum Theil schon von Chasles und Liouville ausgesprochen. (Vergl. *Liouville: Sur quelques propositions gén. de géométrie. Journal de math. par Liouville T.* VI, *pag.* 345.) Schon Chasles hat gefunden, dass die Berührungspunkte eines Systems paralleler Tangenten der Curve einen Schwerpunkt besitzen, welcher unabhängig ist von der Richtung dieser Tangenten. Dass aber dieser Schwerpunkt zusammenfällt mit dem Krümmungs-Schwerpunkt der Curve, ist eine Thatsache, die bisher noch nicht bekannt geworden zu sein scheint.

Ohne Zweifel werden sich übrigens die hier für algebraische Curven aufgestellten Sätze leicht übertragen lassen auf algebraische Flächen.

Tübingen, 24. Februar 1867.

VIII. Bemerkungen über die regelmässigen Sternvielflache. Von Prof. Dr. Wiener in Carlsruhe. 1) In einer Abhandlung über Vielecke und Vielflache[1]) nannte ich Poinsot den Entdecker der vier regelmässigen Sternvielflache, indem ich den Angaben Poinsot's selbst und Bertrand's folgte. Ich habe mich aber unterdessen überzeugt, dass die Entdeckung zweier jener Vielflache Kepler zugeschrieben werden muss.

Poinsot in seiner Arbeit über die fraglichen Gebilde[2]) eignet sich ihre Entdeckung zu, indem er sagt, dass, so viel er wisse, bisher Niemand daran gedacht habe, die neuen Figuren zu betrachten, mit denen er sich beschäftigen wolle, dass man bisher nur 5 vollkommen regelmässige Körper gekannt habe, dass er die Vielflache höherer Art nur in einer geringen Anzahl von Fällen habe feststellen können, wobei er vermuthet, dass es nur diese vier giebt und indem er jedes einzelne der vier Sternvielflache neu nennt. Auffallen muss hiernach ein Citat[3]) Poinsot's aus Kepler's *harmonia mundi*; er führt nämlich die Nummer 28 des 2. Buches wörtlich an, worin Kepler von den Regelmässigkeiten niederer Ordnung bei den Körpern spricht, während auf der vorhergehenden Seite in der Nummer 26 die fraglichen beiden regelmässigen Sternvielflache behandelt werden; von letzterer Stelle aber zeigt Poinsot keine Kenntniss. — Bertrand nennt[4]) Poinsot den Erfinder der regelmässigen Sternvielflache.

Unterdessen fand ich bei Gelegenheit der Ansicht einer neu erschienenen Ausgabe von Kepler's Werken[5]), dass dieser in seiner *harmonia mundi* zwei der fraglichen Vielfache in verschiedenen Stellungen abgebildet und als regelmässige erkannt hat. Ausserdem erhielt ich Kenntniss von der Nachweisung der Priorität Kepler's durch Baltzer[6]). Doch halte ich es für nicht überflüssig, das Citat Baltzer's aus Kepler hier zu vervollständigen, um Bertrand's Einwand gegen Kepler's Rechte zweifellos zu widerlegen.

Bertrand sagt nämlich[7]), Kepler habe kein Recht, bei der Erfindung der regelmässigen Sternvielflache citirt zu werden, weil er sie nie als regelmässig vermuthet, sie vielmehr durch 60 gleichschenklige Dreiecke, statt durch 12 regelmässige Fünfecke gebildet angesehen habe.

Diese Aeusserung widerspricht aber in jeder Beziehung Kepler's Worten, von denen die wesentlichsten aus seiner *harmonia mundi* (*liber* II, XXVI) folgende sind:

---

1) Leipzig, B. G. Teubner 1864.

2) *Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Journ. de l'école polyt. cah.* 10 (1810) *pag.* 16.

3) Daselbst S. 44.

4) *Comptes rendus t.* 46, *p.* 79.

5) *J. Kepleri opera omnia edidit Frisch. Francofurti* 1864. (*Vol.* V.)

6) Monatsberichte der Akad. der Wissenschaften zu Berlin. 1862. S. 1046.

7) *Comptes rendus t.* 46, *p.* 117.

Addi possunt congruentiis perfectissimis regularibus duae etiam aliae congruentiae, stellarum duodecim planarum pentagonicarum. Hier nennt er die zwei Körper vollkommen regelmässig, von zwölf Sternfünfecken gebildet.

Claudunt enim pentagonicae solidas figuras aculeatas undique, quarum una fit duodecim angulorum quinquelinearium, altera viginti angulorum trilinearium; ... In his etsi forinsecus non apparet regulare planum, sed ejus loco triangulum aequicrurum pentagonicum, quina tamen hujusmodi semper in unum idemque planum competentia, occultum sub soliditate quinquangulum, veluti cor suum circumstant faciuntque cum eo dictam stellam pentagonicam, seu germanico idiomate pedem Truttae, Theophrasto Paracelso signum sanitatis. Kepler setzt also ausdrücklich die theilweise im Innern des Körpers befindlichen regelmässigen Sternfünfecke, als die Seitenflächen des Körpers, den äusserlich allein sichtbaren gleichschenkligen Dreiecken, welche nur Theile jener Flächen bilden, entgegen.

Er erläutert dies noch weiter; doch scheint mir das bisher Ausgezogene vollkommen genügend, um Bertrand's Aeusserung zu widerlegen.

2) Sodann will ich die in meiner eben angeführten Abhandlung (S. 27) nur kurz erwähnte Reciprocität etwas weiter ausführen.

Wenn man um ein regelmässiges Vielflach concentrisch und zwar, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, durch die Ecken, eine Kugel legt, so ist einem Ecke die Ebene polar und reciprok, welche in jenem Punkte die Kugel berührt; einer Kante des Vielflachs, welche zwei Ecken verbindet, der Durchschnitt der beiden diesen Ecken reciproken Ebenen, und einer Fläche des Vielflachs, welche drei oder mehr Ecken enthält, der gemeinsame Punkt aller Ebenen, welche diesen Ecken reciprok sind. Alle diese Ebenen müssen wirklich durch einen und denselben Punkt gehen, weil alle jene Ecken auf der Kugel in einer und derselben Ebene liegen. Dem ursprünglichen Vielflache ist dasjenige Vielflach reciprok, dessen Flächen, Kanten und Ecken den Ecken, Kanten und Flächen des ersteren reciprok sind. Daraus folgt, dass die Anzahl der Flächen des einen der Anzahl der Ecken des anderen gleich und dass die Anzahl der Kanten in beiden dieselbe sein muss.

Weiter ergiebt sich, dass die reciproke Form eines regelmässigen Vielflachs v wieder ein regelmässiges Vielflach v' ist. Weil alle von einem Ecke des v ausgehenden Kanten gleich lang sind, liegen ihre zweiten Ecken in einem Kreise, zu welchem das Ausgangseck der Pol ist und die reciproken Ebenen dieser Ecken schneiden die dem Ausgangsecke reciproke Ebene unter gleichen Flächenwinkeln und in Kanten, welche einem um das Ausgangseck beschriebenen Kreise umschrieben sind. Wegen der Gleichheit der Kantenwinkel in v bilden letztere Kanten gleiche Winkel, fügen sich daher zu einem regelmässigen Vielecke zusammen. Es sind demnach den gleichen Kanten, Kantenwinkeln und Flächenwinkeln in v die gleichen Flächenwinkel, Kantenwinkel und Kanten in v' reciprok. Sodann ergiebt

sich, dass eine Fläche von v' ein Vieleck derselben Art, wie das Eck in v ist, zu dem sie reciprok gebildet wurde, und dass umgekehrt die Art einer Fläche von v und des reciproken Ecks von v' dieselbe sein muss.

Es ist noch schliesslich zu zeigen, warum die Art von v mit der von v' übereinstimmt, d.h. warum beide Vielflache die Kugel gleich oft bedecken. Verbindet man auf jeder von einem Ecke des v ausgehenden Fläche den Mittelpunkt mit den Mitten der beiden in dieser Fläche liegenden und von dem fraglichen Ecke ausgehenden Kanten, so ist auf jeder Fläche ein Deltoid abgeschnitten, deren so viele in dem Ecke von v zusammentreffen, als das Eck Flächen besitzt. Dieses begrenzte Gebilde hat aber dieselbe Centralprojection auf die Kugel, als die dem Ecke des v reciproke Fläche des v' in ihrer Begrenzung. Denn es leuchtet ein, dass der Mittelpunkt einer Fläche des v und das reciproke Eck des v', sowie der Mittelpunkt einer Kante des v und der reciproken Kante des v' auf demselben Strahle aus dem Kugelmittelpunkte liegen, dass also dieser projicirende Strahl, indem er die Grenzen jener das Eck von v bildenden Deltoide beschreibt, zugleich die Grenzen der jenem Ecke reciproken Fläche von v' beschreibt, dass demnach die Centralprojectionen beider Grenzen und dann auch der ganzen Gebilde sich decken. Jenes begrenzte Eckgebilde ist aber der sovielte Theil der Oberfläche von v, der wievielte eine Fläche des v' von der Oberfläche von v' ist, nämlich der sovielte, als die Anzahl der Ecken von v und der Flächen von v' angiebt. Demnach decken auch v und v' gleich vielmal die Kugel.

IX. Elementarer Beweis des Satzes, dass das Minimum der Ablenkung beim Prisma eintritt, wenn Eintritts- und Austrittswinkel des Lichtstrahles gleich gross sind. (Hierzu Tafel II, Fig. 18 bis 23.) Herr Gymnasialprofessor Dr. Bauer aus Pisek in Böhmen machte mich vor einiger Zeit aufmerksam, dass der Beweis, den Wüllner im ersten Theile seiner Physik pag. 682 und 683 über obigen Satz giebt, nicht stichhaltig sei, indem er mir zeigte, dass man mit Anwendung von Wüllner's Verfahren auch nachweisen könne, dass bei Gleichheit von Ein- und Austrittswinkel ein Maximum der Ablenkung eintrete. A. a. Orten in Wüllner's Physik steht (siehe Fig. 4):

$$\delta = i + i' - \alpha$$

wird $i = i'$, so wird $\delta = 2i - \alpha = 2i' - \alpha$.

Ist i von i' verschieden, z. B. $i = i' + \beta$, so wird $\delta = 2i' + \beta - \alpha$, oder ist $i' = i + \beta$, so wird $\delta = 2i + \beta - \alpha$; die beiden letzten Ausdrücke aber, sagt Wüllner, nämlich $2i' + \beta - \alpha$ und $2i + \beta - \alpha$ sind, wenn β von 0 verschieden ist, grösser, als $2i - \alpha$. Man sieht, es ist hier stillschweigend in „den beiden letzten Ausdrücken“ $i = i'$ gesetzt worden, während doch beide von einander verschieden sind.

Herr Dr. Bauer machte mich in seinem Briefe auf Folgendes aufmerksam: Setzt man einmal

$$i' = i - \beta, \text{ so wird } \delta = 2i - \beta - \alpha,$$

das andere Mal $i = i' - \beta$, so wird $\delta = 2i' - \beta - \alpha$,

und hieraus geht hervor, dass für $i = i'$ die Totalablenkung δ Maximum wird.

Der Beweis ist offenbar gar nicht stichhaltig, weil eigentlich die Minimumeigenschaft von $\delta = i + i' - \alpha$ für $i = i'$ nur aus der besonderen Abhängigkeit von i' von i abgeleitet werden muss; da diese Abhängigkeit bei Wüllner's Beweis gar nicht in Betracht kommt, so würde offenbar ganz allgemein der Satz bestehen müssen:

$$x + f(x)$$

wird Minimum, wenn $x = f(x)$ wird, wobei f eine beliebige Function von x bedeutet; ein solcher Satz ist aber allgemein ganz undenkbar. Als ich mich in den Lehrbüchern der Physik nach einem elementaren Beweise von dem hier besprochenen Satz umsah, fand ich nur in der 7. Auflage von Eisenlohr's Physik einen solchen angedeutet, den ich hier auch am Ende meines Aufsatzes besprochen habe. Als ich selbst einen elementaren Beweis aufzufinden suchte, fand ich eine Construction der Totalablenkung beim Prisma, aus der mit Leichtigkeit ein Beweis für das Minimum der Ablenkung folgt. Ich theile in Folgendem meinen Beweis mit, lasse aber einige geometrische Betrachtungen vorhergehen, auf die sich mein Beweis stützt. Man wird übrigens beim Durchlesen des Folgenden bald bemerken, dass man durchaus nicht unbedingt aller dort angewendeten fünf Figuren bedarf, sondern dass man die Figuren wird ohne Schaden für die Demonstration bis auf zwei reduciren können, auf die Fig. 21 und die etwas zu modificirende Fig. 22.

Man lege eine Gerade $M'N'$ (Fig. 18) durch den Mittelpunkt C eines Kreises, O ist ein ausserhalb des Kreises gelegener Punkt der Geraden $M'N'$. Verbindet man den Punkt Q, der weiter von $M'N'$ liegt, als der Punkt P, mit O, so ist $OQ > OP$, weil $PC = QC = r$ gesetzt,

$$OP^2 = r^2 + OC^2 - 2r\, OC \cos PCO$$

$$OQ^2 = r^2 + OC^2 - 2r\, OC \cos QCO,$$

nun ist $\cos PCO > \cos QCO$,

folglich $OP < OQ$.

Zieht man demnach von O aus eine Gerade nach einem zwischen $M'N'$ und dem Tangentialpunkte T gelegenen Punkte des Kreises und liegt der Punkt auf der O zugewendeten Seite, so wird die Linie OQ, die mit $M'N'$ einen grösseren Winkel einschliesst, als OP, auch allemal die grössere Länge besitzen, weil erstere einen von $M'N'$ entfernteren Punkt Q des Kreises trifft, als OP, welche einen näher an $M'N'$ liegenden Punkt P des Kreises mit O verbindet.

Lässt man in Fig. 19, deren Anfang ebenfalls in einer Geraden $M'N'$ besteht, einen Winkel GOF, dessen Scheitel auf $M'N'$ liegt, sich so um

eine in O auf der Ebene der Zeichnung senkrechte Axe drehen, dass er, sich von $M'N'$ entfernend, in die Lage JOH übergeht, so ist:

$$ON > OL$$
$$OM > OK$$
$$\angle NOM = \angle LOK,$$

folglich Sehne und Bogen $MN > KL$, daher gilt für die Centriwinkel:

$$\angle MCN > \angle KCL.$$

Welches ist nun bei einem solchen in der Ebene der Zeichnung verschiedene Lagen einnehmenden, dabei aber mit seinem Scheitel in O bleibenden Winkel diejenige Lage, bei welcher der entsprechende Centriwinkel in C Minimum wird? Es ist die Lage, wobei MN den rotirenden Winkel halbirt.

Wird der Winkel JOH ($JC = CH$) (Fig. 20) bis in die Lage GOF verschoben, so rückt der Centriwinkel NCM nach unten und verändert sich in den Winkel LCK,

$$LCK = NCM - NCL + MCK \quad MCK > NCL,$$

folglich:

$$LCK > NCM.$$

Die Anwendung dieser bis jetzt gegebenen Sätze zu dem Beweis, dass beim Prisma das Minimum der Ablenkung eintritt, wenn Eintritts- und Austrittswinkel der Lichtstrahlen gleich sind, geschieht nun mit Hilfe einer einfachen Construction, welche an Fig. 22 gezeigt werden wird, nachdem durch Fig. 21 die gewöhnliche Figur noch einmal in Erinnerung gebracht worden ist, durch welche der Weg eines Strahles im Prisma-Durchschnitt gezeigt zu werden pflegt.

In Fig. 21 werden die Einfallslothe durch punktirte Linien dargestellt, die Linien aus Punkten und Strichen zusammengesetzt, sind die Verlängerungen des eintretenden und aus dem Prisma austretenden Lichtstrahles, sie schliessen mit einander den Winkel δ ein (die Totalablenkung des durch das Prisma gebrochenen Lichtstrahles). Wie bekannt, gelten, wenn n der Brechungsindex beim Eintritt aus Luft in Glas ist, folgende Beziehungen:

$$\sin i = n \sin r$$
$$r + r' = \alpha$$
$$\sin i' = n \sin r'$$
$$\delta = i + i' - \alpha.$$

Für welche Werthe von i und i' die Totalablenkung δ Minimum wird, erkennt man leicht, wenn man i, i' und δ aus r und r' so construirt, wie an Fig. 22 gezeigt wird: Man gebe der Linie OC die Länge $OC = n$, trage an OC die Winkel r und r' zu beiden Seiten an; die auf den äusseren Schenkeln von r und r' gezogenen Perpendikel CF und CG sind dann:

$$CF = n \sin r$$
$$CG = n \sin r'.$$

Wenn man nun von C aus einen Kreis mit dem Radius $= 1$ zieht, welcher die Linien OF und OG in H und K schneidet, so ist:

$$\angle FHC = i$$
$$\angle GKC = i';$$

denn es ist:

$$\sin FHC = n \sin r$$
$$\sin GKC = n \sin r'.$$

Wenn man dann die übrigen Winkel in der Figur bestimmt, so findet man:

$$\angle HCO = i - r$$
$$\angle KCO = i' - r',$$

demnach: $\angle HCK = i + i' - (r + r') = i + i' - \alpha = \delta.$

Bewegt man nun den Winkel $FOG = \alpha = r + r'$ in der Ebene der Zeichnung nach oben oder unten, während sein Scheitel in O festbleibt, so verändern sich r und r', sowie δ, der $\angle HCK = \delta$ nimmt aber den früheren geometrischen Erörterungen gemäss den kleinsten Werth an, wenn die Gerade OC den $\angle FOG = \alpha$ halbirt, also wenn $r' = r = \frac{1}{2}\alpha$ ist.

In der 7. Auflage des geschätzten Lehrbuches der Physik von Eisenlohr wird die Totalablenkung beim Prisma mit Hilfe eines dort nicht bewiesenen Satzes demonstrirt, welchen letzteren wir leicht aus Fig. 23 ableiten können, in der wiederum $OC = n$ und der Radius des von C aus gezogenen Kreises $= 1$ ist. Nimmt der Winkel r in Fig. 23 um Δr zu, so geht i über in $i + \Delta i$, die Zunahme KCH des Winkels HCO möge durch Δz bezeichnet sein. Addirt man zur Gleichung:

$$HCF = KCG + \Delta r + \Delta z$$

auf beiden Seiten $i + \Delta i$, so erhält man:

$$(HCF + i) + \Delta i = (KCG + i + \Delta i) + \Delta r + \Delta z,$$

oder:

$$R + \Delta i = R + \Delta r + \Delta z,$$

oder:

$$\Delta i = \Delta r + \Delta z.$$

Da nun, wenn ein von Haus aus grösseres r um Δr zunimmt, das entsprechende Δz grösser sein muss, als bei kleinerem r, so wird Δi bei wachsendem r und i immer grösser werden müssen.

Darauf gründet nun Eisenlohr seinen Beweis, wie folgt:

Fürs Minimum der Ablenkung ist, wie schon aus den Versuchen geschlossen werden muss, $r = r' = \frac{1}{2}\alpha$, der entsprechende Werth vom Ein- und Austrittswinkel sei $i = i' = a$, nimmt $r = \frac{1}{2}\alpha$ um Δr zu, so wird $r' = \frac{1}{2}\alpha - \Delta r$, i möge übergehen in $i + \Delta i$ und i' in $i' - \Delta i'$. Es gelten jedenfalls folgende Gleichungen, die den Werth des Brechungsindex n auf dreierlei verschiedene Weise ausdrücken:

$$\frac{\sin(a + \Delta i)}{\sin(\frac{1}{2}\alpha + \Delta r)} = \frac{\sin a}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin(a - \Delta i')}{\sin(\frac{1}{2}\alpha - \Delta r)}.$$

Da $\triangle i$ dem Winkel $\frac{1}{2}\alpha + \triangle r$ zugehört, und $\triangle i'$ dem kleineren Winkel $\frac{1}{2}\alpha - \triangle r$, so muss $\triangle i > \triangle i'$ sein. Wenn aber $r = \frac{1}{2}\alpha$ in $r = \frac{1}{2}\alpha + \triangle r$ übergeht, wird aus: $\delta = 2a - \alpha$ der Winkel $\delta = 2a + (\triangle i - \triangle i') - \alpha$, d. i. ein grösserer Winkel, weil:

$$\triangle i - \triangle i' \text{ positiv ist}$$

und damit ist bewiesen, dass δ Minimum wird, wenn $r = r' = \frac{1}{2}\alpha$ wird.

Dr. Kahl.

X. Entgegnung auf die Antwort des Herrn Clausius auf S. 455 des XI. Bandes dieser Zeitschrift. In meinem letzten Aufsatze: „Ueber das Integral $\int\frac{dQ}{T}$“ (s. diese Zeitschrift Bd. XI, S. 152) habe ich zunächst nachgewiesen, dass, entgegengesetzt der Behauptung des Herrn Clausius (in seiner Abhandlung: „Ueber die Bestimmung der Energie und Entropie eines Körpers“, d. Zeitschr. Bd. XI, S. 31) in der That der von mir entwickelte Werth jenes Integrals (s. d. Zeitschr. Bd. X, S. 109) für irgend welche Zustandsänderungen eines Körpers einen allgemeineren Satz enthalte, als der, bis zur Veröffentlichung der zuletzt citirten Abhandlung bekannt gewordene Satz der Aequivalenz der Verwandlungen für Kreisprocesse des Herrn Clausius. Ich habe dann weiter nachgewiesen, dass in dem Falle des Ueberströmens von Gasen oder Dämpfen aus einem Raume in einen anderen, wo ein geringerer Druck herrscht, speciell in dem Falle des Einströmens des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder einer Dampfmaschine, mein Werth für jenes Integral, ausgedehnt auf den Kreisprocess, welcher durch Ergänzung jenes Vorgangs erhalten wird, Null ist; dass dieser Vorgang somit in meinem Sinne „umkehrbar“ sei, während Herr Clausius in seiner Theorie der Dampfmaschinen einen endlichen Werth dafür findet, indem er den behandelten Vorgang als „nicht umkehrbar“ betrachtet. Ich habe dann ferner gezeigt, dass Herr Clausius deshalb einen Werth für das in Rede stehende Integral findet, weil er bei seiner Entwickelung die Wärme unberücksichtigt lässt, welche aus der lebendigen Potenz entsteht, die dem einströmenden Dampfe von dem sich ausdehnenden, im Kessel zurückbleibenden ertheilt wird. Und da der Clausius-sche Werth des $\int\frac{dQ}{T}$ gerade dieser Wärme der Grösse nach entspricht, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt ist, so geben beide zusammen Null; es ist also auch im Clausius'schen Sinn der Process ein „umkehrbarer“. Gegen die letzteren Ausführungen wendet sich nun Herr Clausius in seiner neuesten Kundgebung („Ueber umkehrbare und nicht umkehrbare Vorgänge“ etc., d. Zeitschr. Bd. XI, S. 455), indem er zunächst nochmals eine Erklärung von nicht umkehrbaren Vorgängen giebt, wieder-

holt Beispiele von solchen anführt, und endlich auf den Fall des Ueberströmens eines Gases aus einem Raume in einen anderen, wo ein geringerer Druck herrscht, speciell in einen luftleeren, näher eingeht. Ich habe diesen Fall in meiner ersten Abhandlung über mechanische Wärmetheorie („Theorie des Ausströmens vollkommener Gase" etc., s. d. Zeitschr. Bd. VIII, S. 81) ausführlich behandelt und zwar lediglich durch Anwendung von Formeln für umkehrbare Processe, und ich bin dabei auf Resultate gekommen, die durch ältere Versuche bestätigt sind und meines Wissens bisher noch nicht, auch von Herrn Clausius nicht, angefochten wurden. Es besteht auch durchaus gar kein principieller Unterschied zwischen dem Fall, wo ein sich ausdehnendes Gas stets einen seiner Spannkraft gleichen Widerstand zu überwinden hat, und zwischen dem, wo dieser Widerstand kleiner oder gar Null ist. Stets leistet das Gas die aus seiner Abspannung folgende Arbeit und verliert deshalb (ein vollkommenes Gas vorausgesetzt) zunächst eine, dieser Arbeit äquivalente Wärmemenge.

In dem ersten Falle wird diese Arbeit gänzlich zur Ueberwindung eines äusseren Widerstandes, etwa zur Zusammendrückung einer Feder verbraucht, in den letzteren Fällen wird sie theilweise oder ganz zur Ueberwindung der Trägheit der Gastheilchen, also zur Erzeugung von lebendiger Potenz in denselben verwendet. Diese lebendige Potenz setzt sich freilich zum Theil schon während des Vorgangs und dann schliesslich ganz in Wärme um, aber dies kann, wie ich in meiner oben citirten Abhandlung gezeigt habe, als ein gesonderter Akt betrachtet werden, der ungefähr gleichbedeutend ist mit dem, wo dem Hahn im ersteren Falle von aussen Wärme zugeführt wird. Es ist doch gewiss denkbar, dass jene lebendige Potenz, anstatt sofort in Wärme umgewandelt zu werden, in Form von Arbeit (etwa gleichfalls zur Zusammendrückung einer Feder verwendet) aufgesammelt werde, und dann verschwindet jeder principielle Unterschied zwischen beiden Fällen. Diese ist die einzig richtige, dem heutigen Standpunkte der Mechanik entsprechende Betrachtungsweise des Vorgangs; jede andere läuft Gefahr, die nun hoffentlich ganz abgethane „Theorie der Stosskräfte" wieder zu Hülfe nehmen zu müssen.

Indem dann Herr Clausius speciell auf den Fall des Ueberströmens des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder einer Dampfmaschine übergeht, behauptet er, dass die aus den Strömungsbewegungen des übergeströmten Dampfes entstandene Wärme inneren Ursprungs und deshalb bei der Bildung des Integrals $\int \frac{dQ}{T}$ nicht mitzurechnen sei, und er sucht dies durch Anwendung des einfachen Falls, wo sich ein Gas aus einem Raum A in einen anderen luftleeren B stürzt, auf jenen näher zu erläutern. Aber er vergisst dabei, dass er dort, bei der Dampfmaschine, immer nur die übergeströmte Dampfmasse in Rechnung bringt, in dem angezogenen Beispiel aber die ganze, vorher im Raume A und dann im Raume

$A + B$ enthaltene Luftmasse, welche zugleich gearbeitet und diese Arbeit in Gestalt von Wärme wieder aufgenommen hat. In diesem letzteren Falle ist allerdings der Ursprung der in Rede stehenden Wärme ein innerer, aber in jenem kann es ja gar keinem Zweifel unterliegen, dass die übergeströmte Dampfmasse von der sich ausdehnenden im Kessel Arbeit aufnimmt in Gestalt von lebendiger Potenz, die sich dann in Wärme umsetzt und dass somit diese Wärme der übergeströmten Dampfmasse von aussen zukommt. Ebenso ist es doch ganz zweifellos, dass die im Verfolg des Kreisprocesses in den Kessel zurückgepresste Wassermasse nicht blos Arbeit aufnimmt, sondern auch den Widerstand des sich diesem Hineinpressen in den Kessel widersetzenden Kesseldampfes überwindet, also Arbeit nach aussen abgiebt, wie es auch ebenso klar ist, dass diese Wassermasse die Wärme, welche sie im Kessel bei ihrer Verwandlung in Dampf aufnimmt, von aussen, hier sogar vom Feuerheerde her, zugeführt erhält.

Schliesslich will ich noch hervorheben, dass Herr Clausius die Richtigkeit des allgemeinen Werthes für das Integral $\int \frac{dQ}{T}$, den ich (Formel 25, S. 117 meiner Abhandlung: „Entwickelung eines Satzes" etc. d. Zeitschr. Bd. X) mittheilte, nicht nur nicht bestritten, sondern denselben in seiner späteren Abhandlung („Ueber die Bestimmung der Energie und Entropie eines Körpers", s. d. Zeitschr. Bd. XI, S. 45) sogar selbst zum Theil wieder abgeleitet hat. Bei Anwendung dieser Formel hat man auf die Vorgänge während eines Processes, seien dies innere oder äussere, gar keine Rücksicht zu nehmen, sondern lediglich auf den Anfangs- und Endzustand des betrachteten Körpers. Nun, diese Formel giebt, wie ich am Schlusse meiner Abhandlung über das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ (d. Zeitschr. Bd. XI, S. 161) gezeigt habe, für den in Rede stehenden Process den Werth Null und muss ihn geben, da sie eben nur dann einen von Null verschiedenen Werth annimmt, wenn die Zustandsgleichungen des Körpers im Verlauf des Processes ihre Form ändern.

Ich halte damit diese im Grunde sehr einfache Sache für abgethan, und zwar um so lieber, als ich nach einigen Stellen in der letzten Antwort des Herrn Clausius befürchten muss, dass von seiner Seite die Discussion nicht in der Weise fortgeführt werden dürfte, wie es einem wissenschaftlichen Streite angemessen ist.

München, den 12. November 1866.

J. Bauschinger,
Professor am K. Realgymnasium in München.

XI. Ueber die Curve, welche aus einem Ringe mit kreisförmigem Querschnitte durch eine Doppeltangentialebene ausgeschnitten wird. Ein bereits seit längerer Zeit bekannter Satz besagt, dass die Oberfläche, welche durch Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, nicht durch den Mittelpunkt gehende Axe entsteht, durch eine Doppeltangentialebene in zwei Kreisen geschnitten wird. Der folgende einfache Beweis dieses bemerkenswerthen Satzes, sowie eine Verallgemeinerung desselben dürften vielleicht nicht ohne Interesse sein.

Aus der Entstehungsweise der Ringfläche geht hervor, dass der imaginäre unendlich ferne Kreis, in welchem sich alle Kugeln schneiden, eine Doppellinie derselben ist. Wird daher die Fläche durch irgend eine Ebene geschnitten, so hat die Schnittcurve die beiden in dieser Ebene liegenden imaginären unendlich fernen Kreispunkte zu Doppelpunkten. Ferner ist bekannt, dass die Curve, welche aus einer Oberfläche durch eine Doppeltangentialebene ausgeschnitten wird, die beiden Berührungspunkte zu Doppelpunkten hat. Daher besitzt die Durchschnittslinie der Kreisringfläche mit einer doppelt berührenden Ebene, also eine Curve vierten Grades, vier Doppelpunkte und unter diesen die imaginären unendlich fernen Kreispunkte. Eine wirkliche Curve vierten Grades kann aber aus bekannten Gründen höchstens drei Doppelpunkte besitzen; es muss daher jene Curve in zwei andere von niedrigerem Grade zerfallen und zwar in zwei Curven zweiten Grades, welche durch jene vier mehrerwähnten Punkte gehen. Diese müssen Kreise sein, da durch die imaginären unendlich fernen Kreispunkte keine anderen Curven zweiten Grades gehen.

Der hier erwiesene Satz ist nur ein specieller Fall eines allgemeineren, welcher auf ganz dieselbe Art bewiesen wird, und lautet:

> „Die Curve, welche aus einer durch Umdrehung eines Kegelschnittes um eine in seiner Ebene liegende Axe erzeugten Fläche durch eine Doppeltangentialebene ausgeschnitten wird, zerfällt in zwei Kegelschnitte."

Man erkennt hieraus, dass ausser den Meridiancurven auf der so erzeugten Oberfläche noch unendlich viele Kegelschnitte liegen, durch deren Umdrehung um jene Axe man die Fläche ebenfalls entstehen lassen kann. Durch Umdrehung einer Curve m^{ten} Grades mit δ Doppelpunkten und k Spitzen um eine in ihrer Ebene liegende Axe wird im Allgemeinen eine Fläche $2m^{\text{ten}}$ Grades erzeugt. Die aus derselben durch irgend eine nicht berührende Ebene ausgeschnittene Curve hat $m(m-1)+2\delta$ Doppelpunkte und $2k$ Spitzen. Ist die Ebene eine Tangentialebene, so wird die Anzahl der Doppelpunkte um 1, ist sie eine Doppeltangentialebene, um 2 vermehrt.

Der Grad der Umdrehungsfläche vermindert sich auf m, wenn die Dreh-axe eine Symmetrieaxe der Meridiancurve ist.

Chemnitz. F. E. Eckardt.

Druckfehler im XI. Jahrgang:

Pag. 65, Zeile 17 v. o. statt: $a_2 b_1 - a_1 b_2$ lese man: $a_1 b_2 - a_2 b_1$.
69, - 1 v. o. - $F_1^2 \Delta - F_2^2 \Delta_2$ - - $F_1^2 \Delta_2 - F_2^2 \Delta_1$.
163, - 7 v. u. }
- 163, - 8 v. u. } fehlt $= 0$.
- 163, - 9 v. u. }
- 163, - 10 v. u. }
- 356, - 10 v. u. statt: $\frac{\nu}{\delta}$ lese man: $\frac{\delta}{\nu}$.
- 356, - 3 v. u. - $\frac{A}{k} + \frac{B}{\lambda} + \frac{C}{\mu} + \frac{D}{\nu}$ lese man: $\frac{A}{k^m} + \frac{B}{\lambda^m} + \frac{C}{\mu^m} + \frac{D}{\nu^m}$.
- 360, - 10 v. o. - *S* lese man: § (Paragraph).

Druckfehler im 1. Hefte des XII. Jahrgangs:

Pag. 89, Zeile 13 v. o. statt: Gerade lese man: Geraden.
- 90, - 19 v. o. - $\begin{vmatrix} 1 & k_l \\ 1 & k_k \end{vmatrix}$ lese man: $\begin{vmatrix} 1 & x_l \\ 1 & x_k \end{vmatrix}$
und in der dritten Zeile der dritten Determinante kommen statt den Indices i die Indices l.

Pag. 90, Zeile 20 v. u. statt: dem lese man: den.
- 90, - 17 v. u. - Berechnungen lese man: Bezeichnungen.
- 91, - 1 v. o. - derjenigen lese man: denjenigen.
- 91, - 7 v. o. - $\cos \alpha_1$ lese man: $\cos \alpha_4$.
91, - 2 v. u. - das lese man: des.
- 92, - 9 v. o. - Anwendungen lese man: Anwendung.
- 92, in der vierten Zeile der vorletzten Determinante ist α mit β zu vertauschen.
- 92, Zeile 1 v. u. statt: λ lese man: γ.
- 93, - 12 v. u. - $\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_2} + \frac{1}{\sin h_3}$ lese man:
$\frac{1}{\sin h_1} - \frac{1}{\sin h_2} + \frac{1}{\sin h_3}$.
- 93, - 11 v. u. $\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_2} + \frac{1}{\sin h_3}$ lese man:
$\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_2} - \frac{1}{\sin h_3}$.
- 93, - 7 v. u. ist am Anfang der Zeile „als“ weggeblieben.
- 93, - 2 v. u. statt: Vergleichuug lese man: Vergleichung.
- 94, - 21 v. o. sind die beiden Determinanten beziehungsweise $= \Delta_1$, und $= \Delta_2$ zu setzen.
- 94, - 2 v. u. statt: $\cos \alpha$ lese man: $\cos a$.

VI.

Geometrische Deutung der Kettenbrüche.

Von

JOHANN LIEBLEIN,

ausserordentlicher Professor am Polytechnikum zu Prag.

Der Gedanke, die Eigenschaften der Näherungsbrüche von Kettenbrüchen durch geometrische Constructionen abzuleiten, ist zwar nicht neu — ich erinnere nur an Sylvester und Betti, von welch Letzterem ein geometrischer Beweis des bekannten Lagrange'schen Theorems in Novi's *Algebra superiore* zu finden ist —; gleichwohl ist mir nicht bekannt, dass die geometrische Deutung eines Kettenbruches von allgemeinster Form bereits geliefert worden wäre. Da dieser Gegenstand immerhin einiges Interesse zu bieten vermag, so erlaube ich mir, denselben in Folgendem kurz zu erörtern.

Bezeichnet man die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \dots + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}}$$

der Reihe nach mit

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},$$

so ist bekanntlich

$$p_1 = b_1, \quad p_2 = a_2 b_1,$$
$$q_1 = a_1, \quad q_2 = a_2 a_1 + b_2,$$

und die Werthe aller folgenden p und q ergeben sich aus den recurrirenden Formeln

$$p_r = a_r\, p_{r-1} + b_r\, p_{r-2} \text{ und } q_r = a_r\, q_{r-1} + b_r\, q_{r-2}.$$

Umgekehrt kann man aber auch für gegebene Werthe der Näherungsbrüche die Glieder des Kettenbruches berechnen, denn die vorhergehenden Gleichungen liefern:

$$b_1 = p_1, \quad b_2 = \frac{p_1\, q_2 - q_1\, p_2}{p_1},$$

$$a_1 = q_1, \quad a_2 = \frac{p_2}{p_1},$$

und allgemein:

$$b_r = \frac{p_{r-1}\, q_r - q_{r-1}\, p_r}{p_{r-1}\, q_{r-2} - q_{r-1}\, p_{r-2}}, \quad a_r = \frac{p_r\, q_{r-2} - q_r\, p_{r-2}}{p_{r-1}\, q_{r-2} - q_{r-1}\, p_{r-2}}$$

für alle Index, welche gleich oder grösser sind, als 3.

Demnach wird der Kettenbruch, welcher der Reihe nach die Näherungsbrüche $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ besitzt — wenn man abkürzungsweise die Determinante $p_s\, q_t - q_s p_t$ durch $(p_s q_t)$ bezeichnet, — lauten:

$$1)\quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{(p_1 q_2) : p_1}{\cfrac{p_2}{q_1} + \cfrac{(p_2 q_3) : (p_2 q_1)}{(p_3 q_1) : (p_2 q_1) + \cdots + \cfrac{(p_{n-2} q_{n-1}) : (p_{n-2} q_{n-3})}{(p_{n-1} q_{n-3}) : (p_{n-2} q_{n-3})}}}}.$$

Aus 1) findet man nach einfacher Rechnung

$$2)\quad \frac{(p_{n-1} q_2) : (p_2 q_1)}{(p_1 q_{n-1}) : (p_2 q_1)} = \cfrac{(p_2 q_3) : (p_2 q_1)}{(p_3 q_1) : (p_2 q_1) + \cfrac{(p_3 q_4) : (p_3 q_2)}{(p_4 q_2) : (p_3 q_2) + \cdots + \cfrac{(p_{n-2} q_{n-1}) : (p_{n-2} q_{n-3})}{(p_{n-1} q_{n-3}) : (p_{n-2} q_{n-3})}}},$$

und in diesem Kettenbruche sind, was in 1) nicht der Fall ist, sämmtliche Glieder nach einem übereinstimmenden Gesetze gebildet.

Man lasse nun die q und p rechtwinkelige Coordinaten von Punkten der Ebene bedeuten, dann ist bekanntlich $(p_r q_s)$ der Ausdruck für die doppelte Fläche eines durch den Ursprung O und die beiden Punkte M_s und M_r bestimmten Dreiecks, wenn man diese Fläche positiv oder negativ nimmt, je nachdem die durch die Aufeinanderfolge der Punkte O, M_s, M_r bestimmte Drehung mit jener, durch welche positive Winkel erzeugt werden, übereinstimmt oder entgegengesetzten Sinnes ist. Demgemäss kann man 2) auch schreiben:

$$3)\quad \frac{OM_2 M_{n-1} : OM_1 M_2}{OM_{n-1} M_1 : OM_1 M_2} = \frac{OM_2 M_{n-1}}{OM_{n-1} M_1} = \cfrac{OM_3 M_2 : OM_1 M_2}{OM_1 M_3 : OM_1 M_2 + \cfrac{OM_4 M_3 : OM_2 M_3}{OM_2 M_4 : OM_2 M_3 + \cdots + \cfrac{OM_{n-1} M_{n-2} : OM_{n-3} M_{n-2}}{OM_{n-3} M_{n-1} : OM_{n-3} M_{n-2}}}}$$

und hat so eine Relation gewonnen, aus welcher ohne Mühe mehrere — übrigens bereits bekannte — Sätze der neueren Geometrie gefolgert werden können.

Der rechte Theil in 3) enthält $2n-5$ von einander unabhängige Inhalte jener Dreiecke, welche entstehen, wenn man in einem Systeme von n Punkten einer Ebene je zwei der Punkte mit einander geradlinig verbindet. Diese $2n-5$ Flächen als gegeben angenommen, findet man, n nach und nach $= 5, 6, \ldots n$ setzend, aus der obigen Relation die Inhalte

von weiteren $2n-9$ Dreiecken, und kann nun aus 3) durch zweckmässige Vertauschung der Punkte die Flächen aller noch übrigen Dreiecke des Systemes ableiten, welche wie die bereits vorhandenen, den Scheitel O gemeinschaftlich besitzen.

So würde man beispielsweise für ein System von 8 Punkten aus 11 gegebenen Dreiecken zunächst 7 Dreiecke aus 3) finden, und hätte, um die noch fehlenden Dreiecke OM_3M_6, $OM_3M_7OM_4M_7$ zu erhalten, in der genannten Gleichung nur M_1 und M_2 mit M_3 und M_4 zu vertauschen.

Da aber bekanntlich die Fläche eines beliebigen, den Scheitel O nicht enthaltenden Dreiecks durch die Inhalte von Dreiecken mit dem Scheitel O ausgedrückt werden kann, so folgt aus dem Vorhergehenden der Satz:

„Wenn man bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene je zwei derselben durch Gerade verbindet und von den so entstehenden Dreiecken irgend $2n-5$ von einander unabhängige ihrem Inhalte nach als gegeben annimmt, so kann man daraus den Inhalt jedes der übrigen finden."

Der specielle Fall $n=5$ verdient besonders hervorgehoben zu werden; denn man findet für denselben

$$4)\quad OM_1M_2\,.\,OM_2M_4=OM_1M_4\,.\,OM_2M_3+OM_1M_2\,.\,OM_3M_4,$$

eine Gleichung, welche Möbius in seinem barycentrischen Calcul abgeleitet hat. Der entsprechende geometrische Satz wurde übrigens bereits 1809 von Monge aufgestellt, und die entsprechende Determinantenrelation — ein specieller Fall eines von Abel bekannt gemachten Theorems — schon 1764 von Fontaine angegeben.

Möbius bemerkt, dass mittelst der Gleichung 4) allein alle Aufgaben, wo bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene aus den Inhalten von $2n-5$ Dreiecken (allgemeiner Figuren) eine $(2n-4)^{te}$ gefunden werden soll, ohne Weiteres gelöst werden können. Auch dies zeigt der Kettenbruch 3), wenn man sich zur Bestimmung der Zähler und Nenner seiner Näherungsbrüche des recurrirenden Verfahrens bedient. So z. B. findet man zur Berechnung der Dreiecksfläche OM_rM_2 die Relation

$$\frac{OM_rM_2}{OM_1M_2}=\frac{OM_{r-2}M_r}{OM_{r-2}M_{r-1}}\cdot\frac{OM_{r-1}M_2}{OM_1M_2}+\frac{OM_rM_{r-1}}{OM_{r-2}M_{r-1}}\cdot\frac{OM_{r-2}M_2}{OM_1M_2},$$

aus welcher

$$OM_2M_{r-1}\,.\,OM_{r-2}M_r=OM_2M_{r-2}\,.\,OM_{r-1}M_r+OM_2M_r\,.\,OM_{r-2}M_{r-3},$$

d. h. die Gleichung 4) angewendet auf das System der Punkte O, M_2, M_{r-2}, M_{r-1}, M_r folgt.

Aus 3) folgt sogleich ein zweiter Satz, wenn man statt der Dreiecksflächen die $2n-6$ Verhältnisse derselben, welche der Kettenbruch enthält, als gegeben annimmt. Es lassen sich nämlich sodann mittelst der Gleichung 3) alle noch übrigen Verhältnisse zwischen den Flächen der Drei-

ecke, welche die Spitze O gemeinschaftlich haben, ermitteln. Da nun das Verhältniss zwischen den Flächen zweier beliebiger Dreiecke des Systems immer durch Verhältnisse zwischen Dreiecken mit dem Scheitel O ausgedrückt werden kann, so hat man den Satz:

„Sind bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene von den gegenseitigen Verhältnissen zwischen den Flächen der Dreiecke, welche durch geradlinige Verbindung je zweier Punkte des Systems entstehen, irgend $2n-6$ von einander unabhängige gegeben, so kann man daraus alle übrigen Verhältnisse dieser Art finden."

Je zwei der Dreiecke, welche in der wiederholt erwähnten Relation 3) zu einem Verhältnisse verbunden sind, besitzen eine gemeinschaftliche Basis; daher ist das Verhältniss ihrer Flächen jenem Verhältnisse gleich, nach welchem die die Scheitel verbindende Strecke von der Basis getheilt wird — vorausgesetzt, dass man auch die Strecken in der allgemeineren von Möbius angegebenen Weise auffasst. Bezeichnet also $D_{(0s)}^{(rt)}$ den Durchschnittspunkt der Geraden OM_s mit $M_r M_t$, so ist allgemein

$$\frac{OM_r M_s}{OM_s M_t} = \frac{M_r D_{(0s)}^{(rt)}}{D_{(0s)}^{(rt)} M_t},$$

und die Gleichung 3) übergeht in

$$5)\quad \frac{M_{n-1} D_{(02)}^{(1\,n-1)} : M_1 D_{(02)}^{(1\,n-1)}}{D_{(01)}^{(2\,n-1)} M_{n-1} : D_{(01)}^{(2\,n-1)} M_2} = \frac{D_{(0\,n-1)}^{(12)} M_2}{M_1 D_{(0\,n-1)}^{(12)}} =$$

$$= \cfrac{M_3 D_{(02)}^{(13)} : M_1 D_{(02)}^{(13)}}{D_{(01)}^{(23)} M_3 : D_{(01)}^{(23)} M_2 + \cfrac{M_4 D_{(03)}^{(24)} : M_2 D_{(03)}^{(24)}}{D_{(02)}^{(34)} M_4 : D_{(02)}^{(34)} M_3 + \ldots \cfrac{M_{n-1} D_{(0\,n-2)}^{(n-3,\,n-1)} : M_{n-3} D_{(0\,n-2)}^{(n-3,\,n-1)}}{D_{(0\,n-3)}^{(n-2,\,n-1)} M_{n-1} : D_{(0\,n-3)}^{(n-2,\,n-1)} M_{n-2}}}}.$$

Aus dieser Formel erhält man für $n=4$ und $n=5$ die beiden bemerkenswerthen Gleichungen

$$6)\quad \frac{M_1 D_{(03)}^{(12)}}{D_{(03)}^{(12)} M_2} \cdot \frac{M_2 D_{(01)}^{(23)}}{D_{(01)}^{(23)} M_3} \cdot \frac{M_3 D_{(02)}^{(13)}}{D_{(02)}^{(13)} M_1} = 1 \text{ und}$$

$$7)\quad \frac{M_1 D_{(02)}^{(13)}}{D_{(02)}^{(13)} M_3} \cdot \frac{M_3 D_{(02)}^{(34)}}{D_{(02)}^{(34)} M_4} \cdot \frac{M_4 D_{(02)}^{(14)}}{D_{(02)}^{(14)} M_1} = -1,$$

von welchen die erstere eine bekannte Beziehung zwischen den Verhältnissen ausdrückt, nach welchen die Seiten eines Dreiecks von den die Ecken mit einem beliebigen vierten Punkt der Ebene verbindenden Geraden geschnitten werden,

während die letztere eine ebenfalls bekannte **Eigenschaft jener Verhältnisse liefert, nach welchen die Seiten des Dreiecks von einer beliebigen Transversale getheilt werden.**

Es seien nun in dem vollständigen Vierecke $OM_1 M_2 M_3$ die beiden von einander unabhängigen Verhältnisse $\frac{M_3 D_{(02)}^{(13)}}{D_{(02)}^{(13)} M_1}$ und $\frac{M_3 D_{(01)}^{(23)}}{D_{(01)}^{(23)} M_2}$ gegeben. Aus der Gleichung 6) findet man zunächst das dritte Verhältniss $\frac{M_2 D_{(03)}^{(12)}}{D_{(03)}^{(12)} M_1}$, und indem man 7) auf das Dreieck $M_1 M_2 D_{(01)}^{(23)}$ mit $O D_{(03)}^{(12)}$ als Transversale anwendet, erhält man ferner $\frac{M_1 O}{O D_{(01)}^{(23)}}$. Um noch die zwei letzten unbekannten Verhältnisse $\frac{M_2 O}{O D_{(02)}^{(13)}}$ und $\frac{M_3 O}{O D_{(03)}^{(12)}}$ zu finden, hat man dieselbe Beziehung 7) auf die Dreiecke $M_2 M_3 D_{(02)}^{(13)}$ und $M_2 M_3 D_{(03)}^{(12)}$ mit der Schneidenden $O D_{(01)}^{(23)}$ anzuwenden. Es sind also in einem vollständigen Vierecke alle Verhältnisse, nach welchen sich die Seiten gegenseitig durchschneiden, bestimmt, sobald von denselben zwei von einander unabhängige gegeben sind.

Man betrachte nun das vollständige Fünfeck $OM_1 M_2 M_3 M_4$ und setze in demselben die vier von einander unabhängigen Verhältnisse $\frac{M_3 D_{(02)}^{(13)}}{D_{(02)}^{(13)} M_1}$, $\frac{M_3 D_{(01)}^{(23)}}{D_{(01)}^{(23)} M_2}$, $\frac{M_4 D_{(03)}^{(24)}}{D_{(03)}^{(24)} M_2}$, $\frac{M_4 D_{(02)}^{(34)}}{D_{(02)}^{(34)} M_3}$ als bekannt voraus. Die Relation 5) liefert ($n=5$ gesetzt) sofort zwei weitere Verhältnisse $\frac{M_4 D_{(02)}^{(14)}}{M_1 D_{(02)}^{(14)}}$ und $\frac{D_{(01)}^{(24)} M_4}{D_{(01)}^{(24)} M_2}$, und diese sechs reichen nach dem Vorhergehenden hin, um alle weiteren Verhältnisse berechnen zu können, welche sich auf die Vierecke $OM_1 M_2 M_3$, $OM_2 M_3 M_4$ und $OM_1 M_2 M_4$ beziehen. Aus der Gleichung 5) lassen sich ferner 4 neue Verhältnisse $\frac{M_4 D_{(03)}^{(14)}}{M_1 D_{(03)}^{(14)}}$, $\frac{D_{(01)}^{(34)} M_4}{D_{(01)}^{(34)} M_3}$, $\frac{M_4 D_{(13)}^{(24)}}{M_2 D_{(13)}^{(24)}}$ und $\frac{D_{(12)}^{(34)} M_4}{D_{(12)}^{(34)} M_3}$ ableiten, wenn man in derselben einmal die Stellenzeiger 2 und 3, ein zweites Mal O und M_1 mit einander vertauscht. Durch das erste Paar dieser Verhältnisse sind alle Verhältnisse, welche sich auf das Viereck $OM_1 M_3 M_4$ beziehen und durch das zweite Paar alle auf $M_1 M_2 M_3 M_4$ bezügliche Verhältnisse bestimmt. Also reichen 4 von einander unabhängige Verhältnisse hin, um alle übrigen zu finden, nach welchen sich die Seiten eines vollständigen Fünfecks gegenseitig theilen. Und allgemein:

„**Wenn in einem vollständigen n-Ecke von den Verhältnissen, nach welchen je eine Seite von den jedes Mal übrigen geschnitten wird, $2n-6$ von einander unabhängige gegeben sind, so können hieraus alle Verhältnisse zwischen den Abschnitten einer jeden Geraden des Systems gefunden werden.**“

Die Gleichung 5) führt noch zu einem zweiten Satze, wenn man die einfachen Verhältnisse in Doppelverhältnisse für Strahlenbüschel verwandelt. Zu diesem Zwecke ziehe man zu allen Geraden, welche durch Verbindung von je zwei der $n-1$ Punkte $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ entstehen, parallele Strahlen durch O; dann ist das Doppelverhältniss zwischen vier Strahlen wie OM_r, OM_t, OM_s und OM_{rt} (Parallelstrahl zu $M_r M_t$) dem Doppelverhältnisse $\frac{M_r D_{(os)}^{(rt)}}{D_{(os)}^{(rt)} M_t} : \frac{M_r \infty}{\infty M_t}$ und dieses dem einfachen Verhältnisse $\frac{M_r D_{(os)}^{(rt)}}{M_t D_{(os)}^{(rt)}}$ gleich. Bezeichnet man das Doppelverhältniss des obigen Strahlenbüschels kurz durch $0\{r, t, s, \overline{rt}\}$, so kann 5) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$8) \quad \frac{0\{n-1,\ 1,\ 2\ \overline{n-1, 1}\}}{0\{n-1,\ 2,\ 1\ \overline{n-1, 2}\}} = -0\{2\ 1\ n-1\ \overline{21}\} =$$

$$= \cfrac{0\{3\ 1\ 2\ \overline{31}\}}{0\{3\ 2\ 1\ \overline{32}\} + \cfrac{0\{4\ 2\ 3\ \overline{42}\}}{0\{4\ 3\ 2\ \overline{43}\} + \cdots + \cfrac{0\{n-1\ \ n-3\ \ n-2\ \ \overline{n-1\ n-3}\}}{0\{n-1\ \ n-2\ \ n-3\ \ \overline{n-1\ n-2}\}}}}$$

und liefert nun den Satz:

„**Wenn von den möglichen Doppelverhältnissen eines Büschels, dessen Strahlen den Seiten eines vollständigen n-Eckes parallel sind, $2n-6$ von einander unabhängige gegeben sind, so sind hierdurch alle übrigen Doppelverhältnisse bestimmt.**“

So reichen beispielsweise für das durch das System der vier Punkte bestimmte Büschel die beiden Doppelverhältnisse $0\{3\ 1\ 2\ \overline{31}\}$ und $0\{3\ 2\ 1\ \overline{32}\}$ hin, alle übrigen zu bestimmen. Denn aus der Gleichung 8), welche sich in diesem Falle vereinfacht in

$$9) \quad -0\{2\ 1\ 3\ \overline{21}\} = \frac{0\{3\ 1\ 2\ \overline{31}\}}{0\{3\ 2\ 1\ \overline{32}\}},$$

erhält man zunächst das dritte Doppelverhältniss $0\{2\ 1\ 3\ \overline{21}\}$, und kann nun

aus diesen drei Doppelverhältnissen die noch übrigen zwölf unbekannten durch Elimination gemeinschaftlicher Elemente ableiten.

Die Gleichung 9) kann geschrieben werden:

$$0\,\{1\;3\;\overline{31}\;\overline{32}\} = 0\,\{\overline{32}\;\overline{21}\;2\;1\},$$

oder auch

$$\frac{\sin 1\,\widehat{\overline{21}}}{\sin \overline{21}\,\widehat{2}} \cdot \frac{\sin 2\,\widehat{\overline{32}}}{\sin \overline{32}\;3} \cdot \frac{\sin 3\,\widehat{\overline{31}}}{\sin \overline{31}\,\widehat{1}} = -1$$

und liefert demnach folgenden Satz:

„Sechs Strahlen, deren drei einen beliebigen Punkt der Ebene mit den Ecken eines Dreiecks verbinden, während die drei übrigen parallel laufen zu den Seiten dieses Dreiecks, bilden ein involutorisches Strahlenbüschel."

Ebenso leicht überzeugt man sich, dass für ein durch ein vollständiges Fünfeck bestimmtes Büschel die Annahme von vier von einander unabhängigen Doppelverhältnissen zur Bestimmung aller übrigen hinreicht. Denn sind die Doppelverhältnisse $0\{3\,1\,2\,\overline{31}\}$, $0\,\{3\,2\,1\,\overline{32}\}$, $0\,\{4\,2\,3\,\overline{42}\}$ und $0\,\{4\;3\;2\,\overline{43}\}$ gegeben, so findet man aus der Gleichung 8) zunächst $0\,\{4\,1\,2\,\overline{41}\}$ und $0\,\{4\,2\,1\,\overline{42}\}$ und — indem man 2 und 1 mit einander vertauscht — ferner $0\,\{4\,1\,3\,\overline{41}\}$ und $0\,\{4\;3\;1\,\overline{43}\}$ und durch Vertauschung der Punkte O und M_1 endlich

$$M_1\,\{4\,2\,3\,\overline{42}\} = 0\,\{\overline{14}\;\overline{12}\;\overline{13}\;\overline{42}\} \text{ und } M_1\,\{4\,3\,2\,\overline{43}\} = 0\,\{\overline{14}\;\overline{13}\;\overline{12}\;\overline{43}\}.$$

Durch das erste Paar dieser Doppelverhältnisse ist das Strahlenbüschel des Vierecks $O M_1 M_2 M_3$ vollständig bestimmt; ebenso bestimmen die vier folgenden Paare die Büschel der Vierecke $O M_2 M_3 M_4$, $O M_1 M_2 M_4$, $O M_1 M_3 M_4$ und $M_1 M_2 M_3 M_4$, und folglich ist das Büschel des Fünfecks $O M_1 M_2 M_3 M_4$ selbst bestimmt.

Der Kettenbruch 3) ist noch einer bemerkenswerthen Umgestaltung fähig. Bringt man ihn nämlich auf die Form

$$\cfrac{a_1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \cdots \cfrac{}{1 + a_{n-3}}}},$$

so besitzen die Grössen a_1, a_2, .. a_{n-3}, wie man leicht findet, folgende Werthe:

$$a_1 = \frac{O M_3 M_2}{O M_1 M_3}, \quad a_2 = \frac{O M_4 M_3}{O M_2 M_4} \cdot \frac{O M_1 M_2}{O M_1 M_3} = -\left(M_3 M_2 D^{(23)}_{(04)}\; D^{(23)}_{(01)}\right)$$

und allgemein:

$$a_r = \frac{O M_{r+2} M_{r+1}}{O M_r M_{r+2}} \cdot \frac{O M_{r-1} M_r}{O M_{r-1} M_{r+1}} = -\left(M_{r+1} M_r D^{(r\;r+1)}_{(0\;r+2)}\; D^{(r\;r+1)}_{(0\;r-1)}\right).$$

Schafft man a_1 in den linken Theil und drückt sodann

$$\frac{OM_{n-1}M_2}{OM_1M_{n-1}} \cdot \frac{OM_1M_3}{OM_3M_2} = \cfrac{1}{\cfrac{OM_1M_{n-1}}{OM_{n-1}M_2} : \cfrac{OM_1M_3}{OM_3M_2}}$$

ebenfalls durch ein Doppelverhältniss aus, so erhält man folgende neue Relation:

$$10)\quad \left(M_1 M_2 D^{(12)}_{(0\,n-1)} D^{(12)}_{(03)}\right) = 1 - \cfrac{\left(M_3 M_2 D^{(23)}_{(04)} D^{(23)}_{(01)}\right)}{1 - \cfrac{\left(M_4 M_3 D^{(34)}_{(05)} D^{(34)}_{(02)}\right)}{1 - \cdot \cdot \cfrac{\vdots}{1 - \left(M_{n-2}, M_{n-3}, D^{(n-3\,n-2)}_{(0\,n-1)} D^{(n-3\,n-2)}_{(0\,n-4)}\right)}}},$$

aus welcher für $n=5$

$$\left(M_1 M_2 D^{12}_{04} D^{12}_{03}\right) = 1 - \left(M_3 M_2 D^{23}_{04} D^{23}_{01}\right) = \left(M_3 D^{13}_{04} M_2 D^{23}_{01}\right)$$

folgt, d. h.: Ein vierstrahliges Büschel schneidet jede Transversale nach demselben Doppelverhältnisse.

Die Doppelverhältnisse zwischen Punkten verwandle man in solche für Strahlen mit dem Mittelpunkte O; dann fallen zwei Strahlen wie OM_r und $OD^{(st)}_{(0r)}$ zusammen. Dieses $n-1$ strahlige Büschel schneide man durch eine Transversale und bezeichne mit M'_r den entsprechenden Punkt der beiden Punkte M_r und $D^{(st)}_{(0r)}$; die vorige Gleichung übergeht sodann in

$$11)\quad (M'_1 M'_2 M'_{n-1} M'_3) = 1 - \cfrac{(M'_3 M'_2 M'_4 M'_1)}{1 - \cfrac{(M'_4 M'_3 M'_5 M'_2)}{1 - \cdot \cdot \cfrac{\vdots}{1 - (M'_{n-2} M'_{n-3} M'_{n-1} M'_{n-4})}}}.$$

Im rechten Theile von 11) kommen $n-4$ von jenen Doppelverhältnissen vor, welche sich zwischen je vier der $n-1$ Punkte einer Geraden aufstellen lassen, und man überzeugt sich, wie in den vorhergehenden Fällen, leicht, dass dieselben hinreichen, um aus ihnen alle übrigen der noch möglichen Doppelverhältnisse ableiten zu können. Die Relation 11) auf n Punkte einer Geraden anwendend, erhält man also folgenden Satz: „Wenn bei einem Systeme von n Punkten in einer Geraden von den dadurch sich bildenden Doppelverhältnissen irgend $n-3$ von einander unabhängige gegeben sind, so lassen sich daraus alle übrigen finden.“

Die Gleichung 10) lässt sich noch in anderer Weise zur Gewinnung eines Satzes benutzen. Man bemerke zunächst, dass durch dieselbe die Aufgabe gelöst werden kann, sämmtliche Doppelverhältnisse zu finden, ach welchen die von einem beliebigen Eckpunkte — hier O — ausenden $n-1$ Seiten eines vollständigen n-Eckes alle übrigen Seiten der

Figur theilen, wenn von diesen Doppelverhältnissen $n-4$ von einander unabhängige gegeben sind. Man hat zu diesem Behufe nur die Stellenzeiger in 10) auf zweckmässige Weise unter einander zu vertauschen, um alle zur Berechnung der unbekannten Doppelverhältnisse nöthigen Relationen zu erhalten. So z. B. würden für das vollständige Sechseck die beiden Doppelverhältnisse $\left(M_3 M_2 D_{04}^{23} D_{01}^{23}\right)$ und $\left(M_4 M_3 D_{05}^{34} D_{02}^{34}\right)$ zur Ermittelung der vorerwähnten übrigen genügen. Man würde aus 10), n successive gleich 5 und gleich 6 setzend, sogleich die beiden Doppelverhältnisse $\left(M_1 M_2 D_{04}^{12} D_{03}^{12}\right)$ und $\left(M_1 M_2 D_{05}^{12} D_{03}^{12}\right)$ finden, und diese reichen nach dem letzten Satze hin zur Bestimmung aller Doppelverhältnisse, welche sich für die 5 Durchschnittspunkte der durch O gehenden Sechseckseiten mit $M_1 M_2$ bilden lassen. Durch Permutation der Stellenzeiger 3, 4 und 5 findet man ferner je zwei Doppelverhältnisse für die Seiten $M_2 M_4$ und $M_2 M_5$ und überdies $\left(M_5 M_4 D_{03}^{45} D_{02}^{45}\right)$, $\left(M_5 M_3 D_{04}^{35} D_{02}^{35}\right)$ und $\left(M_3 M_2 D_{05}^{23} D_{01}^{23}\right)$, welch letzteres im Vereine mit dem ursprünglich gegebenen Doppelverhältnisse $\left(M_3 M_2 D_{04}^{23} D_{01}^{23}\right)$ die Doppelverhältnisse in $M_2 M_3$ bestimmt. Wenn man in den durch die angegebene Permutation erhaltenen Gleichungen überdies die Index 1 und 2 mit einander vertauscht, so findet man Doppelverhältnisse, welche ausreichen zur Bestimmung jener für $M_1 M_4$, $M_1 M_5$, $M_3 M_4$, $M_3 M_5$ und $M_4 M_5$, und nebst dem noch $\left(M_3 M_1 D_{04}^{13} D_{02}^{13}\right)$. Endlich vertausche man in 10) M_2 und M_3 mit einander, setze $n=5$ und berechne $\left(M_1 M_3 D_{05}^{13} D_{02}^{13}\right)$, so sind auch die Doppelverhältnisse in der letzten noch unbekannten Seite $M_1 M_3$ bestimmt. Es mögen nun an die Stelle des Punktes O der Reihe nach die übrigen $n-1$ Eckpunkte des n-Eckes treten; aus der Gleichung 10) entstehen sodann $n-1$ neue Gleichungen, deren rechte Theile je $n-4$ unter einander unabhängige Doppelverhältnisse enthalten, welche bekannt sein müssen, um alle übrigen Doppelverhältnisse berechnen zu können, nach welchen jedes der $n-1$ Büschel die jeweilig übrigen n-Eckseiten theilen. Es scheint somit, als ob $n(n-4)$ Doppelverhältnisse gegeben sein müssten, um alle übrigen Doppelverhältnisse berechnen zu können, nach welchen die Seiten, welche je einen der Eckpunkte des vollständigen n-Eckes gemein haben, die jeweilig übrigen Seiten theilen; allein man überzeugt sich leicht, dass unter den $n(n-4)$ Doppelverhältnissen blos $2n-8$ von einander unabhängige sind, aus welchen die übrigen berechnet werden können. Denn es seien die $2(n-4)$ Doppelverhältnisse gegeben, welche in den rechten Theilen von 10) und jener Gleichung vorkommen, welche aus 10) durch die Vertauschung von O mit M_1 hervorgeht, so sind hierdurch alle Doppelverhältnisse bestimmt, welche in einer der beiden Formen $\left(M_r M_s D_{0t}^{rs} D_{0u}^{rs}\right)$ und $\left(M_r M_s D_{1t'}^{rs} D_{1u'}^{rs}\right)$ enthalten sind. Für $t=1$, $t'=0$ und $u=u'$ besitzen diese beiden Doppelverhältnisse drei gemeinschaftliche

Punkte; den dritten derselben eliminirend, findet man $\left(M_r M_s D^{rs}_{0u} D^{rs}_{1u}\right)$ $= \left(M_r M_s D^{rs}_{u0} D^{rs}_{u1}\right)$, d. h. ein Doppelverhältniss jener Gleichung, welche aus 10) durch Vertauschung von O mit M_u hervorgeht. Indem man den Stellenzeigern r und s $n-4$ zweckmässig gewählte Werthe beilegt und successive $u=2, 3, \ldots n-1$ setzt, erhält man alle Doppelverhältnisse, welche für die noch nicht benutzten $n-2$ Gleichungen erfordert werden. Bedenkt man noch, dass aus den Doppelverhältnissen von der Form $\left(M_r M_s D^{rs}_{pq} D^{rs}_{pt}\right)$ durch Elimination gemeinschaftlicher Elemente alle jene abgeleitet werden können, welche in

$$\left(M_r D^{rs}_{pq} D^{rs}_{vu} D^{rs}_{wt}\right)$$

oder in

$$\left(D^{rs}_{pq} D^{rs}_{vu} D^{rs}_{wt} D^{rs}_{xy}\right)$$

enthalten sind, so ist man also berechtigt, folgenden Satz auszusprechen:

> „Wenn von den Doppelverhältnissen, welche in den Seiten eines vollständigen n-Eckes von den gegenseitigen Durchschnitten derselben gebildet werden, irgend $2n-8$ von einander unabhängige gegeben sind, so lassen sich daraus alle übrigen finden."

Schliesslich mag noch erwähnt werden, dass man den Kettenbruch in 3) auf bekannte Weise in eine Reihe zu verwandeln hat, um nach einfacher Reduction die Flächenrelation

$$\frac{O M_3 M_{n-1}}{O M_1 M_{n-1} . O M_1 M_3} = \frac{O M_3 M_4}{O M_1 M_3 . O M_1 M_4} + \frac{O M_4 M_5}{O M_1 M_4 . O M_1 M_5} + \cdots$$
$$+ \cdots \frac{O M_{n-2} M_{n-1}}{O M_1 M_{n-2} . O M_1 M_{n-1}}$$

zu erhalten, welche bekanntlich von Oscar Werner in den Bulletins der St. Petersburger Akademie veröffentlicht wurde.

VII.

Perspectivische Darstellung der ebenen Schnitte von Kegel- und Cylinderflächen.

Von

EMIL KOUTNY,

Assistenten am k. k. technischen Institute zu Brünn.

(Hierzu Tafel III, Figur 1—14.)

A. Kegelflächen.

§. 1.

Die Construction der Schnitte von Kegeln der zweiten Ordnung mit Ebenen bietet in der Perspective schon aus dem Grunde ein grösseres Interesse, als in der orthogonalen Projection, weil, abgesehen von den interessanten Eigenthümlichkeiten der Centralprojection, die Perspective einer jeden Kegelschnittslinie, je nach ihrer Lage im Raume, wieder eine jede der Kegelschnittslinien sein kann, was in der orthogonalen Projection nicht der Fall ist. Wird z. B. ein Kegel durch eine Ebene in einer Ellipse geschnitten, so muss sich diese orthogonal wieder als Ellipse (ausnahmsweise als Kreis oder gerade Linie) projeciren, während die Perspective dieser Schnittcurve sich als Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellen kann. Man wird daher in vielen Fällen nicht in der Lage sein, aus der Perspective, ohne in die Construction näher einzugehen, zu erkennen, nach welcher Curve im Raume der Kegel von der Ebene geschnitten wurde. Wir wollen im Nachfolgenden die Construction der Schnitte von Kegeln der zweiten Ordnung mit Ebenen in allen interessanteren Fällen durchführen, und die Bestimmungsstücke der sich ergebenden perspectivischen Bilder auffinden, sowie untersuchen, auf welche Weise die Lage der schneidenden Ebene fixirt werden könne, wenn bei einer gegebenen Kegelfläche ein bestimmtes, in vornherein angenommenes Resultat sich ergeben soll.

Wenn wir von der Annahme, dass die Perspective der Schnittcurve eine gerade Linie sei — welcher Fall stets eintritt, wenn die schneidende

Ebene durch das Auge geht, also deren Verschwindungslinie mit der Bildflächtrace zusammenfällt — und von dem Kreise, den wir als speciellen Fall der Ellipse betrachten, absehen, so bleiben von den Curven der zweiten Ordnung die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel, welche Linien einmal als Schnittcurve im Raume, das andere Mal als Perspective der letzteren gewählt, neun Combinationen gestatten, daher auch neun verschiedene Auflösungsfälle zu betrachten sein werden. Ehe wir jedoch zur Construction selbst schreiten, muss Folgendes vorangeschickt werden.

§. 2.

Es sei PQ (Fig. 1) die Bildfläche, O das Auge, $P'Q'$ die durch das Auge parallel zur Bildfläche geführte Ebene, SBC ein Kegel K, dessen Basis BC in der Ebene H liegt, und welcher von der Ebene E in der Curve FG geschnitten wird; endlich l eine durch die Kegelspitze gehende Gerade, durch welche die Kegelspitze fixirt ist. Es ist sodann sz die Perspective des Kegels, 12 jene der Schnittfigur FG, E_b die Bildflächtrace und E_v die Verschwindungslinie der schneidenden Ebene E, H_b und H_v die gleichnamigen Bestimmungsstücke der Basisebene H, v der Verschwindungspunkt der Geraden l, und d der Durchstosspunkt derselben mit der Bildebene; ferner ist MN die Verschwindungslinie oder Flucht des Kegels K, welche durch die Verschwindungspunkte sämmtlicher Erzeugenden des Kegels gebildet wird.

Es ist bekannt, dass die Perspective sz auch durch unendlich viele andere Kegel entsteht, welche erhalten werden, wenn man den gegebenen Kegel K parallel zu sich selbst so fortbewegt, dass seine Spitze stets in dem zugehörigen Sehstrahl SO verbleibt. Hieraus folgt, dass die in derselben Sehstrahlenebene liegenden Erzeugenden dieser Kegelflächen zu einander parallel sind, und dass somit diese Kegelflächen sämmtlich eine und dieselbe Fluchtlinie besitzen.

Betrachten wir unter allen diesen Kegeln jenen k, dessen Spitze s in der Bildebene liegt, so muss, dem Vorigen zufolge, bc seine Basis, daher h_b, H_v die Bestimmungsstücke der Basisebene h, und e, parallel zu E, die neue Schnittebene, somit e_b deren Bildflächtrace und E_v deren Verschwindungslinie, sowie fg die neue Schnittfigur sein. Wir werden stets diesen Kegel k, welcher dasselbe perspectivische Bild wie jener K liefert, als Grundlage der Construction benützen, daher vor Allem zu untersuchen nothwendig haben, in welchem Verhältnisse die Bestimmungsstücke der neuen Fläche k zu jenen der gegebenen K stehen, und wie erstere aus den letzteren ermittelt werden. Zu diesem Zwecke legen wir durch die Spitze S eine zur Bildfläche parallele Ebene SH und bestimmen die Schnitte derselben mit den Ebenen E und H, so ist ersichtlich, dass e_b und h_b als Perspectiven der Tracen E und H angesehen werden können. Bezeichnen wir zur besseren Unterscheidung von der Bildflächtrace E_b, jene e_b der ver-

schobenen Ebene mit dem Namen Nebentrace, so folgt der Satz: dass die Nebentrace einer Ebene erhalten wird, wenn man diese Ebene mit einer durch die Kegelspitze zur Bildfläche parallel geführten Ebene schneidet und die Perspective der Schnittlinie sucht.

Die Nebentrace wollen wir ähnlich wie die Bildflächtrace E_b, mit dem der Ebene E zukommenden Buchstaben bezeichnen, und denselben mit dem Index p versehen. Dass auch für die verschobene Ebene die Verschwindungslinie E_v constant bleibt, ist von selbst verständlich.

Führt man durch s eine Gerade $s\delta$ parallel zu l, so dient erstere zur Fixirung der Kegelspitze s in derselben Weise, wie l zur Fixirung der Kegelspitze S. Nachdem jedoch der Durchstosspunkt der Geraden $s\delta$ mit der Bildebene in den Punkt s fällt, und der Verschwindungspunkt v für beide Gerade l und $s\delta$ derselbe bleibt, so ist zur Bestimmung der Geraden $s\delta$ das Nöthige bereits vorhanden. Ebenso wird jede andere Gerade entsprechend dem Kegel verschoben, wenn man deren Verschwindungspunkt ungeändert lässt und als Durchstosspunkt mit der Bildebene jenen Punkt ansieht, welcher als Perspective des Durchschnittspunktes dieser Geraden mit der durch die Kegelspitze zur Bildfläche parallel gelegten Ebene erhalten wird. Dieser sei kurzweg der Nebendurchstosspunkt der Geraden genannt.

Wird der Kegel k so weit verlängert, bis er die durch das Auge parallel zur Bildfläche gehende Ebene $P'Q'$, die Distanzebene, schneidet, so erhält man eine Curve, die wir Distanztrace des Kegels heissen wollen; analog diesem sei die orthogonale Projection dieser Curve auf der Bildfläche, die Distanztrace-Projection genannt. Aus gleichem Grunde ist sodann e die Distanztrace der schneidenden Ebene.

In derselben Weise bezeichnen wir den Durchschnittspunkt δ einer Geraden $s\delta$ mit der Distanzebene mit dem Namen Distanzpunkt dieser Geraden, sowie dessen orthogonale Projection auf der Bildfläche mit Distanzpunkt-Projection.

Betrachten wir die Kegelfläche k und jene OMN, welche durch die den einzelnen Kegelerzeugenden entsprechenden Parallelstrahlen entsteht, so ist einleuchtend, dass beide Flächen congruent sind, jedoch eine entgegengesetzte Richtung haben, woraus folgt, dass die Distanztrace, also auch die Distanztrace-Projection eines Kegels, dessen Spitze in der Bildfläche liegt*), der Verschwindungs-

*) Wenn wir das Bild eines Kegels K auch so fixirt darstellen, dass seine Spitze nicht in der Bildebene liegt, so werden wir in der Folge doch die Schnittcurve mn des bezüglichen Hilfskegels k auf der Distanzebene $P'Q'$ mit dem Namen „Distanztrace des gegebenen Kegels" bezeichnen und uns dieselbe durch jenen k entstanden denken. Dasselbe gilt auch bezüglich sämmtlicher Ebenen, deren Distanztracen erst durch eine dem Kegel entsprechende Verschiebung (E nach e) entstehen.

Die Projection F'' des Distanzpunktes F einer Geraden L kann daher auf mehrfache Weise gefunden werden; entweder indem man die Bildflächprojection dF'' dieser Geraden mit einer durch den Augpunkt A gezogenen, zur Perspective l der Geraden geometrisch Parallelen AF'' zum Durchschnitt bringt, oder indem man auf der Bildflächprojection, vom Durchstosspunkte d mit der Bildebene aus, ein Stück dF'' aufträgt, das der Entfernung des Verschwindungspunktes v vom Augpunkte gleich ist, oder endlich, indem man durch den Augpunkt A eine geometrische Parallele AF'' zur Perspective l der gegebenen Geraden zieht, und auf derselben, vom Augpunkte aus, ein Stück vd gleich der wahren Länge der Perspective l zwischen dem Verschwindungspunkte und Durchstosspunkte mit der Bildfläche aufträgt.

Werden derart die Projectionen der Distanzpunkte sämmtlicher Erzeugenden eines Kegels (dessen Spitze in der Bildfläche liegend angenommen wird) gesucht, so erhält man eine zur Verschwindungslinie des Kegels congruente Curve als Distanztrace-Projection des Kegels. Berücksichtigt man weiter, dass der Punkt F'' gegen A oder d eine solche Lage, wie der Punkt v gegen d beziehungsweise A hat, so ist ersichtlich, dass auch die Distanztrace-Projection des Kegels gegen den Augpunkt oder gegen die Kegelspitze eine gleiche Lage, wie die Verschwindungslinie des Kegels gegen die Kegelspitze, beziehungsweise gegen den Augpunkt hat.

Hieraus geht hervor, dass, wenn man die Kegelspitze d in Verbindung mit der Distanztrace-Projection parallel fortgeschoben denkt, bis erstere in den Augpunkt gelangt, und hierauf das Ganze um den Augpunkt, als Mittelpunkt, um 180° dreht, die Distanztrace-Projection mit der Verschwindungslinie des Kegels zusammenfällt; ein Gleiches gilt, wenn man den Augpunkt in Verbindung mit der Distanztrace-Projection so weit verschiebt, bis erstere in die Kegelspitze gelangt und hierauf das Ganze um 180° verwendet.

§. 4.

Aus dem im §. 1 Gesagten ist schon ersichtlich, dass man in der Perspective, bei der Construction des ebenen Schnittes eines Kegels der zweiten Ordnung, in Bezug auf die als Resultat sich ergebende Curve eine doppelte Untersuchung vorzunehmen, und zwar nachzusehen hat:

a) in welcher Curve der Kegel von der Ebene geschnitten wird, und

b) welches die Perspective dieser Kegelschnittslinie sein wird.

a) Was den ersten Punkt anbelangt, so ist zu untersuchen, ob die Ebene parallel zu einer, zu mehreren oder zu gar keiner Erzeugenden der Fläche ist. Zu diesem Behufe wird man die gegebene Ebene parallel zu sich

selbst so lange verschieben, bis sie durch die Kegelspitze geht, und sodann die Trace derselben auf der Basisebene suchen; je nachdem diese Gerade die Leitlinie des Kegels nicht schneidet, berührt oder schneidet, wird die Schnittcurve im Raume eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein.

Sehr einfach gestaltet sich die Untersuchung, wenn die Fluchtlinie der Kegelfläche gegeben ist; alsdann wird auch die Verschwindungslinie der durch die Kegelspitze gelegten Ebene zu suchen sein, welch' erstere jedoch, da die Richtung der Ebene ungeändert bleibt, mit der Verschwindungslinie der gegebenen Ebene zusammenfällt. Man hat demnach blos zu sehen, ob die Verschwindungslinie des Kegels von jener der schneidenden Ebene nicht getroffen, berührt oder geschnitten wird, um wie früher die Art der Schnittcurve zu erhalten.

b) Was die Perspective der Schnittcurve betrifft, so gestaltet sich die Untersuchung etwas umständlicher, kann jedoch ganz unabhängig von Obigem und in ähnlicher Weise durchgeführt werden, wenn man berücksichtigt, dass die Perspective der Schnittcurve nichts Anderes, als der Durchschnitt einer Kegelfläche, die das Auge zur Spitze und die Schnittfigur im Raume zur Leitlinie hat, mit der Bildebene ist. Man wird mithin auch hier die schneidende Ebene, d. i. die Bildebene, so lange verschieben, bis sie durch die Spitze des Strahlenkegels geht, also mit der Distanzebene zusammenfällt, und nachsehen, ob sie einzelne Punkte der Schnittcurve in sich enthält oder nicht, oder ob sie letztere berührt. Im ersten Falle wird die Perspective der Schnittfigur eine Hyperbel, im zweiten eine Ellipse, im dritten endlich eine Parabel sein.

Um die in der Distanzebene liegenden Punkte der Schnittfigur zu erhalten, ist sowohl der Schnitt der Kegelfläche, als jener der schneidenden Ebene mit obiger Ebene zu suchen, daher behufs der Bestimmung der Perspective der Schnittfigur folgende Regel aufgestellt werden kann:

> **Man suche die Distanztrace-Projectionen des Kegels und der schneidenden Ebene, und sehe, ob sie sich berühren oder schneiden, oder ob sie keine Punkte gemein haben; im ersten Falle erhält man eine Parabel, im zweiten eine Hyperbel, im dritten eine Ellipse als Perspective der Schnittfigur.**

Da, wie früher gezeigt wurde, die Distanztrace-Projection des Kegels seiner Verschwindungslinie congruent ist und auf die dortselbst angegebene Weise in letztere versetzt werden kann, so ist einleuchtend, dass die Verzeichnung der Distanztrace-Projection des Kegels nicht nothwendig, sondern blos zu bestimmen sein wird, wohin die Distanztrace-Projection der schneidenden Ebene gelangt, wenn dieselbe, in Verbindung mit jener der Kegelfläche, in die Verschwindungslinie des Kegels versetzt wird.

Ist v (Fig. 2) der Mittelpunkt der Fluchtlinie des Kegels, demnach F'' der Mittelpunkt der Distanztrace-Projection desselben, und F''_p jene der

schneidenden Ebene, ferner d die in der Bildfläche angenommene Kegelspitze (mithin E_b die Nebentrace der Ebene E), und wird A in Verbindung mit den Distanztrace-Projectionen des Kegels und der Ebene E nach d versetzt, so gelangt R'' nach M ($R''M \| Ad$), daher nach der Drehung um 180° nach N, wobei $dM = dN$ ist. Durch den so erhaltenen Punkt ist nun die verschobene Trace E'_p (die hier mit E_v aus dem Grunde zusammenfällt, weil die Kegelspitze in der Trace E_b liegt) parallel mit E_v zu ziehen.

Nun ist jedoch

$$AR'' = OR = vG,$$

mithin auch

$$dN = vG,$$

d. h.

> die Entfernung der verschobenen Trace E'_p von der Kegelspitze ist gleich der Entfernung der Nebentrace von der Verschwindungslinie der gegebenen Ebene,

oder, wie aus diesem folgt:

> der Abstand der verschobenen Trace von der Fluchtlinie der schneidenden Ebene ist gleich der Entfernung der Kegelspitze von der Nebentrace dieser Ebene.

Betrachtet man ferner die Art und Weise, in welcher die Verschiebung geschah, so wird ersichtlich, dass die Verschwindungspunkte jener Erzeugenden, welche durch die in der Distanzebene gelegenen Punkte der Schnittcurve gehen, sowohl in der Verschwindungslinie des Kegels, als in der verschobenen Trace, folglich im Durchschnitte beider liegen müssen, dass daher die verschobene Trace zugleich die Verschwindungslinie derjenigen Ebene ist, welche die genannten Erzeugenden enthält. Die Nebentrace S_p dieser Ebene geht durch die Kegelspitze.

Ist E_p (Fig. 3) die Nebentrace, E_v die Verschwindungslinie der Schnittebene und sind S_p und E'_p die gleichen Stücke der die genannten Erzeugenden bestimmenden Ebene; ferner F_p, F_v dieselben Bestimmungsstücke der Basisebene des Kegels, so sind vd und $v'd'$ die Basistracen der beiden ersteren Ebenen. Da nun, wie eben bewiesen wurde, der Abstand der Verschwindungslinien E_v, E'_p gleich jenem der Nebentracen E_p und S_p ist, und die Geraden F_v und F_p zu einander parallel sind, so müssen die Stücke vv' und dd' einander gleich, und die Geraden vd und $v'd'$ zu einander parallel sein. Hieraus folgt der Satz, dass die Tracen der schneidenden Ebene und der durch die obigen Erzeugenden gehenden Ebene auf irgend einer dritten, folglich auch auf der Basisebene des Kegels zu einander geometrisch parallel sind.

§. 5.

Die Verzeichnung des Schnittes eines Kegels mit einer Ebene kann derart vorgenommen werden, dass man entweder einzelne Punkte der Schnittcurve aufsucht und diese entsprechend durch eine Curve verbindet, oder die Bestimmungsstücke derselben, d. s. zwei conjugirte Axen, eine Axe und die Asymptoten und dergl. sucht, und über diesen die Schnittcurve construirt. Die Verzeichnung einzelner Punkte soll hier weiter nicht berührt werden.

Was die Bestimmung von conjugirten Durchmessern der Perspective der Schnittcurve betrifft, so ist hierbei der Grundsatz festzuhalten, dass ein Durchmesser die Berührungspunkte zweier zu einander paralleler Tangenten der Curve verbindet, welche Tangenten als Durchschnitte der an die betreffenden Punkte der Fläche geführten Berührungsebenen mit der schneidenden Ebene resultiren. Da jedoch die Perspectiven von zwei beliebigen, im Raume zu einander parallelen Tangenten (mit Ausnahme der zur Bildfläche selbst parallelen Tangenten) convergiren, so werden wir unser Augenmerk insbesondere auf die Construction jenes Axenpaares richten, von welchem die eine Axe den zur Bildfläche parallelen Sehnen der Schnittfigur conjugirt ist, während die andere zur Bildfläche, daher auch zur Bildflächtrace der schneidenden Ebene parallel läuft.

Die zur Auffindung der ersteren Axe an die Kegelfläche zu führenden Tangirungsebenen müssen demzufolge die Eigenschaft besitzen, dass die Bildflächtracen und Verschwindungslinien derselben zur Verschwindungslinie der schneidenden Ebene parallel seien, und werden auf Grund dieser Voraussetzung vorerst zu suchen sein.

Ist die Perspective der Schnittcurve eine Hyperbel, so wird es sich vorzugsweise um die Bestimmung der Asymptoten handeln. Das zu gleichem Zwecke in der orthogonalen Projection angewendete Verfahren führt in der Perspective nicht zu dem gewünschten Resultate, indem es auf dem Grundsatze fusst, dass die Asymptoten Tangenten an unendlich weit entfernte Punkte der Schnittcurve sind. Während wohl in der orthogonalen Projection die Projectionen der besagten Punkte gleichfalls in unendlicher Entfernung liegen, fallen die Perspectiven derselben in die Flucht der Kegelfläche, daher dieses Verfahren in der Perspective blos die Tangenten an diejenigen Punkte des Bildes giebt, in welchen dieses von der Verschwindungslinie der schneidenden Ebene getroffen wird.

Behufs Verzeichnung der Asymptoten des Bildes der Schnittcurve müssen vorher die unendlich weit entfernten Punkte desselben, sowie die diesen Punkten entsprechenden Erzeugenden des Kegels aufgesucht werden. Die Perspective eines Punktes fällt jedoch in unendliche Entfernung, wenn der betreffende Sehstrahl parallel zur Bildebene wird, d. h. wenn der Punkt *in der Distanz*ebene liegt. Die zu suchenden Punkte der Schnittfigur er-

geben sich daher im Durchschnitte der Distanztracen der Kegelfläche und der schneidenden Ebene, mithin die Verschwindungspunkte der diesen Punkten zugehörigen Erzeugenden im Durchschnitte der Fluchtlinie des Kegels mit der verschobenen Trace der schneidenden Ebene, wie in §. 4 gezeigt wurde.

Nachdem die unendlich weit entfernten Punkte der Perspective fixirt sind, kann der obige Satz zur Auffindung der Asymptoten in Anwendung gebracht werden, d. h. man wird durch die eben gefundenen Erzeugenden die Tangirungsebenen der Kegelfläche legen (indem man deren Verschwindungslinien durch die Verschwindungspunkte der Erzeugenden tangentiell an die Flucht des Kegels, die Nebentracen durch die Kegelspitze parallel zu den bezüglichen Verschwindungslinien, die Basistracen durch die Fusspunkte der Erzeugenden tangentiell an die Leitlinie des Kegels zieht) und die Schnitte derselben mit der schneidenden Ebene bestimmen. Die so erhaltenen Geraden werden die verlangten Asymptoten geben.

Indem die beiden Erzeugenden so gesucht wurden, dass die Perspectiven ihrer Durchschnitte mit der schneidenden Ebene in unendliche Entfernung fallen, so müssen diese Erzeugenden selbst, als auf unendlich weit entfernte Punkte der Curve zugehend, die Richtungen der Asymptoten bestimmen, daher zu den gefundenen Asymptoten parallel sein, welcher Umstand eine Controle für die Richtigkeit und Genauigkeit der Arbeit bietet.

Die Asymptoten schneiden sich im Mittelpunkte des Bildes, während die Perspectiven der Asymptoten der Schnittfigur sich in der Perspective des Mittelpunktes der letzteren begegnen.

Die reelle Axe der Perspective ergiebt sich ihrer Lage nach durch Halbiren des Asymptotenwinkels. Da diese Gerade in der schneidenden Ebene liegt, so wird ihr Durchstosspunkt mit der Bildebene und ihr Verschwindungspunkt im Durchschnitte der Axe mit der Bildflächtrace und Verschwindungslinie dieser Ebene erhalten. Um die Endpunkte der Axe zu bestimmen, hat man einfach den Durchschnitt der eben gezogenen Geraden mit der Kegelfläche zu construiren, was bekanntlich in der Weise geschieht, dass man durch die Gerade und die Kegelspitze eine Ebene legt und die in derselben liegenden Erzeugenden sucht. Die fraglichen Endpunkte ergeben sich sodann im Durchschnitte der Geraden mit diesen Erzeugenden.

Die imaginäre Axe und die Brennpunkte der Perspective folgen aus den bereits gefundenen Bestimmungsstücken.

Ist die Verschwindungslinie eines Kegels nicht bekannt, sondern blos dessen Trace auf einer beliebigen Ebene und die durch eine Gerade fixirte Kegelspitze gegeben, so kann derart vorgegangen werden, dass man, wie früher, die verschobene Trace E'_p als Verschwindungslinie der durch die fraglichen Erzeugenden gehenden Ebene sucht, die Nebentrace durch die Kegelspitze zieht, und den Durchschnitt dieser Ebene mit der Basisebene

des Kegels verzeichnet. Die so erhaltene Trace schneidet die Basis in den Fusspunkten der zu suchenden Erzeugenden. Mit Berücksichtigung des zum Schlusse des vorhergegangenen Paragraphen aufgestellten Satzes ergiebt sich daher für diesen Fall folgende Regel zur Bestimmung der zu den Asymptoten parallelen Erzeugenden:

> Man suche die Basistrace der schneidenden Ebene, sowie den Durchschnitt einer durch die Kegelspitze zur Bildflächtrace dieser Ebene parallel gezogenen Geraden mit der Basisebene, und führe durch diesen Durchschnittspunkt eine Gerade geometrisch parallel zur erstgefundenen Basistrace. Die so gezogene Gerade schneidet die Leitlinie des Kegels in den Fusspunkten der zu suchenden Erzeugenden.

Ueber diesen Gegenstand sei noch bemerkt, dass man durch das angegebene Verfahren in der Lage ist, die Asymptoten des Bildes der Schnittfigur einer jeden Kegelfläche mit beliebiger Leitlinie, wenn dieselbe auch keinem geometrischen Gesetze Folge leistet, zu bestimmen, ohne dass es nöthig wäre, vorerst die Flucht dieser Fläche oder irgend eine andere Curve aufzusuchen.

Berührt die verschobene Trace der schneidenden Ebene die Verschwindungslinie des Kegels, oder berührt die dieser Trace als Verschwindungslinie einer Berührungsebene des Kegels zukommende Basistrace die Leitlinie desselben, so ist die Perspective der Schnittcurve eine Parabel, deren Axenrichtung durch die Erzeugende, in welcher die Berührung erfolgte, gegeben ist. Man hat sodann blos zwei Punkte der Schnittfigur zu suchen, die Verbindungslinie derselben, als Sehne der Parabel, zu halbiren, durch den Halbirungspunkt eine zur Axenrichtung parallele Gerade zu ziehen, und den Durchschnitt dieser Geraden mit der Kegelfläche, welcher den der Sehne entsprechenden Scheitel der Parabel liefert, zu bestimmen.

Wir wollen nun das Gesagte zur Lösung der in §. 1 angedeuteten Fälle anwenden, und die einzelnen Constructionen besprechen.

§. 6.

Aufgabe. Es ist eine Kegelfläche durch eine Ebene nach einer Ellipse so zu schneiden, dass die Perspective der Schnittfigur gleichfalls eine Ellipse wird, und sind zwei conjugirte Axen der letzteren zu bestimmen.

Lösung. Es sei A der Augpunkt, HH die Horizontslinie, VV die Verticallinie des Bildes, GG (Fig. 4) die Bildflächtrace einer Horizontalebene, welche den Kreis $amqp$ als die Leitlinie der Kegelfläche enthält, und S die durch ihre orthogonale Projection S' auf der Basisebene fixirte Spitze des Kegels; endlich sei E_b die Bildflächtrace und E_v die Verschwindungslinie der schneidenden Ebene.

Um ein Paar conjugirter Axen des Schnittes zu erhalten, haben wir, nach §. 5, zwei Berührungsebenen des Kegels derart zu suchen, dass die Bildflächtracen derselben parallel zur Bildflächtrace der schneidenden Ebene sind. Diese Berührungsebenen müssen sich demzufolge in einer durch die Kegelspitze gehenden, zu E_b parallelen Geraden SW schneiden, daher durch SW berührend an die Kegelfläche gelegt werden. Sucht man den Durchschnitt W dieser Geraden mit der Basisebene, wozu am zweckmässigsten eine zur Bildfläche parallele Hilfsebene zu benützen ist, welche die Basisebene in der durch S' parallel zu GG gehenden Geraden $S'W$ schneidet, und zieht durch W die beiden Tangenten Wm und Wn an die Leitlinie des Kegels, so sind dies die Grundflächtracen der fraglichen Berührungsebenen, deren Bildflächtracen und Verschwindungslinien durch die Durchstosspunkte der Grundflächtracen mit GG, resp. HH, parallel zu E_b zu ziehen wären.

Um die Erzeugenden, in welchen die Berührung erfolgt, mit hinreichender Schärfe zu erhalten, müssen die Berührungspunkte m und n der Leitlinie genau angegeben werden. Zu diesem Behufe wurde die Basisebene sammt dem Punkte W und der Leitlinie um den zur Bildfläche parallelen Durchmesser aob der letzteren in eine zur Bildfläche parallele Lage gedreht. Daselbst wird die Leitlinie als ein über dem Durchmesser ab beschriebener Kreis K erscheinen, während, um den gedrehten Punkt W zu erhalten, vorerst sein Drehungsmittelpunkt d im Durchschnitte der Drehungsaxe mit der durch W geführten bildflächprojecirenden Geraden AW, und seine Entfernung von der Drehungsaxe, in einem dem Abstande der letzteren von der Bildebene entsprechenden Maasstabe verjüngt, bestimmt werden muss. Ist $A\frac{D}{2}$ die halbe Augdistanz, so wird blos $\frac{D}{2}$ mit W zu verbinden sein, wodurch auf ab das Stück cd gleich der halben Länge Wd abgeschnitten wird, welches auf dem in d errichteten Perpendikel von d aus zweimal aufgetragen, in $\varDelta$ den Punkt W nach der Drehung giebt. Die Berührungspunkte α, β der aus $\varDelta$ an den Kreis K gezogenen Tangenten können nun mit der nöthigen Schärfe ermittelt und in die Horizontalebene nach m und n zurückgeführt werden.

Nachdem diese Berührungsebenen von der Ebene $E_b E_v$ in zu E_b parallelen Geraden geschnitten werden, so ist zur Bestimmung der Schnittlinien blos je ein Punkt derselben nothwendig. Dieser ergiebt sich im Durchschnitte der betreffenden Grundflächtracen. Die Trace E_g der schneidenden Ebene schneidet nämlich die beiden Basistracen Wm und Wn der Tangirungsebenen in den Fusspunkten 1 und 2 obiger Tangenten $I1$ und $II2$ der Schnittcurve, welche die bezüglichen durch n und m gehenden Erzeugenden des Kegels in den Punkten I und II der Schnittcurve treffen, daher $I\,II$ ein Durchmesser und der Halbirungspunkt O desselben der Mittelpunkt der Ellipse ist.

Der zu $I\ II$ conjugirte Durchmesser geht durch O parallel zu E_b, und schneidet die Grundflächtrace E_g im Halbirungspunkte ω der Länge 12. Wird durch diesen Durchmesser und die Kegelspitze eine Ebene gelegt, so ist die Verbindungslinie Wp der Punkte W und ω die Grundflächtrace derselben, und schneidet die Basis des Kegels in den Punkten p und q, welche, mit S verbunden, die beiden in dieser Ebene gelegenen Erzeugenden pS und qS bestimmen. Diese Erzeugenden begegnen der Axenrichtung ωO in den gesuchten Endpunkten III und IV des zweiten Durchmessers.

Wenn sich die Punkte p und q durch zu schiefe Schnitte ergeben, so ist ähnlich wie bei der Bestimmung der Berührungspunkte m und n vorzugehen. Man wird nämlich den der Grundflächtrace E_g entsprechenden Parallelstrahl um HH in die Bildfläche umlegen, und die um ab in eine zur Bildfläche parallele Lage gedrehte Grundflächtrace durch den Durchschnittspunkt der Geraden E_g und ab parallel zu dem umgelegten Parallelstrahl führen; die so gefundene Gerade trifft die beiden Tangenten $\varDelta\alpha$ und $\varDelta\beta$ in zwei Punkten, welche das der Perspective 12 zugehörige Längenstück begrenzen, weshalb dieses nun in zwei Theile so zu theilen ist, dass die Perspective des in die Grundebene zurückversetzten Theilpunktes die Länge 12 geometrisch halbirt*), also mit ω zusammenfällt. Die Verbin-

---

*) Das Theilverhältniss dieser Geraden kann einfach gefunden werden.

Es sei MN (Fig. 5) eine begrenzte Gerade, welche die Bildebene B in s schneidet, O das Auge, mithin Ov der zugehörige Parallelstrahl, v der Verschwindungspunkt und mn die Perspective der Geraden; ferner sei r der Halbirungspunkt der Länge mn, und R der dieser Perspective r entsprechende Punkt der Geraden MN. Zieht man durch r eine Parallele FG zu MN, so schneidet diese die Sehstrahlen MO und NO in den Punkten F und G, und man erhält mehrere Paare von ähnlichen Dreiecken, nämlich:

$$\triangle Frm \backsim \triangle vOm,\quad \triangle nsN \backsim \triangle nvO,\quad \triangle rFO \backsim \triangle MRO \text{ und}$$
$$\triangle rGO \backsim \triangle RNO.$$

Aus dem ersten Paare ergiebt sich die Proportion:

$$1)\qquad Fr : rm = Ov : vm.$$

Aus dem zweiten Paare:

$$2)\qquad rG : rn = vO : vn.$$

Aus dem dritten und vierten Paare endlich:

$$3)\qquad Fr : rG = MR : NR.$$

Wird 1) durch 2) dividirt, so folgt:

$$\frac{Fr}{Gr} : \frac{rm}{rn} = 1 : \frac{vm}{vn}$$

und hieraus mit Berücksichtigung der Gleichung 3) und des Umstandes, dass $mr = nr$ ist:

$$\frac{MR}{NR} : 1 = 1 : \frac{vm}{vn},$$

oder:

$$MR : NR = vn : vm.$$

Die in Rede stehende Gerade (Fig. 3) müsste demnach derart getheilt werden, dass

dungslinie dieses Theilpunktes mit Δ schneidet den Kreis K in zwei Punkten, welche in die Grundebene gedreht, die Punkte p und q der Trace W_∞ geben.

§. 7.

Aufgabe. Es ist die Perspective einer Geraden, als Axe eines Rotationskegels, dessen Erzeugende durch einen bestimmten Punkt der Axe gehen und mit derselben den Winkel φ einschliessen, gegeben; man soll die Bildflächtrace und die Fluchtlinie des Kegels bestimmen und denselben durch eine Ebene derart schneiden, dass die Schnittcurve im Raume eine Hyperbel sei und sich perspectivisch wieder als Hyperbel darstelle.

Lösung. Es sei l (Fig. 6) die Perspective der gegebenen Geraden, v deren Verschwindungspunkt und d deren Durchstosspunkt mit der Bildebene, und S die Kegelspitze. Um die Fluchtlinie des Kegels zu bestimmen, berücksichtige man, dass die Parallelstrahlen sämmtlicher Erzeugenden einen Kegel bilden, welcher dem gegebenen Kegel congruent ist und das Auge zur Spitze hat, und dessen Schnitt mit der Bildebene die zu suchende Fluchtlinie bildet. Die grosse Axe derselben wird sonach in der durch den Parallelstrahl der Kegelaxe senkrecht auf die Bildfläche geführten Ebene liegen, und ihre Richtung in der Bildflächtrace dieser Ebene, d. i. in Av erhalten.

Zur Bestimmung der Endpunkte dieser Axe lege man die in Rede stehende Ebene um Av in die Bildfläche um, wobei das Auge nach O (AO senkrecht auf Av und gleich der Augdistanz) gelangt, daher Ov der umgelegte Parallelstrahl der Kegelaxe ist. Die beiden Erzeugenden Oa und Ob, in welchen der Parallelkegel von der Ebene geschnitten wird, und welche durch O unter dem Winkel φ gegen Ov geneigt zu verzeichnen sind, schneiden die Gerade Av in den Endpunkten a und b der grossen Axe. Behufs der Bestimmung der kleinen Axe, welche durch den Halbirungspunkt ω der Axe ab senkrecht auf Av zu ziehen ist, schneiden wir den umgelegten Parallelkegel durch eine auf die Kegelaxe Ov senkrechte und durch ω gehende Ebene $\alpha\beta$ nach einem Kreise $\alpha\gamma\beta$ vom Durchmesser $\alpha\beta$, dessen der Abscisse $\omega\alpha$ entsprechende Ordinate $\omega\gamma$ die Länge der kleinen Halbaxe giebt, daher diese Länge bloss mittelst des aus dem Mittelpunkt ω beschriebenen Bogens $\gamma c e$ nach ωc und ωe zu übertragen ist.*)

---

die beiden Stücke in dem Verhältnisse $v1 : v2$ zu einander stehen (wenn v den Verschwindungspunkt der Grundflächtrace E_g bezeichnet), und zwar muss das in der Horizontalebene rückwärts liegende Stück die grössere Länge erhalten.

*) Wäre zufällig $\varphi = 90^0 - \measuredangle vOA$, so würde sich eine Parabel, für $\varphi > 90 - \measuredangle vOA$ hingegen eine Hyperbel als Fluchtlinie ergeben. Die Asymptoten der letzteren wären sodann zu den beiden zur Bildfläche parallelen Erzeugenden des Kegels parallel.

Die aus S an die Fluchtlinie des Kegels gezogenen Tangenten bilden die äussersten Erzeugenden des Bildes, mithin auch den sichtbaren Umriss des Kegels.

Um die Axen der Bildflächtrace des Kegels zu erhalten, hat man blos durch d eine zu Av parallele Gerade $a'db'$ bis zum Durchschnitte a' und b' mit den durch a und b gehenden Erzeugenden aS, bS zu ziehen. Die im Halbirungspunkte ω' der Axe $a'b'$ auf dieselbe errichtete Senkrechte $c'e'$ wird von den durch c und e gehenden Erzeugenden in den Endpunkten der kleinen Axe $c'e'$ der sich als Ellipse darstellenden Bildflächtrace getroffen. Dass diese der Fluchtlinie ähnlich sein muss, ist selbstverständlich; es könnten daher für den Fall, als die Erzeugenden $c'S$ und $e'S$ die Richtung $c'e'$ unter sehr spitzem Winkel treffen würden, die Endpunkte c' und e' der kleinen Axe auch in der Art gefunden werden, dass man die Geraden $a'c'$ und $b'e'$ parallel zu ae, oder $a'e'$ und $b'c'$ parallel zu ae zieht.

Weiter wurde noch in der Figur die der Ellipse $abce$ congruente Distanztrace-Projection $a''b''c''e''$ der Kegelfläche, nach §. 3, aus ihren Axen bestimmt. Dieselbe ist, wie schon in §. 4 gezeigt wurde, zur Construction nicht erforderlich, wurde jedoch zur besseren Veranschaulichung des dort Gesagten angegeben.

Zunächst wird es sich nun darum handeln, der Aufgabe gemäss die Annahme der Bestimmungsstücke der schneidenden Ebene vorzunehmen, und zwar muss (nach §. 4 a), damit die Kegelfläche nach einer Hyperbel geschnitten werde, die Verschwindungslinie E_v der Ebene zwei Punkte der Flucht des Kegels in sich enthalten, und da sich diese Hyperbel wieder als Hyperbel perspectivisch darstellen soll, (nach §. 4 b) die Distanztrace-Projection E''_p der Ebene jene $a''b''c''e''$ schneidend gewählt, oder die verschobene Trace E'_p parallel zu E_v so gezogen werden, dass sie die Verschwindungslinie des Kegels in zwei Punkten trifft. Wie seinerzeit nachgewiesen wurde, ist die Entfernung der Trace E''_p vom Augpunkte A gleich dem Abstande der Geraden E'_p von der Kegelspitze S.

Durch die so gewählten Stücke E_v und E'_p ist die Lage der schneidenden Ebene vollkommen bestimmt, und es kann mit Hilfe derselben die Bildflächtrace leicht ermittelt werden. In §. 4 wurde bewiesen, dass die Entfernung der verschobenen Trace E'_p von der Verschwindungslinie E_v gleich dem Abstande der Nebentrace E_p von der Kegelspitze S ist; man hat daher blos den Abstand der beiden Geraden E_v und E'_p in den Zirkel zu nehmen, aus dem Mittelpunkte S mit diesem Radius einen Kreis zu beschreiben und die Nebentrace der zu suchenden Ebene parallel zu E_v nach der Seite von S tangentiell an den Kreis zu ziehen, nach welcher E_v von E'_p gelegen ist.

Um endlich die Bildflächtrace E_b der schneidenden Ebene zu erhalten, hat man zu berücksichtigen, dass bereits die Verschwindungslinie und eine in der Ebene gelegene Gerade E_p gegeben ist, welch' letztere sich zugleich

in einer durch S gehenden, zur Bildfläche parallelen Ebene befindet. Zieht man in der Ebene irgend eine Gerade $IV\,k$, deren Verschwindungspunkt IV im Durchschnitte von E_v mit der Flucht des Kegels liegt, und verlängert die Erzeugende $IV\,S$ des Kegels bis zum Durchschnitte $4'$ mit seiner Bildflächtrace $a'b'c'e'$, so bestimmen die Geraden $IV\,k$ und $IV\,S4'$ eine Ebene, deren Nebentrace offenbar kS ist, und deren Bildflächtrace durch $4'$ parallel zu kS läuft. Letztere Gerade bestimmt im Durchschnitte mit $IV\,k$ den Durchstosspunkt 4 dieser Geraden mit der Bildebene und somit auch einen Punkt der zu suchenden Bildflächtrace E_b.

Die Verschwindungslinie E_v schneidet die Flucht des Kegels in den Punkten III und IV, welche, sowie die Durchschnittspunkte V und VI der Bildflächtracen E_b und $a'b'c'e'$, der Perspective der Schnittcurve angehören.

Wie in §. 5 nachgewiesen wurde, sind die Asymptoten des Bildes zu jenen Erzeugenden $1S1'$, $2S2'$ parallel, deren Verschwindungspunkte 1 und 2 im Durchschnitte der verschobenen Trace E'_p mit der Fluchtlinie des Kegels liegen. Die Asymptoten selbst ergeben sich im Durchschnitte der durch diese Erzeugenden an die Kegelfläche gelegten Berührungsebenen mit der Ebene $E_b E_v$. Werden daher in den Punkten 1 und 2 der Ellipse $abcd$ die Tangenten $1n$, $2m$ als Verschwindungslinien der Tangirungsebenen bis zum Schnitte m und n mit E_v, sowie deren Bildflächtracen $1'n'$, $2'm'$ parallel zu den betreffenden Verschwindungslinien bis zum Durchschnitte m' und n' mit E_b, ferner in gleicher Richtung die Nebentracen Sf und Sh durch S bis zum Durchschnitte f und h mit E_p gezogen, so gehören die Punkte m, f, m', beziehungsweise n, h, n' den Schnittlinien an, werden demnach in den Geraden mm' und nn', die parallel zu $1S1'$, $2S2'$ sein müssen und die verlangten Asymptoten darstellen, liegen.

Die Asymptoten schneiden sich im Mittelpunkte O des Bildes, dessen reelle Axe $v'd'$ ihrer Lage und Richtung nach durch Halbiren des Asymptotenwinkels gefunden wird. Legt man durch $v'd'$ und die Kegelspitze S eine Ebene, so schneidet diese die Kegelfläche nach zwei Erzeugenden, welche der Axenrichtung $v'd'$ in den beiden Endpunkten I und II der reellen Axe begegnen.

Wäre die Verschwindungslinie des Kegels nicht gegeben, sondern derselbe blos durch seine Bildflächtrace und durch die Kegelspitze fixirt, so würde zur Bestimmung der zu den Asymptoten parallelen Erzeugenden die Construction der Verschwindungslinie des Kegels vorzunehmen nicht nothwendig sein. Man müsste sodann auch von der Annahme der verschobenen Trace E'_p absehen, und sogleich die Bildflächtrace der durch die obgenannten Erzeugenden gelegten Ebene so wählen, dass sie die Bildflächtrace des Kegels in zwei Punkten schneidet und zur Bildflächtrace der schneidenden Ebene parallel ist. Nachdem die Verschwindungslinien beider Ebenen, sowie deren Nebentracen gleich weit von einander entfernt sind, so müssen auch die Bildflächtracen in demselben Abstande von einan-

der gelegen sein, woraus folgt, dass man bei obiger Annahme die Nebentrace der schneidenden Ebene in einem Abstande von der Kegelspitze zu ziehen hat, welcher dem Abstande der beiden angenommenen Bildflächtracen gleichkommt. Mit Hilfe der Nebentrace und der Bildflächtrace der schneidenden Ebene ist die Verschwindungslinie oder jede andere Trace dieser Ebene leicht gefunden.

Dass die Geraden $1''A$ und $2''A$ der Distanz-Projection gleichfalls zu den Asymptoten parallel sind, ist leicht einzusehen.

§. 8.

Aufgabe. Es ist die Perspective einer Kegelfläche durch deren Bildflächtrace T_b (Fig. 7) und Verschwindungslinie T_v gegeben*); man soll eine Ebene so wählen, dass sie die gegebene Kegelfläche nach einer Ellipse schneidet, welche sich im Bilde als Parabel darstellt. Von der letzteren soll die Axenrichtung, eine Sehne und der dieser Sehne entsprechende Scheitel gesucht werden.

Lösung. Zur Vereinfachung der Construction wählen wir eine Grundebene, deren Bildflächtrace (Grundlinie) GG sei.

Da die Perspective der Ellipse eine Parabel werden soll, so muss die verschobene Trace E'_p als Tangente der Verschwindungslinie des Kegels angenommen werden, während die Verschwindungslinie E_v der schneidenden Ebene keinen Punkt der Fluchtlinie T_v in sich enthält. Sind die beiden Stücke E_v und E'_p gewählt, so ergiebt sich die Nebentrace E_p der Schnittebene in einem der Entfernung der Geraden E_v und E'_p gleichen Abstande von S.

Um die Bildflächtrace E_b der schneidenden Ebene zu finden, ziehen wir die der Geraden E'_p als Verschwindungslinie einer Berührungsebene des Kegels zukommende Bildflächtrace F_b tangentiell an T_b und führen die zu suchende Bildflächtrace E_b ebenfalls in einem der Entfernung der Geraden E_v und E'_p gleichen Abstande von F_b parallel zu E_v.

Die beiden Bildflächtracen T_b und E_b gemeinschaftlichen Punkte I und II gehören der Schnittcurve an, daher $I\,II$ eine Sehne der zu bestimmenden Parabel ist. Die zu dieser Sehne parallele Tangirungsebene E'_p, F_b enthält die Erzeugende aa', welche der Annahme zufolge die Eigenschaft besitzt, dass die Perspective ihres Durchstosspunktes mit der Ebene $E_b E_v$ in unendliche Entfernung fällt, weshalb diese Erzeugende zugleich die Richtung der Parabelaxe angiebt.

Um schliesslich den der Sehne $I\,II$ entsprechenden Scheitel der Parabel zu erhalten, benützen wir die zweite zu E_v parallele Tangirungsebene

*) Betreffs der Annahme dieser beiden Stücke ist nur zu bemerken, dass die Axen derselben zu einander parallel sind und ein gleiches Verhältniss haben.

$H_b H_v$, welche die Kegelfläche in der Erzeugenden bb' berührt. Die Grundflächtrace H_g dieser Ebene trifft die Grundflächtrace E_g der schneidenden Ebene im Punkte q, daher pq, parallel zu E_b, die Schnittlinie dieser beiden Ebenen ist, die Erzeugende bb' in dem Punkte O der Schnittcurve begegnet und zugleich die Tangente der letzteren in diesem Punkte bildet. Die Axe der Parabel ist somit durch O parallel zu aa' zu ziehen und wird, wenn die Construction mit hinreichender Genauigkeit durchgeführt wurde, die Sehne $I\,II$ im Punkte 1 halbiren.

§. 9.

Aufgabe. In der Horizontalebene GG, HH (Fig. 8) ist die Ellipse $abce$ als Leitlinie einer Kegelfläche, deren Spitze S durch ihre Grundflächprojection S' fixirt ist, gegeben; man soll die Verschwindungslinie dieses Kegels durch ein Paar conjugirter Axen bestimmen, und denselben durch eine Ebene nach einer Parabel so schneiden, dass sich diese perspectivisch als Hyperbel darstellt.

Lösung. Suchen wir vorerst die Perspective jenes Paares conjugirter Axen der Leitlinie, von welchen die eine Axe ab eine zur Bildfläche parallele Lage hat, so ist diese durch die Perspective ω des Mittelpunktes parallel zu GG zu ziehen, während die andere Axe ce die Berührungspunkte c und e der beiden zu GG parallelen Tangenten der Ellipse verbindet. Die Gerade ce schneidet verlängert die Horizontslinie im Augpunkte, weshalb ab und ce zugleich die Perspectiven der senkrechten Axen der Ellipse sind.

Werden auf bekannte Weise die Verschwindungspunkte C und E der beiden durch c und e gehenden Erzeugenden gesucht, so erhält man eine Axe CE der Fluchtlinie, weil die Verschwindungslinien der durch cS und eS gelegten Berührungsebenen der Kegelfläche parallel zu HH sind und die Fluchtlinie derselben berühren. Dass die Gerade CE gleichfalls auf den Verschwindungspunkt A der Geraden ce zugehen muss, ist klar.

Aus gleichem Grunde wird die zu CE conjugirte Axe BF durch den Halbirungspunkt D von CE parallel zu HH gehen. Die Endpunkte derselben können erhalten werden, wenn man den dem Punkte D entsprechenden Punkt des Durchmessers ce sucht, durch denselben eine zu HH Parallele bis zum Durchschnitte mit der Leitlinie zieht, und die diesen Durchschnittspunkten zugehörigen Erzeugenden so weit verlängert, bis sie die Gerade BF in den Endpunkten B und F der zweiten Axe schneiden. Direct werden diese Punkte gefunden, wenn man von dem Gesichtspunkte ausgeht, dass die Tangenten in den Endpunkten B und F der Axe zu CEA parallel und Verschwindungslinien von zwei Berührungsebenen des Kegels sind, welch' letztere demnach auch parallel zur Richtung DA sein müssen. Führt man daher durch S eine zu DA parallele Gerade SW und sucht den Durchschnitt W derselben mit der Grundebene (in der durch S' gezogenen Horizontalen $S'W$), so geben die durch W an die Leitlinie gezogenen Tangen-

ten $W\alpha$, $W\beta$ die Grundflächtracen der obbezeichneten Tangirungsebenen und schneiden die Horizontslinie in den Punkten α und β, durch welche die gewünschten Tangenten der Fluchtlinie parallel zu AD gezogen, auf der Axenrichtung BF die Endpunkte der zweiten Axe bestimmen.

Uebergehend zur Construction der Schnittfigur, ist vor Allem die Wahl der schneidenden Ebene den Bedingungen der Aufgabe gemäss vorzunehmen. Da der Schnitt nach einer Parabel erfolgen soll, so muss die Verschwindungslinie E_v der schneidenden Ebene tangirend an die Verschwindungslinie des Kegels gelegt, oder falls letztere nicht verzeichnet wäre, in der Weise bestimmt werden, dass man die Grundflächtrace einer Berührungsebene tangentiell an die Leitlinie des Kegels zieht, und durch diese Basistrace und die Kegelspitze eine Ebene legt. Da ferner die Perspective eine Hyperbel werden soll, so ist die verschobene Trace E'_p die Fluchtlinie des Kegels schneidend zu wählen. Die Schnittpunkte 1 und 2 sind sodann die Verschwindungspunkte jener zu den Asymptoten der Perspective parallelen Erzeugenden $1S1'$, $2S2'$*).

Legt man durch diese Erzeugenden die Berührungsebenen an die Kegelfläche, so sind $1n$, $2m$ die Verschwindungslinien, $1'n'$, $2'm'$ die Grundflächtracen und fS, hS die Nebentracen derselben. Diese Tracen schneiden sich mit den gleichnamigen Bestimmungsstücken der Ebene $E_b E_v$ beziehungsweise in den Punkten m, n, m', n', f, h der Asymptoten mhm' und nfn' der Perspective, deren Mittelpunkt in O erhalten wird.

Die Punkte III und IV, in welchen die Basis des Kegels von der Grundflächtrace der schneidenden Ebene getroffen wird, gehören gleichfalls der Schnittcurve an.

Im vorliegenden Falle ist es zweckmässiger, anstatt der senkrechten Axen jenen Durchmesser der Hyperbel zu bestimmen, welcher den zu E_b

---

*) Die Durchschnittspunkte 1 und 2 können auch mit Benützung der Axen BF und CE, ohne dass die Fluchtlinie zu verzeichnen nöthig wäre, auf folgende Weise gefunden werden.

Beschreibt man über der einen Axe CE als Durchmesser einen Kreis K, so kann bekanntlich die Ellipse als die schiefe Projection dieses Kreises angesehen werden, wenn man sich denselben um CE in eine bestimmte Lage gedreht denkt. Es entspricht sodann die zweite Axe BF dem auf CE senkrechten Durchmesser $\varkappa\varphi$ des Kreises, weshalb die Verbindungslinie φF zweier zusammengehöriger Endpunkte dieser Durchmesser gleichsam die Richtung der projecirenden Geraden bestimmt. Der Punkt p der Geraden E'_p, in welchem diese den gemeinschaftlichen Durchmesser CE schneidet, ist gleichzeitig seine eigene Projection, während der Durchschnittspunkt q derselben Geraden mit der zweiten Axe BF, auf den bezüglichen Durchmesser $\varkappa\varphi$ des Kreises projecirt, nach $\varkappa$ fällt. Es ist mithin $\varkappa p$ die Projection der Geraden E'_p auf der Kreisebene, und schneidet den Kreis K in den Punkten γ und δ, welche schliesslich parallel zu φF in die Gerade E'_p zurück zu projeciren sind, um die fraglichen Durchschnittspunkte 1 und 2 dieser Geraden mit der Fluchtlinie des Kegels zu erhalten.

parallelen Sehnen conjugirt ist. Für diesen Durchmesser ist in I, d. i. in dem Berührungspunkte der Verschwindungslinien des Kegels und der schneidenden Ebene ein Endpunkt, daher in IO die Richtung desselben und zugleich seine halbe Länge gefunden; denn geht man bei der Bestimmung dieses Durchmessers von dem in §. 5 aufgestellten allgemeinen Grundsatze aus, so hat man an die Fluchtlinie des Kegels parallel zu E_v die beiden Tangenten E_v und F_v als Verschwindungslinien zweier Berührungsebenen zu legen und den Schnitt der letzteren mit der Ebene $E_b E_v$ zu bestimmen. Nachdem jedoch die Flucht E_v der schneidenden Ebene zugleich Verschwindungslinie der einen Berührungsebene ist, so sind beide Ebenen parallel, und es ist die gemeinschaftliche Gerade E_v selbst ihr Schnitt, also auch die gesuchte Tangente der Schnittcurve. Die zweite Berührungsebene schneidet sich mit der Ebene $E_b E_v$ in der Geraden $II\,T$, welche die Erzeugende gSg' in dem zweiten Endpunkte II des Durchmessers trifft und in diesem Punkte die Schnittcurve berührt*). Es ist klar, dass bei richtiger Construction die Punkte I, O und II in einer Geraden liegen, und $OI = OII$ wird.

Würde es sich nicht um die Bestimmung der Fluchtlinie des Kegels, sondern blos um die Verzeichnung der Schnittcurve handeln, so wäre auch die schneidende Ebene nicht durch ihre Verschwindungslinie und verschobene Trace zu fixiren. In diesem Falle wäre am zweckmässigsten, folgend vorzugehen.

Man wähle einen Punkt der Verschwindungslinie der Basisebene, ziehe durch denselben die Grundflächtrace F_g einer Berührungsebene tangentiell an die Leitlinie des Kegels und eine zweite Gerade E_g als Grundflächtrace der schneidenden Ebene, welche zur obigen Tangirungsebene parallel ist. Die Richtung der Bildflächtracen dieser Ebenen kann auf verschiedene Weise ermittelt werden. Hier wurde der Durchstosspunkt d der in der Berührungsebene gelegenen Erzeugenden tS mit der Bildebene gesucht und mit dem in der Grundlinie GG gelegenen Punkte Δ der Grundflächtrace F_g verbunden, wodurch sich die Bildflächtrace F_b der Berührungsebene ergab. Die Grundflächprojection $S't$ der Erzeugenden trifft nämlich die Grundlinie in d', weshalb blos in d' die Vertikale $d'd$ zu errichten und bis zum Durchschnitte d mit der Erzeugenden tS zu ziehen ist, um den Durchstosspunkt d der letzteren mit der Bildebene zu erhalten. Da sich hier dieser Punkt

---

*) Zur Bestimmung der Schnittlinie $II\,T$ der beiden Ebenen $E_v E_p E_b$ und $T_v S$ (die Nebentrace der Berührungsebenen geht nämlich durch S parallel zu T_v) wäre es bei unserer Annahme am zweckmässigsten, eine Hilfsebene derart zu legen, dass die Nebentrace derselben durch S geht und E_p unter einem ziemlich spitzen Winkel schneidet (wie hier z. B. hS), und deren Verschwindungslinie in beliebiger Entfernung, jedoch so gelegen ist, dass sie beide Verschwindungslinien E_v und T_v innerhalb der Zeichnungsfläche schneidet; die Hilfsschnitte dieser Ebene mit obigen Ebenen begegnen sich sodann in einem Punkte der Tangente $T\,II$ unter einem nicht sehr spitzen Winkel.

durch einen sehr schiefen Schnitt ergab, so wurde behufs dessen genauer Bestimmung durch t eine beliebige Gerade kl gezogen, ein Punkt k derselben gewählt und mit S und S' verbunden; hierauf aus d' eine zu kS' Parallele $d'l$ und aus dem Durchschnittspunkte l derselben mit kl eine zu kS Parallele ld geführt, welche die Erzeugende tS gleichfalls in dem zu suchenden Punkte d schneidet. Die Richtigkeit der Construction folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$SS't \sim dd't, \quad kS't \sim td'l \text{ und } kSt \sim tld.$$

Die Bildflächtrace E_b der schneidenden Ebene ist nun durch Δ' parallel zu F_b zu ziehen.

Schliesslich hat man die Basistrace S_g der Ebene der beiden zu den Asymptoten parallelen Erzeugenden geometrisch parallel zu E_g und die Leitlinie schneidend, sonst jedoch beliebig zu wählen, die Bildflächtrace S_b dieser Ebene durch d_1 parallel zu E_b zu ziehen, und die Asymptotenbestimmung wie früher vorzunehmen. Diesfalls ist es am zweckmässigsten, vorerst die Nebentrace E_p der schneidenden Ebene in der bekannten Entfernung von der Kegelspitze zu ziehen und die Grundfläch- und Nebentracen der vorkommenden Ebenen zu benützen.

Würden E_b und F_b ausser die Zeichnungsfläche fallen, so könnte E_p auch derart bestimmt werden, dass man eine Gerade Sh durch S, als auch eine zweite Gerade xz, welche beide Tracen E_g und S_g schneidet, parallel zu GG führt, das durch die genannten Tracen begrenzte Stück xz der letzteren Geraden auf die erstere nach Sh überträgt, und E_p durch h parallel zu F_b zieht.

Ueber den in diesem Paragraphen behandelten Fall sei noch bemerkt, dass der untere Ast der Hyperbel die Perspective jenes Theiles der Parabel giebt, welcher sich vor der Distanzebene befindet, während der obere Ast nichts Anderes, als die Centralprojection des hinter der Distanzebene liegenden Parabelstückes ist.

§. 10.

Aufgabe. Es ist ein Kegel durch seine Verschwindungslinie K (Fig. 9) und durch die Kegelspitze gegeben; man soll eine Ebene derart annehmen, dass sie den Kegel nach einer Hyperbel, deren Perspective eine Ellipse wird, schneidet, und zwei conjugirte Durchmesser dieser Perspective bestimmen.

Lösung. Da in der Aufgabe die Kegelspitze weiter nicht bestimmt ist, so werden wir blos die Nebentracen der vorkommenden Ebenen zu benützen haben. Nehmen wir jedoch an, dass die Kegelspitze in der Bildfläche liegt, so fallen die Nebentracen mit den Bildflächtracen zusammen.

Den Bedingungen der Aufgabe zufolge muss die Verschwindungslinie E_v der schneidenden Ebene zwei Punkte der Fluchtlinie des Kegels in sich enthalten, während die verschobene Trace E'_p letztere nicht

schneidet. Um die Nebentrace der schneidenden Ebene zu erhalten, hat man den Abstand der Geraden E_v und E'_p von S gegen E_v aufzutragen, weil E'_p zwischen S und E_v angenommen wurde.

Zur Vereinfachung der Construction sei eine Horizontalebene GG, HH als Grundebene angewendet.

Da wir jenes Paar conjugirter Durchmesser aufsuchen, wobei die eine Axe zu E_v parallel ist, so haben wir die Fluchtlinien F_v und F'_v der bezüglichen Berührungsebenen parallel zu E_v als Tangenten an die Fluchtlinie K zu führen. Die Bildflächtracen dieser Ebenen fallen in eine durch S gehende, zu E_v parallele Gerade F_b. Bestimmt man die Grundflächtracen $v_1 d_1$ und $v'_1 d_1$ der Berührungsebenen, sowie jene vd der schneidenden Ebene $E_b E_v$, so begegnen sich diese drei Geraden in den Punkten $I' II'$, durch welche die zu E_v parallelen Tangenten der Schnittfigur hindurchgehen. Letztere schneiden die zugehörigen Berührungs-Erzeugenden gS und fS in den Endpunkten I und II eines Durchmessers $I\,II$ der Perspective, welcher in o halbirt den Mittelpunkt derselben liefert.

Um den zu $I\,II$ conjugirten Durchmesser zu finden, ziehe man in o die zu E_b parallele Richtung $III\,IV$ desselben und halbire die Länge $I'II'$ im Punkte o', welcher in der verlängerten Axe $III\,IV$ liegen muss. Die Endpunkte dieses Durchmessers ergeben sich offenbar im Durchschnitte der Geraden $III\,IV$ mit der Kegelfläche. Legt man durch $III\,IV$ und S eine Ebene, so ist $d_1 o' v_2$ die Grundflächtrace und die durch v_2 parallel zu E_v gezogene Gerade F''_v die Verschwindungslinie derselben. Diese Ebene schneidet daher den Kegel in den Erzeugenden bS und aS, welche auf der Axenrichtung $III\,IV$ den zu suchenden Diameter begrenzen.

Die Fluchtlinie des Kegels wird von jener der schneidenden Ebene in den Punkten 1 und 2 der Schnittcurve getroffen, und es muss die Länge 12, als eine zu $III\,IV$ parallele Sehne, vom Durchmesser $I\,II$ im Punkte w halbirt werden. Weil jedoch 12 zugleich eine Sehne der Fluchtlinie K ist, so muss auch die Verbindungslinie fg der Berührungspunkte f und g durch den Punkt w hindurchgehen.

Die in der Verschwindungslinie gelegenen Punkte 1 und 2 sind offenbar die Perspectiven der unendlich weit entfernten Punkte der Hyperbel im Raume; es müssen deshalb die Perspectiven der Asymptoten dieser Hyperbel sich als Tangenten an die obigen Punkte der Ellipse ergeben. Behufs der Verzeichnung dieser Perspectiven hat man bekanntlich die den Erzeugenden $1S$ und $2S$ zukommenden Berührungsebenen mit der Ebene $E_b E_v$ zum Durchschnitt zu bringen. Die Verschwindungslinien der Berührungsebenen sind die in den Punkten 1 und 2 an die Fluchtlinie K gezogenen Tangenten $r1$ und $r2$, welche sich in einem Punkte des Durchmessers fg schneiden, und die bezüglichen Bildflächtracen Sm und Sn gehen durch S parallel zu den genannten Verschwindungslinien. Nachdem die letztgezogenen Geraden die Bildflächtrace E_b der schneidenden

Ebene in m und n treffen, so sind $m1$ und $n2$ die verlangten Perspectiven der Asymptoten. Ihr Durchschnittspunkt t, d. i. die Perspective des Mittelpunktes der Schnittfigur, fällt in die Axe $I\,II$.

Dass das Stück $1 I 2$ der Ellipse die Centralprojection des hinter der Distanzebene befindlichen Hyperbelastes darstellt, ist bekannt.

§. 11.

Aufgabe. Ein durch die Verschwindungslinie K und durch die in der Bildfläche liegende Spitze S (Fig. 10) bestimmter Kegel soll nach einer Parabel, die sich perspectivisch als Ellipse darstellt, geschnitten werden. Es ist die Perspective der Schnittcurve durch ein Paar conjugirter Durchmesser derselben zu bestimmen.

Lösung. Die Durchführung dieses Falles wird in ähnlicher Weise, wie im vorigen Paragraphen, vorzunehmen sein. Den Bedingungen der Aufgabe zufolge ist die Verschwindungslinie E_v der schneidenden Ebene tangentiell an die Verschwindungslinie K des Kegels, und die Nebentrace E'_p letztere nicht schneidend zu wählen. Die Bildflächtrace E_b fällt rechts von der Spitze S, weil E_v zwischen S und E'_p gelegen ist.

Die Construction wurde mit Hilfe einer Ebene $H_b\,H_v$ durchgeführt, welche durch die Kegelspitze geht, sonst jedoch eine beliebige Lage hat. Die Bestimmung des Diameters $I\,II$ wurde vermittelst der beiden zu E_v parallelen Berührungsebenen $E_v\,S$ und $F_v\,S$, deren Grundflächtracen vS und $v_1\,S$ jene vd der Ebene $E_b\,E_v$ in den Punkten v und I' treffen, und welche die Erzeugenden fS und gS enthalten, vorgenommen. Ebenso ergaben sich die Endpunkte III und IV des zweiten Diameters in den Erzeugenden aS und bS, welche als Schnitt der Kegelfläche mit einer durch diese Axe geführten Ebene $Sv_2\,F''_v$ resultiren. Der Punkt I fällt mit f zusammen, wie dies bei jedem Parabelschnitte der Fall ist; es besitzen nämlich die Verschwindungslinie des Kegels und die Perspective der Schnittfigur in diesem Punkte die Verschwindungslinie der schneidenden Ebene zur gemeinschaftlichen Tangente.

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass in allen Fällen, wo die Curve im Raume die den sichtbaren Umriss der Fläche bildenden Erzeugenden schneidet, die Perspective der Schnittcurve von den äussersten Erzeugenden des Kegelbildes berührt werden muss. Zumeist dürfte es gerathen erscheinen, diese besonderen Punkte der Schnittcurve speciell zu bestimmen, indem man auf bekannte Weise den Durchschnitt obiger Erzeugenden mit der schneidenden Ebene sucht; denn abgesehen davon, dass diese Erzeugenden gleichzeitig die Tangenten der Curve in den so gefundenen Punkten der Curve bilden und an dieser Stelle genau die Richtung des Zuges derselben angeben, ist die Wichtigkeit besagter Punkte schon aus dem Umstande ersichtlich, dass dieselben, als im Umrisse gen, die Grenzen des sichtbaren Theiles der Curve bezeichnen.

In den bisher behandelten Beispielen wurde der die Schnittfläche deckende Theil des Kegels weggenommen gedacht, die Curve daher durchgehends voll gezogen.

Sehr einfach gestaltet sich die Auffindung einzelner Punkte der Schnittfigur in den beiden letztgewählten Beispielen. Soll z. B. in Fig. 10 der im sichtbaren Umrisse rS des Kegels gelegene Punkt der Curve gefunden werden, so kann man einfach durch r die Verschwindungslinie F'_v einer zu der Geraden E_v parallelen, den Kegel nach den Erzeugenden rS und sS schneidenden Ebene, und durch v_2 die zugehörige Hilfstrace v_2S auf der Ebene $H_b H_v$ ziehen. Die Trace v_2S trifft jene vd der schneidenden Ebene $E_b E_v$ im Punkte t, durch welchen die zu E_v parallele Schnittlinie beider Ebenen geführt, diese den Erzeugenden rS und sS in den fraglichen Punkten 1 und 2 begegnet.

§. 12.

Von den im §. 1 bezeichneten neun Auflösungsfällen wurden in den §§. 6 bis 11 blos sechs durchgeführt; für die Lösung der übrigen bleibt nicht viel Wesentliches mehr zu bemerken übrig.

Was jenen Fall anbelangt, wo die Kegelfläche nach einer Parabel geschnitten und die Perspective sich gleichfalls als Parabel darstellen soll, so müssen hierbei sowohl die Verschwindungslinie, als die verschobene Trace der schneidenden Ebene die Fluchtlinie des Kegels berühren. Nachdem jedoch beide Linien zu einander parallel sind, so können daselbst blos zwei verschiedene Fälle eintreten, nämlich

a) fallen entweder die beiden Geraden E_v und E'_p zusammen, wo dann, wie leicht einzusehen, die schneidende Ebene durch die Kegelspitze geht und zur Tangirungsebene des Kegels wird, die Parabel mithin in eine gerade Linie übergeht; oder es können

b) die Geraden E_v und E'_p einander diametral gegenüberliegen, in welchem Falle eine Parabel als Perspective erhalten wird, die die Fluchtlinie des Kegels, sowie die Gerade E_v berührt und sich in entgegengesetzter Richtung von der Kegelspitze ausbreitet. Die schneidende Ebene hat diesfalls eine solche Lage, dass die Parabel im Raume die Distanzebene berührt, sich jedoch ganz hinter derselben befindet. Die Construction wäre nach §. 8 vorzunehmen.

Der Fall, wo die Kegelfläche nach einer Ellipse, die sich perspectivisch als Hyperbel darstellt, geschnitten werden soll, ist in gleicher Weise, wie jene der §§. 7 oder 9, zu behandeln.

Die Lösung jenes Falles endlich, wo die Perspective eine Parabel, die Schnittcurve jedoch eine Hyperbel ist, wird nach §. 8 vorzunehmen sein.

Bemerkung. Denkt man sich in Fig. 9 und 10 die Fluchtlinie K als Bildflächtrace eines Cylinders, dessen Erzeugenden auf den Verschwindungspunkt S im Bilde zugehen, und diesen Cylinder durch eine Ebene ge-

schnitten, welche E_v zur Bildflächtrace und E_b zur Verschwindungslinie hat, so wird dieselbe Schnittfigur *I II III IV* erhalten und es werden auch bei der Construction dieselben Linien benöthigt. In Fig. 10 wäre sodann H_b mit H_v und umgekehrt zu vertauschen, so wie in Fig. 9 *GG* als Verschwindungslinie, *HH* als Bildflächtrace der Hilfsebene angesehen werden müsste.

§. 13.

Die in §. 4 aufgestellten Sätze lassen sich einfacher auch in folgender Weise ableiten. Hierbei werden wir gleich die Bestimmung jener Ebene, welche durch die beiden zu den Asymptoten des Bildes parallelen Erzeugenden der Kegelfläche geht, ins Auge fassen und den Grundsatz festhalten, dass die Distanztrace der genannten Ebene mit der Distanztrace der schneidenden Ebene zusammenfällt, d. h. dass beide Ebenen sich in einer in der Distanzebene liegenden Geraden schneiden müssen. Aus dem Gesagten folgt schon, dass die Bildflächtracen und Verschwindungslinien dieser Ebenen zu einander parallel sind.

Um das hieraus sich ergebende Gesetz aufzufinden, sei *PQ* (Fig. 11) die Bildfläche, *O* das Auge und *P'Q'* die Distanzebene; ferner *S* die Spitze des Kegels *K*, dessen äusserste Erzeugenden die Geraden *Sm*, *Sn* sind, und welcher *BC* zur Distanztrace, *NR* zur Verschwindungslinie hat. Endlich sei *E* die schneidende Ebene, mithin E_b die Bildflächtrace, E_v die Verschwindungslinie und *M* die Distanztrace derselben.

Die Verbindungslinie der Punkte *M* und *S* stellt sodann jene Ebene *S* vor, welche den Kegel in zwei Geraden, deren Perspectiven zu den verlangten Asymptoten parallel sind, schneidet. Die Bildflächtrace S_b und Verschwindungslinie S_v dieser Ebene werden unter obiger Voraussetzung, dass die Ebenen *E* und *S* die Gerade *M* gemeinschaftlich haben und die Ebene *S* durch die Kegelspitze geht, zu bestimmen sein.

Da die beiden Dreiecke ME_bS_b und OE_vS_v eine gleiche Höhe und zu einander parallele Seiten besitzen, so sind sie congruent, woraus

$$S_bE_b = S_vE_v$$

folgt.

Es ist mithin der Abstand der Bildflächtrace der zu suchenden Ebene *S* von der Bildflächtrace der schneidenden Ebene *E* der Entfernung der Verschwindungslinien dieser beiden Ebenen gleich.

Nachdem jedoch weder die Bildflächtrace noch die Verschwindungslinie der Ebene *S* bekannt ist, so reicht der eben aufgestellte Satz zur Fixirung derselben auch nicht hin; da indessen bekannt ist, dass diese Ebene durch die Kegelspitze geht, so dürfte es am zweckmässigsten sein, die Entfernung der Perspectiven der Schnittlinien beider Ebenen *E* und *S* mit der durch die Kegelspitze parallel zur Bildfläche geführten Ebene *SE*, d. i. den Abstand der beiden Nebentracen *s* und *e* zu bestimmen. Be-

zeichnen wir zu diesem Zwecke die Entfernung der Kegelspitze von der Distanzebene mit E und die Augdistanz mit D, so ergiebt sich aus den ähnlichen Dreiecken SEM und $E_b S_b M$ die Proportion

$$SE : S_b E_b = E : D.$$

Ebenso folgt aus den ähnlichen Dreiecken SEO und $se\,O$

$$SE : se = E : D,$$

daher durch Division beider Proportionen:

$$S_b S_v = se,$$

d. h. der Abstand der Nebentracen der beiden Ebenen ist der Entfernung der Bildflächtracen oder jener der Verschwindungslinien dieser Ebenen gleich.

Dieser Satz, in Verbindung mit dem vorher aufgestellten, ist zur Bestimmung der Ebene S vollkommen ausreichend.

Schneidet man beide Ebenen durch eine dritte zur Bildfläche parallele Ebene $P''Q''$ und bestimmt die Perspectiven a und b der Schnittlinien α und β, so ergiebt sich aus den ähnlichen Dreiecken $O\alpha\beta$, Oab, und $M\alpha\beta$, $ME_b E_v$, in gleicher Weise, wie oben:

$$ab = E_b S_b = E_v S_v,$$

dass mithin die in Rede stehenden Ebenen die Eigenschaft besitzen, von jeder zur Bildfläche parallelen Ebene in Geraden geschnitten zu werden, deren Perspectiven in einem der Entfernung der Verschwindungslinien dieser Ebenen gleichen Abstande von einander gelegen sind.

Bemerkung 1. Wie seinerzeit gezeigt wurde, ist die verschobene Trace E'_p der Ebene E nichts Anderes, als die Verschwindungslinie S_v der zu suchenden Ebene S.

Bemerkung 2. In den behandelten Beispielen wurde die Leitlinie des Kegels stets elliptisch angenommen; die entwickelten Sätze gelten jedoch allgemein, und die Construction ist bei jeder anderen Leitlinie in gleicher Weise, ohne die geringste Aenderung durchzuführen.

B. Cylinderflächen.

§. 14.

Eine Cylinderfläche wird durch eine Ebene nur nach einer der Leitlinie gleichnamigen Curve, oder nach geraden Erzeugenden geschnitten, während als Perspective der Schnittfigur, wenn die Leitlinie des Cylinders eine Curve des zweiten Grades ist, eine jede der Kegelschnittslinien resultiren kann.

Ist Z (Fig. 12) ein Cylinder, dessen äusserste Erzeugenden durch die Geraden Bm und Cn angegeben werden, und E die schneidende Ebene; ferner O das Auge, PQ die Bildebene und $P'Q'$ die Distanzebene, so ist BC die Bildflächtrace des Cylinders, E_b und E_v die Bestimmungsstücke der Ebene E, und v der Verschwindungspunkt der parallelen Cylinder-

erzeugenden. Weil nun bezüglich der Perspective der Schnittfigur für Cylinderflächen dieselben Grundsätze, wie für Kegelflächen gelten, so ist ersichtlich, dass auch hier eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel als Perspective erhalten wird, wenn die Distanztrace $mMQ'n$ des Cylinders von jener M der schneidenden Ebene beziehungsweise nicht getroffen, berührt oder geschnitten wird.

Schneiden sich die genannten Distanztracen, wie dies hier angenommen wurde, in M, so werden die Bilder der diesen Punkten zugehörigen Erzeugenden MS, weil die Perspectiven ihrer Durchstosspunkte mit der schneidenden Ebene in unendliche Entfernung fallen, die Asymptotenrichtungen des Bildes geben, während die Asymptoten selbst im Durchschnitte der durch diese Erzeugenden gelegten Berührungsebenen des Cylinders mit der schneidenden Ebene erhalten werden.

Wir werden mithin durch die Distanztrace M der Ebene E eine Ebene S parallel zu den Cylindererzeugenden zu legen, diese Ebene zu bestimmen und nachzusehen haben, ob die Trace derselben auf der Basisebene des Cylinders die Leitlinie berührt, schneidet oder nicht trifft. Zum Behufe der Bestimmung dieser Ebene betrachten wir die beiden Dreiecke ME_bS_b und OE_vv, welche eine gleiche Höhe und zu einander parallele Seiten haben, daher congruent sind; aus denselben folgt:

$$E_bS_b = E_vv,$$

d. h.:

„der Abstand der Bildflächtracen der beiden Ebenen S und E ist gleich der Entfernung des Verschwindungspunktes v der Cylindererzeugenden von der Verschwindungslinie der schneidenden Ebene E."

Wie aus Fig. 3 ersichtlich ist und in §. 4 angezeigt wurde, sind die Basistracen der Ebenen S und E zu einander geometrisch parallel.

Ist die Perspective der Cylinderfläche, sowie die schneidende Ebene gegeben, so hat man daher blos durch den Verschwindungspunkt v der Cylindererzeugenden eine Parallele zur Verschwindungslinie E_v der schneidenden Ebene bis zum Durchschnitt mit der Flucht der Basisebene zu ziehen und durch den so erhaltenen Punkt die Basistrace der Ebene S geometrisch parallel zur Basistrace der schneidenden Ebene E zu führen. Soll jedoch eine Ebene E so gewählt werden, dass sie die Cylinderfläche nach einer bestimmten Curve schneidet, so muss vorerst die Grundflächtrace der Ebene S der Bedingung gemäss gewählt werden.

Ist die Perspective der Schnittfigur eine Ellipse, so wird ein Paar conjugirter Axen derselben (von welchen die eine Axe zur Bildflächtrace der schneidenden Ebene parallel ist) in derselben Weise, wie bei Kegelflächen bestimmt, nur werden sich hier die einzelnen Constructionen noch einfacher gestalten.

§. 15.

Aufgabe. Ein elliptischer Cylinder soll durch eine Ebene so geschnitten werden, dass die Perspective der Schnittfigur eine Hyperbel ist, die einen bestimmten Asymptotenwinkel φ besitzt.

Lösung. Ist die Leitlinie in der Ebene $F_b F_v$ (Fig. 13) gelegen und v der Verschwindungspunkt der Cylindererzeugenden, so wähle man eine beliebige Erzeugende $1v$ und eine zweite $2v$ derart, dass der Winkel $1v2 = \varphi$ ist. Die Verbindungslinie $1\,2$ der Fusspunkte dieser Erzeugenden ist sodann die Grundflächtrace der Ebene S, deren Verschwindungslinie S_v die Punkte v und v' vereint.

Die Basistrace E_g der schneidenden Ebene kann nun in beliebiger Entfernung von $v'd'$ zu derselben geometrisch parallel gezogen werden. Dieselbe schneidet F_b in d, F_v in v, durch welche Punkte die Bestimmungsstücke E_b und E_v der schneidenden Ebene parallel zu S_v zu ziehen sind.

Um die Asymptoten zu finden, bestimme man die durch die Erzeugenden $1v$ und $2v$ gelegten Berührungsebenen des Cylinders, indem man die Basistracen $1m$ und $2n$ derselben durch 1 und 2 tangentiell an die Leitlinie bis zum Durchschnitte a mit der Verschwindungslinie F_v der Basisebene zieht (der zweite Durchschnittspunkt fällt hier in unendliche Entfernung). Die letzteren Punkte mit v verbunden geben die Verschwindungslinien av und vn' der Berührungsebenen. Die Schnitte mm' und nn' dieser Ebenen mit der Ebene $E_b E_v$ bilden die gesuchten Asymptoten und begegnen sich im Mittelpunkte O der Perspective.

Wird der Asymptotenwinkel $mon = \sphericalangle \varphi$ halbirt und der Durchschnitt der Halbirungslinie mit der Cylinderfläche gesucht, so erhält man die Endpunkte der reellen, senkrechten Axe. Genauer und einfacher ergiebt sich jedoch der zur Richtung E_b conjugirte Diameter Ol, indem man aus v' die Basistrace $v'a$ einer zu E_b parallelen Tangirungsebene des Cylinders, sowie die Erzeugende av, in welcher die Berührung erfolgt, zieht und den Schnitt bl dieser Ebene mit der Ebene $E_b E_v$ durch den Vereinigungspunkt b der betreffenden Basistracen parallel zu E_v führt. Die so erhaltene Gerade bl ist eine Tangente der Schnittcurve und trifft die Erzeugende av in dem Endpunkte l des bezeichneten Durchmessers, dessen halbe Länge Ol ist.

Würde die Gerade $1\,2$ die Verschwindungslinie ausser der Zeichnungsfläche schneiden, so könnte die Richtung vv' in der Weise bestimmt werden, dass man nach irgend einer der bekannten Methoden durch den Punkt v eine Gerade gegen den unzugänglichen Durchschnittspunkt v' der Geraden F_v und $1\,2$ zieht, oder wenn v ebenfalls ausser die Zeichnungsfläche fällt, indem man den Durchstosspunkt einer der beiden Erzeugenden $1v$ oder $2v$ mit der Bildebene verzeichnet und mit d' verbindet.

Die Durchführung des hier gewählten Beispieles dürfte hinreichen, um alle möglichen Fälle ohne Schwierigkeit lösen zu können und die Annahme so zu bestimmen, dass bei irgend einer als Leitlinie des Cylinders gegebenen Curve des zweiten Grades die Perspective der Schnittfigur eine bestimmte Kegelschnittslinie wird.

Bemerkung. Sind die Asymptoten TT (Fig. 14) des Bildes und der zur Bildflächtrace der schneidenden Ebene conjugirte Durchmesser MOM', nebst der Tangente MN der Hyperbel im Endpunkte desselben bekannt, so kann die reelle Axe ORR' auch durch Folgendes bestimmt werden.

Halbirt man den Asymptotenwinkel und nimmt diese Gerade, d. i. die Richtung der zu suchenden Axe, als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes und O als den Ursprung desselben an, bezeichnet ferner die Längen der senkrechten Axen der Hyperbel mit a und b und die Abscisse OP des Punktes N mit x', die Ordinate mit y', so ist

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Tangente MN, daher

$$y = 0 \text{ und } x = ON = \frac{a^2}{x'},$$

die Coordinaten des Durchschnittspunktes N derselben mit der X-Axe. Es ist mithin

$$a = \sqrt{ON.OP},$$

welcher Ausdruck einfach construirt werden kann, indem man über OP als Durchmesser einen Halbkreis beschreibt, in N ein Perpendikel bis zum Durchschnitte S mit letzterem errichtet und $OS = a$ nach OR und OR' überträgt.

VIII.

Ueber die Bedingungen der Integrabilität einiger Differential-Gleichungen.

Von

A. Letnikow,

Kaiserlich Russischer Ingenieur-Stabscapitain.

Die Integration der Differential-Gleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen gehört zwar zu dem elementaren Theile der Integral-Rechnung, trotzdem ist aber gerade in diesem Theile der Mangel allgemeiner Methoden am fühlbarsten. Euler's Methode des integrirenden Factors bleibt bis jetzt die einzige, die eine Allgemeinheit der Idee und einen unbezweifelbaren wissenschaftlichen Werth besitzt. Es scheint mir daher, dass man jetzt blos von der Entwickelung der Theorie des integrirenden Factors neue Mittel zur Integration und zur Untersuchung der Differential-Gleichungen, deren Integration möglich ist, erwarten kann. Auch lässt sich bekanntlich die Methode des integrirenden Factors mit grösserem Erfolge auf die Untersuchungen von Differential-Gleichungen, die durch einen Factor von bestimmter Form integrirt werden können, anwenden als auf die Integration von willkürlich gegebenen Gleichungen. Vorzügliche Beispiele ähnlicher Untersuchungen sind von Euler selbst angegeben, dessen „*Institutiones calculi integralis*" in Bezug auf den Reichthum des in demselben enthaltenen Materials immer ein unübertroffenes Werk bleiben werden. Die Theorie des integrirenden Factors bezüglich der Gleichungen erster Ordnung hat seit Euler nur eine sehr geringe Entwickelung erhalten. Nur in der letzten Zeit ist in dieser Richtung ein Schritt vorwärts geschehen durch den Professor der Dorpater Universität, Herrn Minding, in seinem umfangreichen Memoire: „Ueber die Integration der Differential-Gleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen"; diese Arbeit scheint mir die ganze Aufmerksamkeit der Geometer zu verdienen, vorzüglich deshalb, weil sie auf eine ganze Classe neuer Differential-Gleichungen hinweist und weil die Methode des Autors sich mit grösserem Erfolge anwenden lässt,

als die Methode Euler's in ihrer ursprünglichen Form. Ich werde hier selbstverständlich nicht die Methode des Herrn Minding auseinandersetzen, ich will nur die Aufmerksamkeit der Leser auf einige neue Seiten dieses Gegenstandes lenken, die, wie mir scheint, vom Autor selbst unbemerkt geblieben sind. Ich glaube, dass der Wissenschaft kein geringer Vortheil daraus erwüchse, wenn die Aufmerksamkeit der Geometer auf einige der bemerkenswerthen Andeutungen hingelenkt würde, die Herr Minding in dem oben genannten Memoire mitgetheilt.

I.

1) Die Gleichungen, welche Herr Minding betrachtet und auf die sich auch meine Untersuchungen beziehen, sind in folgender allgemeiner Form enthalten:

$$1)\quad (\alpha_0 y^n + \alpha_1 y^{n-1} + \ldots + \alpha_n)\, dy + (\beta_0 y^m + \beta_1 y^{m-1} + \ldots + \beta_m)\, dx = 0.$$

Die Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_m$ sind willkürliche Functionen von x (Minding setzt sie in seinem Memoire als ganze Functionen voraus). Differential-Gleichungen ähnlicher Art können aus einer ursprünglichen Gleichung folgender Form erhalten werden:

$$2)\qquad U = e^w \,.\, V = const,$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$W = \frac{A_0 y^p + A_1 y^{p-1} + \ldots + A_p}{B_0 y^q + B_1 y^{q-1} + \ldots + B_q}$$
$$V = (y - y_1)^{n_1} (y - y_2)^{n_2} \ldots (y - y_i)^{n_i}.$$

Die Coefficienten $A_0, A_1 \ldots A_p, B_0, B_1 \ldots B_q$ sowohl, als auch $y_1, y_2 \ldots y_i$ sind gewisse Functionen von x und die Exponenten $n_1, n_2 \ldots n_i$ constante Zahlen. In der That, differenzirt man die letzte Gleichung, so wird die Constante eliminirt und nach Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren erhält man eine Gleichung, in der die Coefficienten von dy und dx ganze Functionen von y sind, wie in der oben erwähnten Differential-Gleichung. Diese Verification bietet natürlich keine Schwierigkeiten dar. Hieraus folgt, dass Differential-Gleichungen der betrachteten Art ein Integral von der Form $U = const$ haben können. Die allgemeine Frage, worauf sich die folgenden Untersuchungen beziehen, besteht in der Entwickelung derjenigen Bedingungen, unter welchen eine Differential-Gleichung der Form 1) ein Integral von der Form 2) hat, und in der Bestimmung aller Functionen und ihrer Constanten, d. h. in der Bestimmung des Integrals, wenn die gefundenen Bedingungen erfüllt sind. Indem ich diese allgemeine Frage unberührt lasse, will ich in der vorliegenden Abhandlung nur einige einfache Beispiele ähnlicher Untersuchungen betrachten. Aber ehe ich zu dem Hauptgegenstande meiner Abhandlung schreite, ist es nöthig, einige vorläufige Theoreme zu beweisen.

2) Bekanntlich muss der Factor μ, welcher die Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

zu einem vollständigen Differentiale macht, folgender Bedingung genügen

$$\frac{d(M\mu)}{dy} = \frac{d(N\mu)}{dx},$$

die gewöhnlich zur Bestimmung dieses Factors und der Bedingungen der Integrabilität der gegebenen Gleichung dient.

Ausser dieser Form der Bedingungsgleichung hat Malmstén (Liouville 1862, p. 315) noch eine andere angegeben, die mit nicht geringerem Nutzen zu diesem Zwecke verwendet werden kann. Das Malmstén'sche Theorem lässt sich in folgender Art beweisen. Es sei $u = const$ das Integral der Differential-Gleichung

$$dy + f(x, y)\, dx = 0,$$

so wird:

$$f(x, y) = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}.$$

Die Integration der gegebenen Gleichung muss als gelöst angesehen werden, wenn $\frac{du}{dy}$ oder $\frac{du}{dx}$ gefunden ist. Bemerken wir hierbei gelegentlich, dass

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{f} \cdot \frac{du}{dx}$$

der integrirende Factor der gegebenen Differential-Gleichung ist. Differenzirt man die vorhergehende Gleichung nach y und x, so erhält man:

$$\frac{df}{dy} = \frac{\frac{d^2u}{dx\,dy}}{\frac{du}{dy}} - f \cdot \frac{\frac{d^2u}{dy^2}}{\frac{du}{dy}}$$

$$\frac{df}{dx} = f \cdot \frac{\frac{d^2u}{dx^2}}{\frac{du}{dx}} - f^2 \cdot \frac{\frac{d^2u}{dx\,dy}}{\frac{du}{dx}}$$

und da $-f(x, y) = \frac{dy}{dx}$, so lassen sich diese beiden Gleichungen in folgender Weise darstellen:

$$\frac{\partial \,.\, log \frac{du}{dy}}{\partial x} = \frac{df}{dy}$$

$$\frac{\partial \,.\, log \frac{du}{dx}}{\partial x} = \frac{1}{f} \cdot \frac{df}{dx}$$

wo das Zeichen ∂ ein vollständiges Differential anzeigt, in welchem y als eine Function der unabhängigen Variabeln x zu betrachten ist. Jede der beiden letzten Gleichungen wird offenbar eine Identität, wenn man nach der Differentiation statt $\frac{dy}{dx}$ seinen Ausdruck aus der gegebenen Differential-Gleichung substituirt; es ist ausserdem auch leicht zu sehen, dass eine jede dieser Gleichungen eine Folge der anderen ist. Die erhaltenen Gleichungen können in vielen Fällen zur Bestimmung der partiellen Differential-Quotienten $\frac{du}{dy}, \frac{du}{dx}$ dienen. Es ist nicht schwer, sich zu überzeugen, dass z. B. alle gewöhnlichen Fälle der Integrabilität von homogenen linearen Gleichungen u. s. w. ebenso leicht aus den genannten Gleichungen als aus der gewöhnlichen erhalten werden können; ausserdem können diese Bedingungen noch auf neue Fälle führen. Wir wollen uns aber bei diesem Gegenstande jetzt nicht weiter aufhalten, sondern diesen Satz zum Beweise eines anderen Theorems benutzen, welches die Verallgemeinerung eines von Minding in dem genannten Memoire (S. 29 — 32) bewiesenen Satzes ist.

3) Geht die Differential-Gleichung

$$dy + f(x, y)\, dx = 0$$

in ein vollständiges Differential über durch einen Factor der Art:

$$\mu = (y - y_1)^{\varepsilon} \cdot e^{\frac{D}{(y-y_1)^n}} \cdot \varphi(x, y),$$

wo die Exponenten ε und n constante Zahlen bedeuten, y_1 eine Function von x ist, D und φ Functionen von x und y sind, die nebst ihrer derivirten Function für $y = y_1$ weder Null noch unendlich werden, so ist die Function y_1 eine particuläre Lösung der gegebenen Differential Gleichung. Zum Beweise bedienen wir uns der ersten der Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen. Bemerkt man, dass

$$\log \mu = \log \frac{du}{dy} = \varepsilon \log (y - y_1) + \frac{D}{(y - y_1)^n} + \log \varphi(x, y),$$

so erhält man durch Differentiation die Gleichung:

$$\varepsilon \cdot \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx}}{y - y_1} + \frac{\frac{dD}{dx} + \frac{dD}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}{(y - y_1)^n} - Dn \cdot \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx}}{(y - y_1)^{n+1}}$$
$$+ \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dy},$$

die nach Substitution von $\frac{dy}{dx} = -f$ folgende Form annimmt:

$$Dn\left(\frac{dy_1}{dx} + f\right) + (y - y_1)\left(\frac{dD}{dx} - f \cdot \frac{dD}{dy}\right) - \varepsilon (y - y_1)^n \left(\frac{dy_1}{dx} + f\right)$$
$$+ (y - y_1)^{n+1} \left\{\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{f}{\varphi}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung muss identisch unabhängig von dem Zusammenhange zwischen y und x bestehen. Nimmt man für n eine positive Zahl und setzt voraus, dass alle oben erwähnten Bedingungen erfüllt sind, so erhält man für $y = y_1$

$$\frac{dy_1}{dx} + f(x, y_1) = 0,$$

was zu beweisen war. Ist n eine negative Zahl $= -m$, so kann die Gleichung in folgender Weise geschrieben werden:

$$Dn(y-y_1)^m\left(\frac{dy_1}{dx}+f\right) + (y-y_1)^{m+1}\left(\frac{dD}{dx} - f\frac{dD}{dy}\right)$$
$$+ (y-y_1)\left\{\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{f}{\varphi}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\right\} = \varepsilon\left(\frac{dy_1}{dx}+f\right)$$

und hieraus ergiebt sich für $y = y_1$ derselbe Schluss. Bemerken wir noch, dass die Voraussetzung $n = 0$ von keinem Einflusse auf das erhaltene Resultat ist, dass aber der Exponent ε nicht Null sein darf.

4) Erwähnen wir hier noch eines Theorems des Herrn Minding, welches die Form des Integrales bestimmt, wenn die Gleichung durch einen Factor bestimmter Art integrirt werden kann. Für unseren Zweck ist nur der folgende specielle Fall dieses Satzes wichtig. Wenn die Differential-Gleichung

$$\varphi(y)\,dy + \psi(y)\,dx = 0,$$

in der φ und ψ ganze Functionen von y bedeuten, deren Coefficienten aber willkürliche Functionen von x sind, integrirt werden kann durch einen Factor von der Form:

$$\mu = \frac{1}{X(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n)},$$

in welchem X, y_1, $y_2 \ldots y_n$ Functionen von x sind, so wird, wenn alle y_i verschieden sind, das Integral der gegebenen Gleichung folgender Art sein:

$$e^V(y-y_1)^{p_1}(y-y_2)^{p_2}\ldots(y-y_n)^{p_n} = const.$$

V ist eine ganze Function von y, deren Coefficienten gewisse Functionen von x sind; die Exponenten p_1, $p_2 \ldots p_n$ sind constante Zahlen. Dieses Theorem lässt sich auf folgende Art beweisen. Setzt man der Kürze wegen:

$$X(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n) = f(y),$$

so wird nach der Voraussetzung:

$$\frac{\varphi(y)}{f(y)}dy + \frac{\psi(y)}{f(y)}dx = dU,$$

wo U eine gewisse Function von x und y bedeutet; folglich erhält man, wenn man den rationalen Bruch in seine Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{\varphi(y)}{f(y)} = E(y) + \Sigma\frac{p_i}{y-y_i},$$

wo $E(y)$ den ganzen Theil in Bezug auf y des zerlegten Bruches bedeutet und $p_i = \frac{\varphi(y_i)}{f'(y_i)}$ ist. Hieraus ergiebt sich durch Integration:

$$U = \int E(y)\,dy + \Sigma p_i \log(y - y_i) + F(x),$$

wo $F(x)$ die Constante der Integration in Bezug auf y ersetzt. Von der anderen Seite aber haben wir:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\psi(y)}{f(y)} = E_1(y) + \Sigma \frac{q_i}{y - y_i},$$

wo $E_1(y)$ den ganzen Theil in Bezug auf y des Bruches bedeutet und $q = \frac{\psi(y_i)}{f'(y_i)}$. Es muss demnach die Gleichung bestehen:

$$E_1(y) + \Sigma \frac{q_i}{y - y_i} = \int \frac{dE(y)}{dx}\,dy + \Sigma \frac{dp_i}{dx} \log(y - y_i) - \Sigma \frac{p_i \frac{dy_i}{dx}}{y - y_i} + F'(x).$$

Das Zeichen Σ in allen vorhergehenden Gleichungen bezieht sich auf die Werthe $i = 1, 2, 3 \ldots n$. Bemerken wir ferner, dass nach den im vorigen Paragraph bewiesenen Theoremen $y = y_i$ eine particuläre Lösung der betrachteten Differential-Gleichung ist und dass infolge dessen

$$\varphi(y_i) \frac{dy_i}{dx} + \psi(y_i) = 0$$

ist, so erhalten wir:

$$\Sigma \frac{q_i + p_i \frac{dy_i}{dx}}{y - y_i} = 0,$$

und deshalb kann die vorhergehende Gleichung auf folgende Weise dargestellt werden:

$$E_1(y) - \int \frac{dE(y)}{dx}\,dy - F'(x) = \Sigma \frac{dp_i}{dx} \log(y - y_i).$$

Da in dem ersten Theile dieser Gleichung eine ganze Function von y, in dem zweiten aber eine logarithmische Function von y enthalten ist, so kann diese Gleichung nur dann bestehen, wenn jeder Theil sich auf Null reducirt und deshalb:

$$\frac{dp_i}{dx} = 0, \text{ folglich } p_i = const.$$

Das Integral selbst wird demnach

$$U = \int E(y)\,dy + \Sigma \log(y - y_i)^{p_i} + F(x) = const.$$

und schreiben wir dasselbe in folgender Art $e^U = const$, so erhalten wir die erwähnte Form. Aus unserem Satze folgt noch, dass, wenn eine Differential-Gleichung sich durch einen Factor der erwähnten Art integriren lässt und $y = y_i$ eine der particulären Lösungen ist, die in dem integrirenden Factor enthalten sind, die Gleichung besteht:

$$\frac{\varphi(y_i)}{f'(y_i)} = const.$$

Diese bemerkenswerthe Eigenschaft kann zur Untersuchung von Integrabilitäts-Bedingungen benutzt werden. Endlich lassen wir auch den Umstand

nicht unbemerkt, dass alle particulären Lösungen $y = y_i$, die in dem integrirenden Factor und in dem Integrale vorkommen, gerade diejenigen Lösungen sind, welche, da sie den integrirenden Factor entweder $= 0$ oder $= \infty$ machen, aus dem allgemeinen Integrale erhalten werden können, indem man die in demselben vorkommende Constante $= 0$ oder $= \infty$ setzt.

II.

5) Wir schreiten jetzt zur Untersuchung der Integrabilitäts-Bedingungen einiger Differential-Gleichungen erster Ordnung. Die erste der Gleichungen, die wir betrachten wollen, ist die folgende:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P_1 y + P_2}{y + Q} = 0,$$

wo P_1, P_2 und Q willkürliche Functionen von x bedeuten. Das allgemeine Integral einer solchen Gleichung ist nicht bekannt. Wir stellen uns die Aufgabe, diejenigen Bedingungen zu bestimmen, denen die Functionen P_1, P_2 und Q genügen müssen, damit diese Gleichung ein Integral von einer bestimmten Form habe. Es ist leicht zu bemerken, dass die betrachtete Differential-Gleichung ein Integral der Form

$$(y - y_1)^{n_1} (y - y_2)^{n_2} = const$$

besitzt. Durch unmittelbare Differentiation entsteht nämlich:

$$\mu \cdot \Big\{ [y - (a_1 y_2 + a_2 y_1)]\, dy - \Big[\Big(a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 \frac{dy_2}{dx}\Big) y - \Big(a_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 \frac{dy_2}{dx}\Big)\Big] dx \Big\} = 0,$$

wo der Kürze halber gesetzt ist:

$$\frac{1}{n_1 + n_2} (y - y_1)^{n_1 - 1} (y - y_2)^{n_2 - 1} = \mu$$

und:

$$a_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad a_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}, \text{ mithin } a_1 + a_2 = 1.$$

Aus dieser Bemerkung folgt, dass die oben erwähnte Gleichung auf eine Gleichung der Form

$$(y + Q)\, dy + (P_1 y + P_2)\, dx = 0$$

führen muss, d. h. auf eine solche, deren Integrabilitäts-Bedingungen wir zu untersuchen beabsichtigten. Wir stellen jetzt die umgekehrte Frage: wann hat die oben erwähnte Differential-Gleichung ein Integral der oben erwähnten Art? Da in diesem Falle identisch ist:

$$\frac{P_1 y + P_2}{y + Q} = - \frac{\Big(a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 \frac{dy_2}{dx}\Big) y - \Big(a_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 \frac{dy_2}{dx}\Big)}{y - (a_1 y_2 + a_2 y_1)},$$

so müssen die Constanten a_1 und a_2, sowie die Functionen y_1 und y_2 folgenden drei Gleichungen genügen:

$$a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 \frac{dy_2}{dx} = -P_1,$$

$$a_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 \frac{dy_2}{dx} = P_2,$$

$$a_1 y_2 + a_2 y_1 = -Q,$$

und wenn die genannte Gleichung ein Integral der vorausgesetzten Art hat, so können y_1 und y_2, sowie a_1 und a_2 aus diesen drei Gleichungen, zu denen noch die Gleichung $a_1 + a_2 = 1$ kommt, bestimmt werden.

Uebrigens kann diesen Gleichungen nur bedingungsweise genügt werden, denn y_1 und y_2 sind willkürliche Functionen von x, aber a_1 und a_2 sind constante Grössen; demzufolge erhält man eine Bedingungs-Gleichung, der die Functionen P_1, P_2 und Q genügen müssen, damit unsere Gleichung ein Integral der oben erwähnten Art besitze. Integrirt man die erste der vorhergehenden Gleichungen und verbindet sie mit der letzten, so erhält man das System:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = -\int P_1\, dx,$$

$$a_1 y_2 + a_2 y_1 = -Q$$

und hieraus durch Addition und Subtraction:

$$y_1 + y_2 = -S, \quad y_1 - y_2 = \frac{1}{q} . D,$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$S = Q + \int P_1\, dx,$$

$$D = Q - \int P_1\, dx,$$

und $q = a_1 - a_2$. Weiter erhalten wir:

$$y_1 = -\frac{1}{2} S + \frac{1}{2q} D, \quad y_2 = -\frac{1}{2} S - \frac{1}{2q} D,$$

oder:

$$y_1 = \frac{1-q}{2q} Q - \frac{1+q}{2q} \int P_1\, dx$$

$$y_2 = \frac{1-q}{2q} \int P_1\, dx - \frac{1+q}{2q} Q.$$

Hier ist $q = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ und $\lambda = \frac{n_1}{n_2}$.

Offenbar ist es hinreichend λ zu kennen; denn die Grössen n_1 und n_2 können durch Potenziren beider Theile der Gleichung geändert werden, aber das Verhältniss λ hat einen constanten Werth. Um λ oder q zu bestimmen, substituiren wir die erhaltenen Grössen in die erste der Bedingungs-Gleichungen, indem wir hierbei bemerken, dass $a_1 = \frac{1}{2}(1 + q)$ und $a_2 = \frac{1}{2}(1 - q)$; wir erhalten:

$$a_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{4q^2} . D \frac{dD}{dx} + \frac{1}{4} D \frac{dS}{dx} + \frac{1}{4} S \frac{dS}{dx} - \frac{1}{4} S \frac{dD}{dx} = P_2$$

und hieraus:

$$q^2 = \frac{D\frac{dD}{dx}}{D\frac{dS}{dx} - S\frac{dD}{dx} + S\frac{dS}{dx} - 4P_2}.$$

Substituirt man für D und S ihre Werthe, so kann q^2 in folgender Weise dargestellt werden:

$$q^2 = \frac{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)\left(Q - \int P_1\, dx\right)}{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)\left(Q - \int P_1\, dx\right) + 4(P_1 Q - P_2)},$$

oder wenn man der Kürze halber setzt:

$$\frac{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)\left(Q - \int P_1\, dx\right)}{P_1 Q - P_2} = m,$$

so erhält man $q^2 = \frac{m}{m+4}$. Aber q^2 muss constant sein und hieraus folgt, dass $m = const$; wir erhalten demnach die Bedingung:

$$\frac{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)\left(Q - \int P_1\, dx\right)}{P_1 Q - P_2} = const.$$

Wenn die Functionen P_1, P_2 und Q dieser Bedingung genügen, so hat die betrachtete Gleichung ein Integral der vorausgesetzten Form. Substituirt man die Functionen P_1, P_2 und Q in die Bedingungs-Gleichung, so kann man über die Constante des unbestimmten Integrals $\int P_1\, dx$ willkürlich verfügen. Die Verification der Bedingung bestimmt die Grösse m; weiter findet man $q = \sqrt{\frac{m}{m+4}}$, und ist q bekannt, so erhält man $\lambda = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1+q}{1-q}$; endlich bestimmt man durch die früher erhaltenen Formeln die Ausdrücke y_1 und y_2, wobei man für die willkürliche Constante des Integrals $\int P_1\, dx$ denjenigen Werth nehmen muss, welcher der Bedingungs-Gleichung genügt. Demnach wird das Integral unserer Gleichung:

$$(y - y_1)^\lambda (y - y_2) = c \text{ oder } (y - y_1)^{1+q} (y - y_2)^{1-q} = const.$$

6) Ist q^2 eine negative Grösse, so wird q imaginär und das Integral erhält einen imaginären Ausdruck, der sich übrigens leicht auf einen reellen zurückführen lässt. Setzt man $q^2 = -\alpha^2$, wo α^2 eine positive Grösse bedeutet, so kann das erhaltene Integral auf folgende Art dargestellt werden:

$$\left(\frac{y-y_1}{y-y_2}\right)\left(\frac{y-y_1}{y-y_2}\right)^{\alpha\sqrt{-1}} = const,$$

oder, wenn für y_1 und y_2 deren Ausdrücke substituirt werden:

$$\left[\left(y + \frac{S}{2}\right)^2 + \frac{D^2}{4\alpha^2}\right]\left\{\frac{y + \frac{S}{2} + \frac{D}{2\alpha}\sqrt{-1}}{y + \frac{S}{2} - \frac{D}{2\alpha}\sqrt{-1}}\right\}^{\alpha\sqrt{-1}} = const.$$

Die imaginäre Form des Integrals kann durch eine reelle ersetzt werden, wenn man

$$\frac{y+\frac{S}{2}+\frac{D}{2\alpha}\sqrt{-1}}{y+\frac{S}{2}-\frac{D}{2\alpha}\sqrt{-1}} = re^{\varphi\sqrt{-1}}$$

setzt. Wir erhalten hieraus

$$\varphi = arctg\frac{\frac{D}{\alpha}\left(y+\frac{S}{2}\right)}{\left(y+\frac{S}{2}\right)^2-\frac{D^2}{4\alpha^2}}, \quad r=1;$$

das Integral wird daher

$$\left[\left(y+\frac{S}{2}\right)^2+\frac{D^2}{4\alpha^2}\right].\, e^{-\alpha\varphi} = const,$$

oder für $\frac{D}{2\alpha}=A$, $y+\frac{S}{2}=B$,

$$\varphi = arctg\frac{2AB}{B^2-A^2} = 2\, arctg\frac{A}{B} = 2\, arctg\frac{D}{2\alpha\left(y+\frac{S}{2}\right)},$$

und das betrachtete Integral erhält die Form

$$\left[\left(y+\frac{S}{2}\right)^2+\frac{D^2}{4\alpha^2}\right].\, e^{-2\alpha\,.\,arctg\frac{D}{2\alpha\left(y+\frac{S}{2}\right)}} = const,$$

oder

$$log.\left[\left(y+\frac{S}{2}\right)^2+\frac{D^2}{4\alpha^2}\right]-2\alpha\,.\,arctg\frac{D}{2\alpha\left(y+\frac{S}{2}\right)} = C,$$

in welcher für D und S die früher gefundenen Werthe substituirt werden können.

7) Betrachten wir einige besondere Fälle. Wenn $P_1Q-P_2=0$, so ist $m=\infty$; in diesem Falle geht unsere Gleichung in folgende

$$\frac{dy}{dx}+P_1=0$$

über, die unmittelbar integrirt werden kann. Wenn $Q-\int P_1\,dx=0$, so ist $m=0$; in diesem Falle ist $q=a_1-a_2=0$ und die vorhergehende Formel nicht anwendbar. Da hier $n_1=n_2$, so wird das Integral

$$(y-y_1)(y-y_2) = const$$

und wir erhalten demnach zwei Bedingungs-Gleichungen

$$\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx} = -2P_1 = -2\frac{dQ}{dx}$$

$$y_1\frac{dy_2}{dx}+y_2\frac{dy_1}{dx} = 2P_2,$$

aus denen man leicht findet, dass das Integral in diesem Falle sein wird

$$y^2 + 2Qy + 2\int P_2 dx = const.$$

Die gegebene Differential-Gleichung kann in diesem Falle in der Form eines vollständigen Differentials dargestellt werden.

Es giebt einen noch mehr bemerkenswerthen besonderen Fall, in welchem, obgleich die erwähnte Integrabilitäts-Bedingung erfüllt ist, das Integral dennoch nicht nach der angegebenen Weise erhalten werden kann, sondern sich unter einer anderen Form darstellt. Dieser Fall entspricht $m = -4$; hierbei wird $q = \infty$ und die früheren Resultate werden unanwendbar. Es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle die Form des Integrals eine andere ist, nämlich dass die gegebene Differential-Gleichung in diesem Falle aus einer ursprünglichen Gleichung von der Form

$$(y - y_1) \, . \, e^{\frac{X}{y - y_1}} = const.$$

entsteht. In der That, differenzirt man diese Gleichung, so erhält man die vollständige Differential-Gleichung

$$\mu . \left\{ \left[y - (X + y_1) \right] dy + \left[\left(\frac{dX}{dx} - \frac{dy_1}{dx} \right) y + X \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dX}{dx} + y_1 \frac{dy_1}{dx} \right] dx \right\} = 0,$$

in welcher der Factor

$$\mu = \frac{1}{y - y_1} \, . \, e^{\frac{X}{y - y_1}}$$

ist. Die beiden Functionen y_1 und X, die im Integrale vorkommen, müssen jetzt folgenden drei Gleichungen genügen:

$$\frac{dX}{dx} - \frac{dy_1}{dx} = P_1,$$

$$X + y_1 = -Q,$$

$$(X + y_1) \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dX}{dx} = P_2.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man

$$X = -\tfrac{1}{2} \left(Q - \int P_1 \, dx \right),$$

$$y_1 = -\tfrac{1}{2} \left(Q + \int P_1 \, dx \right).$$

Substituirt man diese Werthe in die dritte Gleichung, so erhält man die Bedingung

$$\frac{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1 \right) \left(Q - \int P_1 dx \right)}{P_1 Q - P_2} = -4,$$

welcher die Functionen P_1, P_2 und Q genügen müssen.

Hieraus ergiebt sich, dass die Bedingung der Integrabilität in diesem Falle wirklich $q = \infty$ ist.

8) Die betrachtete Differential-Gleichung kann auch ein Integral v
der Form

$$e^{y+X}(y-y_1)^n = const$$

haben, wo X und y_1 Functionen von x, und n eine constante Grösse l
deuten. Vergleicht man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus dieser Gleichung mit de
jenigen, welcher aus unserer Differential-Gleichung erhalten wird, so l
man identisch

$$\frac{P_1 y + P_2}{y + Q} = \frac{\frac{dX}{dx} y - \left(n\frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{dX}{dx}\right)}{y + n - y_1}.$$

Wenn also die gegebene Differential-Gleichung ein Integral der ob
erwähnten Art besitzt, so müssen die Functionen X und y_1 und die Co
stante n sich aus folgenden drei Gleichungen bestimmen:

$$\frac{dX}{dx} = P_1,$$

$$n\frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{dX}{dx} = - P_2,$$

$$n - y_1 = Q.$$

Hieraus ergiebt sich

$$X = \int P_1 \, dx \text{ und } y_1 = n - Q$$

und weiter erhalten wir die Bedingungs-Gleichung

$$\frac{P_1 Q - P_2}{\frac{dQ}{dx} - P_1} = n = const.$$

Diese Bedingung erleidet die Ausnahmen, die schon früher erwäh
worden sind.

9) Wenden wir die vorhergehenden Betrachtungen auf einige Be
spiele an. Betrachten wir zuerst die bekannte Gleichung

$$(a_1 y + b_1 x + c_1)\, dy + (a y + b x + c)\, dx = 0.$$

Für $a_1 = 1$ wird $P_1 = a$; $P_2 = bx + c$ und $Q = b_1 x + c_1$; die Be
dingung der Integrabilität ist in diesem Falle

$$m = \frac{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)\left(Q - \int P_1 dx\right)}{P_1 Q - P_2} = \frac{(b_1 - a)^2 x + (b_1 - a)(c_1 - k)}{(a b_1 - b) x + a c_1 - c} = const,$$

wo k eine unbestimmte Constante bedeutet. Setzt man

$$\frac{c_1 - k}{b_1 - a} = \frac{a c_1 - c}{a b_1 - b},$$

oder

$$k = c_1 - \frac{a c_1 - c}{a b_1 - b}(b_1 - a),$$

so wird

$$m = \frac{(b_1 - a)^2}{a b_1 - b}, \quad q = \frac{b_1 - a}{\sqrt{(b_1 + a)^2 - 4b}}$$

und hieraus ergiebt sich leicht

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 \text{ und } y_2 = \alpha_2 x + \beta_2,$$

wo α_1 und α_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 + (b_1 + a)\alpha + b = 0$$

sind. Die Werthe von β_1 und β_2, welche den Grössen α_1 und α_2 entsprechen, erhält man durch die Formel

$$\beta = \frac{bc_1 - b_1 c + (ac_1 - c)\alpha}{ab_1 - b}.$$

Das Integral der betrachteten Differential-Gleichung wird demnach

$$(y - \alpha_1 x - \beta_1)^{1+q}(y - \alpha_2 x - \beta_2)^{1-q} = const.$$

Wenn $(b_1 + a)^2 < 4b$, so lässt sich leicht diese Form des Integrals, wie früher bemerkt worden ist, in eine reelle umformen.

Ist $b_1 = a$, so wird die gegebene Gleichung ein vollständiges Differential. Ist $ab_1 = b$, so erhält das Integral unserer Gleichung eine andere Form, weil alsdann, wenn a und b_1 nicht gleich sind, m keine constante Grösse sein kann. In diesem Falle ist die Bedingung

$$n = \frac{P_1 Q - P_2}{\frac{dQ}{dx} - P_1} = \frac{ac_1 - c}{b_1 - c} = const.$$

erfüllt und man erhält leicht, wie es in 8) angedeutet ist, das Integral

$$e^{y + ax}\left(y + b_1 x + c_1 - \frac{ac_1 - c}{b_1 - a}\right)^n = const.$$

Endlich wenn $(b_1 + a)^2 = 4b$, so wird $m = -4$, und die Gleichung hat ein Integral der Form

$$e^{\frac{X}{y - y_1}}(y - y_1) = const.$$

Die Functionen X und y_1, lassen sich wie früher bestimmen.

Wir entnehmen dem Memoire des Herrn Minding folgende Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{-(2 + 6x)y + 2x^3 + 3x^2 + x + a}{y + 3x^2 + x + a_1} = 0,$$

welche die früher betrachtete Form hat; es ist hier $P_1 = -2 - 6x$; $P_2 = 2x^3 + 3x^2 + x + a$; $Q = 3x^2 + x + a_1$. Bestimmt man die Grösse m, so erhält man die Bedingung

$$m = -3\,\frac{24x^3 + 18x^2 + (4a_1 - 4c + 3)x + a_1 - c}{20x^3 + 15x^2 + (6a_1 + 3)x + 2a_1 + a} = const,$$

wo c eine unbestimmte Constante bezeichnet. Diese Bedingung führt zu den Gleichungen

$$\frac{18}{5}(2a_1 + 1) = 4a_1 - 4c + 3$$

$$\frac{6}{5}(2a_1 + a) = a_1 - c,$$

von denen die letztere $c = -\frac{1}{8}(7a_1 + 6a)$ giebt, und die erste in $4a_1 + 8a = 1$ verwandelt. Setzt man voraus, dass diese letzte Bedingung erfüllt ist, so erhält man $m = -\frac{18}{5}$; $q = 3\sqrt{-1}$ und hierauf

$$S = Q + \int P_1\, dx = -x - 2\lambda,$$

$$D = Q - \int P_1\, dx = 6\left(x^2 + \frac{x}{2} + \mu\right),$$

wo der Kürze halber wie bei H. Minding $\lambda = \frac{3-4a}{40}$ und $\mu = \frac{12a_1 + 1}{40}$ gesetzt ist. Weiter erhalten wir nach der oben erwähnten Transformation, die einem imaginären Werthe von q entspricht, das Integral

$$\left[\left(y - \frac{x}{2} - \lambda\right)^2 + \left(x^2 + \frac{x}{2} + \mu\right)^2\right] e^{-6 \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{x}{2} + \mu}{y - \frac{x}{2} - \lambda}} = const.$$

Ferner betrachten wir die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(\log x + k - 1)\, y}{y + kx - x \log x} = 0,$$

welche H. Minding behandelt, indem er eine Aufgabe von Euler löst. Bestimmt man den Ausdruck, welcher mit m bezeichnet ist, so erhält man

$$m = -4 \cdot \frac{(k - \log x)x + x - \frac{c}{2}}{(k - \log x)x + x}.$$

Um der Bedingung $m = const$ zu genügen, ist es hinreichend, die unbestimmte Constante c gleich Null zu setzen; es wird alsdann $m = -4$ und man erhält in diesem Falle das Integral

$$(y - x)\, e^{-\frac{k + 1 - \log x}{y - x} x} = const.$$

10) Wir schreiten jetzt zur Betrachtung anderer complicirterer Formen des Integrals derselben Differential-Gleichung und untersuchen zuerst, welchen Bedingungen die Coefficienten unserer Gleichung genügen müssen, damit dieselbe ein Integral der Form habe

$$U = (y - y_1)^{n_1} (y - y_2)^{n_2} (y - y_3)^{n_3} = const,$$

wo y_1, y_2 und y_3 verschiedene particuläre Integrale bedeuten. Bemerkt man, dass die Form des betrachteten Integrals sich nicht ändert, wenn man $y = \eta - Q$ setzt, und dass dieselbe hierbei eine einfachere Form annimmt, so kann man, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, die Differential-Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{p_1 y + p_2}{y} = 0$$

betrachten und die Bedingungen suchen, unter denen die letztere ein Integral der oben erwähnten Art besitzt. Um wieder zu der ursprünglichen Gleichung zurückzukehren, braucht man blos p_1 und p_2 durch

$P_1 - \frac{dQ}{dx}$ und $P_2 - P_1 Q$ zu ersetzen und in dem Integrale selbst $y+Q$ statt y zu setzen. Differenzirt man die Gleichung $U = const$ und lässt den allgemeinen Factor des vollständigen Differentiales weg, so bemerkt man, dass die Gleichung

$$\frac{1}{\mu}\left\{\frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dx}dx\right\} = 0$$

identisch mit der Gleichung

$$y\,dy + (p_1 y + p_2)\,dx = 0$$

sein muss; der Kürze halber ist

$$\mu = (y-y_1)^{n_1-1}(y-y_2)^{n_2-1}(y-y_3)^{n_3-1}$$

gesetzt. Der Vergleich der Coefficienten in diesen beiden Gleichungen führt zu folgenden Bedingungs-Gleichungen, die zur Bestimmung der Functionen y_1, y_2, y_3 und der Constanten n_1, n_2, n_3 dienen müssen:

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0,$$

$$n_1\frac{dy_1}{dx} + n_2\frac{dy_2}{dx} + n_3\frac{dy_3}{dx} = 0,$$

$$n_1(y_2+y_3)\frac{dy_1}{dx} + n_2(y_1+y_3)\frac{dy_2}{dx} + n_3(y_1+y_2)\frac{dy_3}{dx}$$

$$= -p_1\left\{n_1(y_2+y_3) + n_2(y_1+y_3) + n_3(y_1+y_2)\right\},$$

$$n_1 y_2 y_3\frac{dy_1}{dx} + n_2 y_1 y_3\frac{dy_2}{dx} + n_3 y_1 y_2\frac{dy_3}{dx}$$

$$= p_2\left\{n_1(y_2+y_3) + n_2(y_1+y_3) + n_3(y_1+y_2)\right\},$$

$$n_1 y_2 y_3 + n_2 y_1 y_3 + n_3 y_1 y_2 = 0.$$

Wir haben demnach fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten y_1, y_2, y_3 und $\frac{n_2}{n_1}$, $\frac{n_3}{n_1}$; die beiden letzten sind constante Grössen und wegen $\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_3}{n_1} = -1$ haben wir nur eine Bedingung, welche ausdrückt, dass eines dieser Verhältnisse constant sei. Dabei setzen wir $\frac{n_2}{n_1} = \varepsilon_2 + 1$; $\frac{n_3}{n_1} = \varepsilon_3 + 1$, so dass $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 3 = 0$. Integrirt man nun die zweite der Bedingungs-Gleichungen, so erhält man

$$n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 = \lambda,$$

wo λ eine willkürliche Constante bedeutet; setzt man ferner

$$n_1(y_2+y_3) + n_2(y_1+y_3) + n_3(y_1+y_2) = \nu,$$

so erhält man durch Addition $\lambda + \nu = 0$ oder $\lambda = -\nu$. Substituirt man in die oben erwähnten Bedingungs-Gleichungen ε_2 und ε_3 statt $\frac{n_2}{n_1}$ und $\frac{n_3}{n_1}$ und setzt $\frac{\lambda}{n_1} = \alpha$,

$$y_1 + y_2 + y_3 = -X_1,$$
$$y_2 y_3 + y_1 y_3 + y_1 y_2 = X_2,$$
$$y_1 y_2 y_3 = -X_3,$$

so erhält man

$$-X_1 + \varepsilon_2 y_2 + \varepsilon_3 y_3 = \alpha,$$
$$X_2 + (\varepsilon_2 y_3 + \varepsilon_3 y_2) y_1 = 0,$$

und ausserdem

$$\frac{dX_2}{dx} + \left(\varepsilon_2 \frac{dy_2}{dx} + \varepsilon_3 \frac{dy_3}{dx}\right) y_1 + \varepsilon_2 y_3 \frac{dy_2}{dx} + \varepsilon_3 y_2 \frac{dy_3}{dx} = p_1 \alpha,$$
$$-\frac{dX_3}{dx} + \left(\varepsilon_2 y_3 \frac{dy_2}{dx} + \varepsilon_3 y_2 \frac{dy_3}{dx}\right) y_1 = -p_2 \alpha;$$

und endlich noch die Gleichung $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 3 = 0$. Die Functionen X_1, X_2 und X_3 können, wie sogleich gezeigt werden soll, bestimmt werden. Multiplicirt man die erste der vier vorhergehenden Gleichungen mit y_1 und addirt sie zur zweiten, so erhält man nach Elimination von y_2, y_3 und ε_2, ε_3 die quadratische Gleichung

$$3y_1^2 + (2X_1 - \alpha) y_1 + X_2 = 0.$$

Bemerkt man ferner, dass

$$\varepsilon_2 \frac{dy_2}{dx} + \varepsilon_3 \frac{dy_3}{dx} = \frac{dX_1}{dx},$$

multiplicirt die dritte Gleichung mit y_1 und subtrahirt von derselben die vierte Gleichung, so erhält man eine andere quadratische Gleichung

$$\frac{dX_1}{dx} y_1^2 + \left(\frac{dX_2}{dx} - p_1 \alpha\right) y_1 + \frac{dX_3}{dx} - p_2 \alpha = 0,$$

der y_1 ebenfalls genügen muss. Eliminirt man y aus den beiden quadratischen Gleichungen und bestimmt α, so erhält man den Werth von y_1 durch α ausgedrückt. Bestimmen wir zuerst die Functionen X_1, X_2 und X_3.

Offenbar hat die Differential-Gleichung

$$y dy + (p_1 y + p_2) dx = 0$$

in dem betrachteten Falle einen integrirenden Factor

$$z = \frac{1}{(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)} = \frac{1}{\varphi(y)},$$

wo $\varphi(y) = y^3 + X_1 y^2 + X_2 y + X_3$. Aus der Bedingung der Integrabilität

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{y}{\varphi(y)} = \frac{d}{dy} \cdot \frac{p_1 y + p_2}{\varphi(y)}$$

erhält man durch Vergleichung der Coefficienten

$$X_1 = 2\int p_1 dx, \quad X_2 = 3\int p_2 dx + \left(\int p_1 dx\right)^2, \quad X_3 = 4\int p_2 \int p_1 dx^2$$

und hieraus ergiebt sich folgende Bedingung für die Existenz eines Factors

$$4p_1 \int p_2 \int p_1 dx^2 = p_2 \left(\int p_1 dx\right)^2 + 3p_2 \int p_2 dx.$$

Diese Bedingung muss erfüllt sein, wenn ein Integral der betrachteten Form besteht, und auch dann, wenn einige der particulären Lösungen

y_1, y_2 und y_3 gleich sind. Substituiren wir nun in die beiden quadratischen Gleichungen

$$3y_1^2+(2X_1-\alpha)y_1+X_2=0,$$

$$\frac{dX_1}{dx}y_1^2+\left(\frac{dX_1}{dx}-p_1\alpha\right)y_1+\frac{dX_3}{dx}-p_1\alpha=0$$

die Werthe von X_1, X_2 und X_3, so giebt die Elimination y_1^2

$$y_1=\frac{2R+3p_2\alpha}{S-p_1\alpha},$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist

$$p_1\left(\int p_1\,dx\right)^2+3p_1\int p_2\,dx-6p_2\int p_1\,dx=R,$$

$$9p_2-2p_1\int p_1\,dx=S.$$

Substituirt man in die erste der quadratischen Gleichungen den erhaltenen Werth von y_1 und setzt $\alpha=\frac{1}{n}$, so erhält man zur Bestimmung von n_1 die Gleichung dritten Grades

$$C_0n_1^3+C_1n_1^2+C_2n_1+C_3=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung werden, wie dies aus dem ganzen Gange der Rechnung erhellt, die Zahlen n_1, n_2, n_3 sein. Bestimmt man in der That die Coefficienten, so erhält man

$$C_0=12p_1^2\left(\int p_1\,dx\right)^2\int p_2\,dx+36p_1^2\left(\int p_2\,dx\right)^2-108p_1p_2\int p_1\,dx.\int p_2\,dx$$
$$-4p_1\,p_2\left(\int p_1\,dx\right)^3+27p_2^2\left(\int p_1\,dx\right)^2+81p_2^2\int p_2\,dx,$$

$$C_2=p_1\left\{p_1\left(\int p_1\,dx\right)^2+3p_1\int p_2\,dx-6p_2\int p_1\,dx\right\}$$

$$C_3=p_1\,p_2.$$

Ausserdem erhält man $C_1=0$, was auch zu erwarten ist, da $n_1+n_2+n_3=0$. Die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$C_0\,n^3+C_2\,n+C_3=0$$

müssen constante Zahlen sein, und demnach erhält man die zwei Bedingungen

$$\frac{C_0}{C_3}=const,\quad \frac{C_2}{C_3}=const.$$

Da aber nur eine Bedingung besteht, so muss eine der beiden letzten Bedingungen eine Folge der anderen sein, was sich übrigens unmittelbar beweisen lässt. Die letzte Bedingung ist nämlich

$$\frac{p_1\left(\int p_1\,dx\right)^2+3p_1\int p_2\,dx-6p_2\int p_1\,dx}{p_2}=\frac{R}{p_2}=\beta,$$

wo β eine willkürliche Constante bedeutet. Beweisen wir nun, dass die Bedingung $\frac{C_0}{C_3}=const$ von selbst erfüllt ist. Setzt man $\frac{p_2}{p_1}=\omega$ und $\int p_1\,dx=v$, $\alpha=\frac{1}{n_1}$, so wird:

$$y_1=\omega\cdot\frac{2\beta n_1+3}{(9\omega-2v)\,n_1-1},$$

und substituirt man diesen Werth von y_1 in die quadratische Gleichung

$$3y_1^2 + (2X_1 - \alpha)\, y_1 + X_2 = 0,$$

so erhält man:

$$\frac{C_0}{C_3} = \tfrac{1}{3}\,\{12\beta^2\omega + 8\beta v\,(9\omega - 2v) + (6v+\beta)\,(9\omega - 2v)^2\}.$$

Dieser Ausdruck enthält nur die Functionen v und ω. Um ω zu eliminiren, schreiben wir die oben angeführte Integrabilitäts-Bedingung in folgender Weise:

$$v^2 + 3\int p_2\, dx = \omega\,(6v + \beta);$$

hieraus ergiebt sich durch Differentiation und indem man bemerkt, dass $p_2 = \omega p_1$:

$$(6v + \beta)\, d\omega + 3\omega dv = 2v\, dv;$$

durch Integration erhält man:

$$\omega = \gamma\,(6v + \beta)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{27}\,(3v - \beta).$$

Dieser Ausdruck ist übrigens nur eine andere Form der Integrabilitäts-Bedingung, in welcher γ eine willkürliche Constante bedeutet. Substituirt man diesen Ausdruck für ω in $\frac{C_0}{C_3}$, so ergiebt sich:

$$\frac{C_0}{C_3} = \frac{1}{3}\left\{81\gamma^2 - \frac{4}{9}\beta^3\right\},$$

d. h. $\frac{C_0}{C_3} = const$, was zu beweisen war. Setzt man:

$$\frac{27}{729\gamma^2 - 4\beta^3} = a,$$

so erhält die Gleichung dritten Grades, die zur Bestimmung von n dient, folgende Form:

$$n^3 + a\beta n + a = 0.$$

Die willkürlichen Constanten β und γ bestimmen sich bei der Verification der Integrabilitäts-Bedingung:

$$\omega = \gamma(6v + \beta)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{27}\,(3v - \beta).$$

Durch Auflösung der Gleichung dritten Grades erhält man n_1, n_2 und n_3 und berechnet man hierauf y_1, y_2, y_3 nach der Formel:

$$y_1 = \omega.\frac{2\beta n_1 + 3}{(9\omega - 2v)\, n_1 - 1},$$

so kann man das Integral der betrachteten Differential-Gleichung unmittelbar niederschreiben.

11) Wir untersuchen jetzt den Fall, in welchem die Differential-Gleichung

$$y\, dy + (p_1 y + p_2)\, dx = 0$$

ein Integral der Form:

$$V = e^{\frac{\xi}{y-y_1}}(y-y_1)(y-y_2)^n = const$$

hat. Differenzirt man die Gleichung $V = const$, so erhält man:

$$\frac{dV}{dy} = \mu\{(n+1)y^2 - (y_1+y_2+2ny_1+\xi)y + y_1y_2 + ny_1^2 + \xi y_2\},$$

$$\frac{dV}{dx} = \mu\left\{\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{dy_1}{dx} - n\frac{dy_2}{dx}\right)y^2 - \left[(y_1+y_2)\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{dy_1}{dx}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \xi\frac{dy_1}{dx} - 2ny_1\frac{dy_2}{dx}\right]y + y_1y_2\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{dy_1}{dx}\right) - \xi y_2\frac{dy_1}{dx} - ny_1^2\frac{dy_2}{dx}\right\},$$

wo der Factor ist:

$$\mu = \frac{e^{\frac{\xi}{y-y_1}}}{y-y_1}(y-y_2)^{n-1}.$$

Da nun die Differential-Gleichung

$$\frac{1}{\mu}\cdot\left\{\frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dx}dx\right\} = 0$$

mit der betrachteten Differential Gleichung identisch sein muss, so muss erstlich $n+1=0$ sein und zweitens:

$$\frac{d\xi}{dx} - \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} = 0,$$

hieraus:

$$\xi = y_1 - y_2 - \beta,$$

wo β eine willkürliche Constante bedeutet. Alsdann erhalten wir:

$$y_1 + y_2 + 2ny_1 + \xi = -\beta.$$

Wir haben demnach zur Bestimmung von y_1, y_2, ξ und β vier Bedingungs-Gleichungen:

$$(y_1+y_2)\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{dy_1}{dx}\right) - \xi\frac{dy_1}{dx} + 2y_1\frac{dy_2}{dx} = -\beta p_1$$

$$y_1y_2\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{dy_1}{dx}\right) - \xi y_2\frac{dy_1}{dx} + y_1^2\frac{dy_2}{dx} = \beta p_2$$

$$y_1y_2 - y_1^2 + \xi y_2 = 0$$

$$\xi = y_1 - y_2 - \beta.$$

Die Integrabilitäts-Bedingung ergiebt sich aus der Lösung dieser Gleichungen, indem man ausdrückt, dass $\beta = const$ sein muss. Durch Elimination von ξ aus den beiden letzten Gleichungen erhält man:

$$(y_1-y_2)^2 + \beta y_2 = 0;$$

eliminirt man ferner ξ aus der ersten Gleichung, so kann diese in folgender Weise dargestellt werden:

$$\frac{d(y_1y_2)}{dx} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d(y_1^2+y_2^2)}{dx} + \beta\left(\frac{dy_1}{dx} + p_1\right) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration:

$$(y-y_1)^2 - 2\beta\left(y_1 + \int p_1\,dx\right) = 0.$$

Eliminirt man endlich ξ aus der zweiten Bedingungs-Gleichung vermittelst der dritten und vierten, so findet man:

$$y_1 . \frac{d . (y_1 - y_2)^2}{dx} + 2\beta p_2 = 0,$$

oder, da $(y_1 - y_2)^2 + \beta y_2 = 0$,

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} = 2p_2.$$

Wir haben demnach zur Bestimmung von y_1, y_2 und β die drei folgenden Gleichungen:

$$(y_1 - y_2)^2 + \beta y_2 = 0,$$
$$(y_1 - y_2)^2 - 2\beta\left(y_1 + \int p_1\, dx\right) = 0,$$
$$y_1 \frac{dy_2}{dx} = 2p_2.$$

Durch Elimination von β aus den ersten beiden entsteht:

$$2y_1 + 2\int p_1\, dx + y_2 = 0$$

und substituirt man den hieraus erhaltenen Ausdruck y_2 in die zweite der vorhergehenden Gleichungen, so findet man die quadratische Gleichung:

$$9y_1^2 + (12v - 2\beta)\, y_1 + 4v^2 - 2v\beta = 0,$$

wo $v = \int p_1\, dx$. Um die zweite quadratische Gleichung nach y_1 zu erhalten, bemerken wir, dass in dem betrachteten Falle die Differential-Gleichung, wie in dem vorigen Paragraphen, einen integrirenden Factor

$$z = \frac{1}{y^3 + X_1 y^2 + X_2 y + X_3} = \frac{1}{\varphi(y)}$$

hat, nur werden zwei Wurzeln von $\varphi(y)$ gleich, weil $\varphi(y) = (y - y_1)^2 (y - y_2)$. Die Coefficienten X_1, X_2 und X_3 sind offenbar dieselben wie in dem vorhergehenden Falle, so dass

$$2y_1 y_2 + y_1^2 = X_2 = v^2 + 3\int p_2\, dx.$$

Durch Elimination von y_2 erhält man die andere quadratische Gleichung:

$$3y_1^2 + 4v y_1 + v^2 + 3\int p_2\, dx = 0.$$

Aus den beiden quadratischen Gleichungen ergiebt sich:

$$y_1 = -\frac{1}{2\beta}\left(9\int p_2\, dx - v^2\right) - v$$

und folglich:

$$y_2 = \frac{1}{\beta}\left(9\int p_2\, dx - v^2\right).$$

Um eine Gleichung zu finden, aus der sich β bestimmen lässt und die demzufolge die Integrabilitäts-Bedingung darstellt, benutzen wir die Gleichung

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} = 2p_2,$$

aus der wir zuerst y_1 eliminiren; wir erhalten

$$y_2 \frac{dy_2}{dx} + 2v \cdot \frac{dy_2}{dx} + 4p_2 = 0.$$

Da aber y_2 eine Lösung unserer Differential-Gleichung darstellt, so ist:

$$y_2 \frac{dy_2}{dx} + p_1 y_2 + p_2 = 0.$$

Durch Subtraction ergiebt sich:

$$2v \frac{dy_2}{dx} - p_1 y_2 + 3p_2 = 0$$

und substituirt man für y_2 den erhaltenen Ausdruck, so findet man eine Gleichung des ersten Grades nach β, aus welcher

$$\beta = \frac{p_1\left(\int p_1\, dx\right)^2 + 3p_1 \int p_2\, dx - 6p_2 \int p_1\, dx}{p_2} = const$$

sich ergiebt. Dies ist die Bedingung der Integrabilität. Die Constante β ist dieselbe, die bei dem in vorigen Paragraphen betrachteten Falle zu bestimmen war. Statt der letzten Integrabilitäts-Bedingung darf man auch die Bedingung

$$\omega = \gamma\,(6v + \beta)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{27}\,(3v - \beta)$$

nehmen, welche, wie wir gesehen haben, aus dem Vorhergehenden abgeleitet werden kann. Die Buchstaben ω, v, γ und β haben die frühere Bedeutung. Der Unterschied zwischen dem betrachteten Falle und dem des vorigen Paragraphen besteht darin, dass die Differential-Gleichung ein Integral der Form:

$$e^{\frac{\xi}{y - y_1}}\,(y - y_1)\,(y - y_2)^{-1} = const$$

hat, wenn die Constanten β und γ der Gleichung

$$81\,\gamma^2 - \frac{4}{9}\,\beta^3 = 0$$

genügen und wenn folglich der Coefficient C_0 in der Gleichung des dritten Grades gleich Null ist. Dies lässt sich auf folgende Art beweisen. Ausser dem früheren Ausdrucke der Constanten β kann man im gegenwärtigen Falle noch einen anderen als Function derselben Coefficienten p_1 und p_2 finden. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Gleichungen:

$$y_1 \frac{dy_1}{dx} + p_1 y_1 + p_2 = 0,$$

$$y_2 \frac{dy_2}{dx} + p_1 y_2 + p_2 = 0.$$

Durch Subtraction ergiebt sich:

$$\frac{d\,.\,(y_1^2 - y_2^2)}{dx} + 2p_1\,(y_1 - y_2) = 0.$$

Substituirt man in diese Gleichung die früher gefundenen Werthe von y_1 und y_2, d. h.:

$$y_1 = -\frac{1}{2\beta}\left(9\int p_2\,dx - v^2\right) - v;\quad y_2 = \frac{1}{\beta}\left(9\int p_2\,dx - v^2\right),$$

so erhält man eine Gleichung ersten Grades in Bezug auf β, aus der sich

$$\beta = \frac{(9p_2 - 2p_1 v)\left(9\int p_2\,dx - v^2\right)}{6p_2 v - 12p_1\int p_2\,dx}$$

ergiebt. Vergleicht man nun diesen Ausdruck mit dem früher gefundenen, so muss identisch sein:

$$\frac{p_1 v^2 + 3p_1\int p_2\,dx - 6p_2 v}{p_2} = \frac{(9p_2 - 2p_1 v)\left(9\int p_2 dx - v^2\right)}{6p_2 v - 12p_1\int p_2\,dx},$$

oder:

$$12p_1^2 v^2 \int p_2 dx + 36p_1^2\left(\int p_2 dx\right)^2 - 108 p_1 p_2 v\int p_2\,dx$$
$$- 4p_1 p_2 v^3 + 27p_1^2 v^2 + 81 p_2^2 \int p_2 dx = 0,$$

d. h. $C_0 = 0$ und folglich:

$$81\gamma^2 - \frac{4}{9}\beta^3 = 0.$$

Wenn daher die Integrabilitäts-Bedingung

$$\omega = \gamma\,(6v + \beta)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{27}(3v - \beta)$$

erfüllt ist, aber β und γ solche Werthe haben, dass $81\gamma^2 - \frac{4}{9}\beta^3 = 0$, so hat die betrachtete Differential-Gleichung ein Integral der Form:

$$e^{\frac{\xi}{y-y_1}}(y - y_1)(y - y_2)^{-1} = const,$$

in welcher die particulären Lösungen y_1 und y_2 nach den oben gegebenen Ausdrücken bestimmt werden und die Function ξ sich aus der Gleichung

$$\xi = y_1 - y_2 - \beta$$

bestimmt.

12) Die in den beiden letzten Paragraphen gegebene Analyse zeigt, auf welche Weise die Differential-Gleichungen zu untersuchen sind, deren Integrale in der betrachteten Form dargestellt werden können. Zur grösseren Klarheit des Ganges dieser Untersuchungen geben wir noch ein Beispiel. Wir untersuchen nämlich die Bedingungen, unter welchen die Differential-Gleichung

$$y\,dy + [(a_0 x + a_1)\,y + b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3]\,dx = 0$$

die zwei in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten Formen von Integralen hat. Im gegenwärtigen Falle ist

$$p_1 = a_0 x + a_1;\quad v = \int p_1\,dx = \frac{a_0}{2}x^2 + a_1 x + \alpha,$$

wo α eine willkürliche Constante bedeutet. Die Bedingung der Integrabilität unter der Form

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma}{(6v+\beta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{27}(6v - 3\beta)$$

zeigt, dass, da p_2 eine ganze Function ist, $6v+\beta$ ein vollständiges Quadrat sein muss, also:

$$6v + \beta = \left(x\sqrt{3a_0} + \frac{3a_1}{\sqrt{3a_0}}\right)^2, \quad 6\alpha + \beta = \frac{3a_1^2}{a_0}.$$

Demnach erhält man aus der Integrabilitäts-Bedingung:

$$p_2 = \gamma_1 + \frac{1}{9a_0}(a_0 x + a_1)^3 - \frac{\beta}{9}(a_0 x + a_1),$$

wo $\gamma_1 = \frac{\gamma\sqrt{3a_0}}{3}$ eine willkürliche Constante ebenso wie β ist. Substituirt man $a_0 = 3a$, so hat man die Differential-Gleichung:

$$y\,dy + [(3ax + a_1)\,y + a^2x^3 + aa_1\,x^2 + b_2\,x + b_3]\,dx = 0,$$

deren Integral bestimmt werden und unter einer der beiden Formen:

$$(y - y_1)^{n_1}(y - y_2)^{n_2}(y - y_3)^{n_3} = const,$$

$$e^{\frac{\xi}{y - y_1}}(y - y_1)(y - y_2)^{-1} = const$$

dargestellt werden kann. Für specielle Werthe der Constanten a, a_1, b_2 und b_3 kann die Integration bis zu Ende durchgeführt werden. Z. B. für

$$a = -1, \; a_1 = -2, \; b_2 = b_3 = 0,$$

wird die Differential-Gleichung:

$$y\,dy - (3x + 2)\,y\,dx + (x^3 + 2x^2)\,dx = 0.$$

Nach der früheren Bedeutung der Buchstaben hat man im gegenwärtigen Falle:

$$6v + \beta = -(3x+2)^2; \quad (6v + \beta)^{+\frac{1}{2}} = i(3x+2); \quad 6\alpha + \beta = -4$$

und die Bedingung der Integrabilität reducirt sich auf die Gleichung:

$$p_2 = x^3 + 2x^2 = x^3 + 2x^2 + \frac{4+\beta}{3}x + \frac{8+6\beta}{27} + \gamma i,$$

aus der man erhält:

$$\frac{4+\beta}{3} = 0, \quad \frac{8+6\beta}{27} + \gamma i = 0$$

und folglich $\beta = -4$; $\alpha = 0$; $\gamma^2 = -\left(\frac{16}{27}\right)^2$. Es ist hier

$$81\gamma^2 - \frac{4}{9}\beta^3 = 0,$$

und deshalb hat das Integral die Form:

$$e^{\frac{\xi}{y - y_1}}(y - y_1)(y - y_2)^{-1} = const.$$

Zur Bestimmung von y_1 und y_2 muss man zuerst die Bedeutung der Constanten des Integrales $\int p_2\,dx$ finden und zu diesem Zwecke verificiren wir die Integrabilitäts-Bedingung:

$$v^2 + 3\int p_2\,dx = \frac{p_2}{p_1}(6v+\beta).$$

Substituirt man hier für p_1 und p_2 deren Ausdrücke, so wird:

$$\left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)^2 + \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + 3\delta = (x^3+2x^2)(3x+2).$$

Hieraus folgt, dass die erwähnte Constante $\delta = 0$ ist. Weiter erhalten wir:

$$W = 9\int p_2\,dx - v^2 = -4x^2$$

und folglich:

$$y_1 = -\frac{W}{2\beta} - v = x^2+2x;\quad y_2 = \frac{W}{\beta} = x^2;\ \xi = y_1 - y_2 - \beta = 2x+4.$$

Aus der angeführten Rechnung ergiebt sich, dass die Differential-Gleichung

$$y\,dy - (3x+2)\,y\,dx + (x^3+2x^2)\,dx = 0$$

das Integral hat:

$$\frac{e^{\frac{2x+4}{y-x^2-2x}}(y-x^2-2x)}{y-x^2} = const.$$

Indem wir uns nicht weiter bei speciellen Beispielen aufhalten wollen, bemerken wir endlich noch, dass eine Differential-Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P_1y^2+P_2y+P_3}{y+Q} = 0,$$

durch eine lineare Substitution $y = mu + n$ leicht in die Form

$$\frac{du}{dx} + \frac{p_1u+p_2}{u} = 0$$

umgestaltet werden kann. Diese Bemerkung liefert das Mittel zur Integration der vorhergehenden Gleichung, wenn deren Integral eine der beiden Formen hat:

$$(y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2}(y-y_3)^{n_3} = const,$$

$$e^{\frac{\xi}{y-y_1}}(y-y_1)(y-y_2)^{-1} = const,$$

wo $n_1+n_2+n_3 = 0$. In der That ändert die Substitution $y = mu + n$ nicht die Form dieser Integrale und deshalb besitzt die Gleichung:

$$\frac{du}{dx} + \frac{p_1u+p_2}{u} = 0$$

ein Integral von derselben Form wie die gegebene und kann auf die angegebene Art integrirt werden.

Die bekannte Gleichung von Jacobi:

$$(a_0+a_1x+a_2y)\,dx + (b_0+b_1x+b_2y)\,dy + (c_0x+c_1y)(x\,dy-y\,dx) = 0$$

ist in der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P_1y^2+P_2y+P_3}{y+Q} = 0$$

enthalten und da dieselbe den integrirenden Factor

$$\frac{1}{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}$$

hat, wo y_1, y_2 und y_3 lineare Functionen von x bedeuten, die gleich oder verschieden sind, so kann jene Gleichung durch die angegebene Methode integrirt werden.

III.

13) Bei der Untersuchung von Differential-Gleichungen, deren Integral von der Form

$$e^{\lambda}(y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2}=const$$

ist, wo λ, y_1, y_2 willkürliche Functionen von x bedeuten und n_1, n_2 constante Grössen sind, erwähne ich noch den besonders interessanten Fall $n_1+n_2=0$, in welchem das Integral der Differential-Gleichung die Form:

A) $$U=e^{\lambda}\left(\frac{y-y_1}{y-y_2}\right)=const$$

hat. Die Differential-Gleichung:

$$\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dx}dx=0,$$

die sich durch unmittelbare Differentiation der Gleichung A) ergiebt, steht unter der Form:

$$\mu\,.\,[dy+(X_1y^2+X_2y+X_3)\,dx]=0;$$

der integrirende Factor ist:

$$\mu=\frac{e^{\nu}}{(y-y_2)^2},\quad \nu=\lambda+log\,(y_1-y_2)$$

und die Coefficienten X_1, X_2 und X_3 bedeuten Functionen von x, die folgenden drei Gleichungen genügen:

B) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\lambda}{dx}=(y_1-y_2)X_1,\\ &\frac{d(y_2-y_1)}{dx}-(y_1+y_2)\frac{d\lambda}{dx}=(y_1-y_2)X_2,\\ &y_1y_2\frac{d\lambda}{dx}+y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}=(y_1-y_2)X_3.\end{aligned}\right.$$

Hieraus ergiebt sich umgekehrt, dass die Differential-Gleichung:

1) $$\frac{dy}{dx}+X_1y^2+X_2y+X_3=0$$

ein Integral hat, welches in der Form von A) dargestellt werden kann, wenn nur die in demselben vorkommenden Functionen y_1, y_2 und λ nach den gegebenen Coefficienten X_1, X_2 und X_3 aus den Gleichungen B) bestimmt sind und dass ausserdem die Gleichung 1) immer einen integrirenden Factor von der Form:

$$\mu=\frac{e^{\nu}}{(y-y_2)^2}$$

besitzt, wo ν und y_2 Functionen von x sind und folglich auch einen Factor von der Form:

$$\frac{\mu}{U} = \frac{1}{r(y-y_1)(y-y_2)},$$

wo r ebenfalls eine Function von x ist. Beiläufig bemerken wir, dass eine particuläre Lösung hinreicht, um die Gleichung 1) zu integriren (Euler); betrachten wir z.B. die Lösung $y=y_2$ als bekannt, so ist nach der zweiten der Gleichungen B):

$$\log(y_1-y_2) = -\int X_1(y_1+y_2)\,dx - \int X_2\,dx;$$

bestimmt man hierauf ν, so erhält man den integrirenden Factor:

$$\mu = \frac{e^{-\int(2X_1y_2+X_2)dx}}{(y-y_2)^2},$$

der also nur von einer particulären Lösung $y=y_2$ abhängt. Um das allgemeine Integral in Abhängigkeit von einer particulären Lösung zu erhalten, setzen wir in der Gleichung 1) $y=y_2+z$ und erhalten zur Bestimmung von z die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} + X_1z^2 + (2X_1y_2+X_2)z = 0,$$

deren Integral bekanntlich

$$z = \frac{e^{-M}}{c+\int X_1e^{-M}dx}$$

ist, wo c eine willkürliche Constante bedeutet und $M=\int(2X_1y_2+X_2)\,dx$ ist. Kennt man z, so erhält man leicht das allgemeine Integral der Gleichung 1), das in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$\int X_1e^{-M}dx \cdot \left\{\frac{y-y_1-\dfrac{e^{-M}}{\int X_1e^{-M}dx}}{y-y_1}\right\} = const.$$

Hieraus erhellt, dass zwischen den beiden particulären Lösungen y_1 und y_2 eine bestimmte Abhängigkeit besteht, nämlich:

$$y_1 = y_2 + \frac{e^{-M}}{\int X_1e^{-M}dx}.$$

Es ist leicht nachzuweisen, dass der Factor $\int X_1e^{-M}dx$, den wir in unserem Beispiele gefunden, derselbe Factor e^{λ} ist, der unter der Form A) dargestellt ist.

14) Man könnte glauben, dass die Integration der Gleichung 1) durch algebraische und gewöhnliche transcendente Functionen, selbst durch eine endliche Zahl von unbestimmten Quadraturen im Allgemeinen unmöglich sei, da diese Gleichung einen sehr speciellen Fall der Riccati'schen Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = ax^n$$

darstellt, von welcher Liouville bewiesen hat, dass sie allgemein durch unbestimmte Quadraturen nicht integrabel ist (*Journal de Mathematiques T. VI, p.* 1). Die Gleichung von Riccati (*Acta Eruditorum* 1724) war bekanntlich ein Gegenstand der besonderen Aufmerksamkeit der Geometer, bis endlich Liouville zeigte, dass die Fälle

$$n = \frac{-4i}{2i \pm 1},$$

wo i eine ganze Zahl bedeutet, die einzigen sind, in denen die Integration in endlicher Form durch unbestimmte Quadraturen möglich ist. Nach dem Erscheinen des Memoires von Liouville war die Aufmerksamkeit auf die Möglichkeit gelenkt, die Gleichung von Riccati zu verallgemeinern und complicirtere Formen auf dieselbe zu reduciren. In dieser Beziehung sind die Arbeiten von Malmstén, Kummer, Spitzer, Hargreave, Cockle u. A. bekannt.

Die folgenden Untersuchungen führen zu einer neuen Verallgemeinerung, welche fast alle bis jetzt bekannten Generalisirungen und ausserdem noch viele andere Gleichungen enthält, deren Integrale durch specielle Methoden aufgefunden worden sind.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen die Integration der Gleichung 1) durch eine begrenzte Zahl von unbestimmten Quadraturen möglich sei. Bei diesen Untersuchungen können mit grossem Vortheile die Gleichungen B) benutzt werden, und wir wollen hier ein Beispiel ähnlicher Untersuchungen anführen, das, wie uns scheint, nicht ohne Interesse ist, vorzüglich aus dem Grunde, weil dasselbe sich an die Untersuchungen vieler neueren Geometer anschliesst.

Die allgemeine Integration der Gleichungen B) ist natürlich ebenso schwierig, wie die der Gleichung 1); es kann aber specielle Fälle geben, in denen sich dieselbe vereinfacht. Setzen wir z. B. voraus, dass den particulären Lösungen die Eigenschaften

$$y_1 + y_2 = 0, \quad y_1 = -y_2$$

zukommen, so giebt die zweite der Gleichungen B):

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{y_1 - y_2} = -X_2\,dx \text{ und hieraus: } y_1 - y_2 = e^{-\int X_2 dx},$$

folglich erhalten wir:

$$y_1 = \tfrac{1}{2} e^{-\int X_2 dx}, \quad y_2 = -\tfrac{1}{2} e^{-\int X_2 dx}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die dritte der Gleichungen, so erhält man die Bedingung:

$$X_1 \,.\, e^{-2\int X_2 dx} + 4 X_3 = 0.$$

Indem man den Werth der willkürlichen Constante des Integrals $\int X_2\,dx$ ändert, kann man statt desselben das Integral $\int X_2\,dx - \log 2$ setzen und demzufolge die Bedingungs-Gleichung in einfacherer Form darstellen:

$$\text{C)} \qquad X_3 + X_1 e^{-2\int X_2 dx} = 0,$$

mithin werden die particulären Lösungen:

$$y_1 = e^{-\int X_2\, dx} \text{ und } y_2 = -e^{-2\int X_2\, dx}.$$

Es ergiebt sich dann aus der ersten der Gleichungen B):

$$k = 2\int X_1 e^{-\int X_2\, dx}\, dx.$$

Auf solche Weise wird, wenn die Coefficienten der Gleichung 1) der Bedingung C) genügen, als Integral dieser Gleichung erhalten:

$$\text{D)} \qquad e^{2\int X_1 e^{-\int X_2 dx}\, dx} \left\{ \frac{y - e^{-\int X_2 dx}}{y + e^{-\int X_2 dx}} \right\} = const.$$

Nehmen wir z. B. die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + a x^n y^2 - b x^p y = c x^m.$$

Hier ist $X_1 = a x^n$; $X_2 = -b x^p$ und $X_3 = -c x^m$, folglich wird die Integrabilitäts-Bedingung für diesen Fall:

$$\frac{c}{a} x^{m-n} = k \,.\, e^{2b\int x^p dx}.$$

Dieser Bedingung lässt sich offenbar genügen, wenn man $p = -1$, $m - n = 2b$, die Constante $k = \frac{c}{a}$ setzt, und nach der Formel D) kann man unmittelbar das Integral der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + a x^n y^2 - \frac{b}{x} y = c x^{n+2b}$$

niederschreiben.

Setzt man in der Gleichung 1)

$$X_1 = 1 \text{ und } X_2 = \frac{a x^{m-1}}{x^m - b},$$

so erhält man aus der Integrabilitäts-Bedingung C):

$$X_3 = -e^{-2\int X_2 dx} = -\beta^2 (x^m - b)^{-\frac{2a}{m}}$$

und folglich kann man wieder nach der Formel D) das Integral der Gleichung (Cockle):

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + \frac{a x^{m-1}}{x^m - b} y = \frac{\beta^2}{(x^m - b)^{\frac{2a}{m}}}$$

angeben; dabei bemerken wir, dass für $y = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$ diese Gleichung in eine lineare Gleichung der zweiten Ordnung übergeht, nämlich:

$$\frac{d^2u}{dx} + \frac{a x^{m-1}}{x^m - b} . \frac{du}{dx} - \frac{\beta^2}{(x^m - b)^{\frac{2a}{m}}} u = 0.$$

Für $a = 1$, $m = 2$ und $b = 1$ wird hieraus die bekannte Gleichung:

$$(x^2 - 1)\frac{d^2u}{dx^2} + x . \frac{du}{dx} - \beta^2 u = 0.$$

15) Wir kehren nun zu der Gleichung 1) zurück, um die ferneren Bedingungen ihrer Integrabilität zu untersuchen. Zunächst sei bemerkt, dass man, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, $X_1 = 1$ setzen darf, weil die Gleichung in eine andere transformirt werden kann, in welcher $X_1 = 1$ ist. Zu diesem Zwecke dient die Substitution $y = \alpha z$; die Gleichung 1) wird dann:

$$\frac{dz}{dx} + X_1 \alpha z^2 + \left(X_2 + \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dx}\right) z + \frac{X_3}{\alpha} = 0$$

und geht für $X_1 \alpha = 1$ oder $\alpha = \frac{1}{X_1}$ in folgende über:

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + \left(X_2 - \frac{1}{X_1}\frac{dX_1}{dx}\right) z + X_1 X_3 = 0.$$

Wir betrachten demnach die Differential-Gleichung:

$$2) \qquad \frac{dz}{dx} + z^2 + X_2 z + X_3 = 0;$$

von den Integrabilitäts-Bedingungen dieser letzteren ist der Uebergang zu den Integrabilitäts-Bedingungen der Gleichung 1) leicht, man braucht nur X_2 durch $X_1 - \frac{1}{X_2}\frac{dX_1}{dx}$ und X_3 durch $X_1 X_3$ zu ersetzen. Die Bedingung der Integrabilität C) der Gleichung 2) reducirt sich auf

$$D) \qquad X_3 + e^{-2\int X_2 dx} = 0;$$

die Integration der Gleichung 2) hängt ab von der Integration der linearen Gleichung:

$$3) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + X_2 \frac{du}{dx} + X_3 u = 0,$$

weil letztere durch die Transformation $u = e^{\int y dx}$ in eine Gleichung der Form 2) übergeht; die Bedingungen der Integrabilität für die Gleichung 2) sind daher auch die Bedingungen der Integrabilität für Nr. 3); auf die Integration der letzteren reducirt sich aber die Integration der linearen Gleichung mit einem letzten Gliede.

Wenden wir auf die Gleichung 2) eine Reihe von Transformationen an, deren Gesammtheit zu einem gewissen Kettenbruche führt; setzen wir nämlich $z = \alpha_1 + \frac{1}{z_1}$, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{d\alpha_1}{dx} - \frac{1}{z_1^2}\cdot\frac{dz_1}{dx} + \alpha_1^2 + \frac{2\alpha_1}{z_1} + \frac{1}{z_1^2} + X_2\alpha_1 + \frac{X_2}{z} + X_3 = 0.$$

Zur Bestimmung der Function α_1 setzen wir:

$$\frac{d\alpha_1}{dx} + \alpha_1^2 + X_2\alpha_1 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich integriren; wir erhalten aus derselben:

$$\alpha_1 = \frac{e^{-\int X_2 dx}}{c + \int e^{-\int X_2 dx} dx} = \frac{d}{dx}.\log \int e^{-\int X_2 dx} dx.$$

Ausserdem bemerken wir die particuläre Lösung $\alpha_1 = 0$. Zufolge der ersten Bedeutung von α_1 erhalten wir:

$$\frac{dz_1}{dx} - X_3 z_1^2 - (X_2 + 2\alpha_1) z_1 - 1 = 0.$$

Für $\alpha_1 = 0$ dagegen wird die transformirte Gleichung:

$$\frac{dz_1}{dx} - X_3 z_1^2 - X_2 z_1 - 1 = 0.$$

Wenden wir auf die erste der beiden vorhergehenden Gleichungen die Integrabilitäts-Bedingung C) an, so erhalten wir die neue Bedingung:

$$\text{D})^{II} \qquad X_3 = -e^{-2\int(X_2 + 2\alpha_1)dx},$$

wo α_1 die oben bestimmte Bedeutung hat. Die Integrabilitäts-Bedingung der zweiten Gleichung ist:

$$\text{C})^{I} \qquad X_3 = -e^{-2\int X_2 dx}.$$

Die letzte Bedingung ist dieselbe wie C). Wenn nun die Bedingung D)^{II} erfüllt ist, so kann die Gleichung 2) integrirt werden. Auf die Gleichung in Beziehung für z_1 wenden wir wieder die frühere Transformation $z_1 = \alpha_2 + \frac{1}{z_2}$ an und erhalten:

$$\frac{d\alpha_2}{dx} - \frac{1}{z_2^2} \cdot \frac{dz_2}{dx} - X_3 \alpha_2^2 - \frac{2\alpha_2 X_3}{z_2} - \frac{X_3}{z_2} - (X_2 + 2\alpha_1)\alpha_2$$
$$- (X_2 + 2\alpha_1)\frac{1}{z_2} - 1 = 0.$$

Zur Bestimmung von α_2 setzen wir:

$$\frac{d\alpha_2}{dx} - X_3 \alpha_2^2 - (X_2 + 2\alpha_1)\alpha_2 = 0;$$

hieraus ergiebt sich durch Integration:

$$X_3 \alpha_2 = -\frac{d}{dx} \cdot \log \int X_3 e^{\int(X_2 + 2\alpha_1)dx} dx$$

und die transformirte Gleichung wird

$$\frac{dz_2}{dx} + z_2^2 + (X_2 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_1) z_2 + X_3 = 0.$$

Die andere Gleichung nach z_1 geht durch dieselbe Transformation über in:

$$\frac{dz_2}{dx} + z_2^2 + (X_2 + 2X_3\alpha_2) z_2 + X_3 = 0.$$

Wenden wir auf diese beiden letzten Gleichungen die Integrabilitäts-Bedingungen C) an, so erhalten wir die zwei neuen Bedingungen:

$$\text{D})^{III} \qquad X_3 = -e^{-2\int(X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2)dx}$$

$$\text{C})^{II} \qquad X_3 = -e^{-2\int(X_2 + 2X_3\alpha_2)dx}.$$

Die Transformation $z_2 = \alpha_3 + \frac{1}{z_3}$ führt wie im Vorhergehenden zu zwei neuen Differential-Gleichungen:

$$\frac{dz_3}{dx} - X_3 z_3^2 - (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)\, z_3 - 1 = 0$$

$$\frac{dz_3}{dx} - X_3 z_3^2 - (X_2 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)\, z_3 - 1 = 0,$$

in denen α_3 eine Function von x bedeutet, die der Gleichung:

$$\frac{d\alpha_3}{dx} + \alpha_3^2 + (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2)\,\alpha_3 = 0$$

genügen muss; hieraus ergiebt sich:

$$\alpha_3 = \frac{d}{dx} . \log \int e^{-\int (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2)dx}\, dx.$$

Die ursprüngliche Integrabilitäts-Bedingung, auf die Gleichung nach z_3 angewandt, giebt zwei neue Bedingungen:

D)^{IV} $$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)dx},$$

C)^{III} $$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)dx}.$$

Setzt man nun $z_3 = \alpha_4 + \frac{1}{z_4}$, so erhält man folgende zwei Bedingungen der Integrabilität der Gleichung 2):

D)^{V} $$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2X_3\alpha_4)\,dx},$$

C)^{IV} $$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2X_3\alpha_4)dx},$$

wo α_4 aus der Formel

$$X_3\,\alpha_4 = -\frac{d}{dx} . \log \int X_3 . e^{\int (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)\,dx}\, dx$$

bestimmt wird u. s. w. Auf diese Weise ergeben sich durch successive Transformationen zwei unbegrenzte Reihen von Integrabilitäts-Bedingungen der Gleichung 2), von der einen Seite die Reihe Bedingungen D)^{I}, D)^{II}, D)^{III}, von der anderen die Reihe C)^{I}, C)^{II}, C)^{III}. Die in diesen Gleichungen vorkommenden Functionen α_1, α_2, α_3 genügen gewissen Differential-Gleichungen, die integrirt werden können; für diese Functionen haben wir oben eine Reihe von Ausdrücken erhalten, die nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden.

Die gefundenen Integrabilitäts-Bedingungen der Gleichung 2) lassen sich ebenfalls eine aus der anderen nach einem evidenten Gesetze ableiten; aber ihre Anwendung in dieser Form auf gegebene Differential-Gleichungen würde sehr mühsam sein. Wir wollen jetzt nachweisen, auf welche Art die beiden erhaltenen Reihen von Bedingungen in eine andere Reihe umgestaltet werden können, deren Anwendung sehr leicht ist und zu einer sehr reichen Classe von Gleichungen der Form 1) führt, die sich durch Quadraturen integriren lassen; das Integral selbst wird offenbar sich in Form eines Kettenbruches darstellen.

16) Betrachten wir zuerst die Reihe von Bedingungen D)^{I}, D)^{II}. Die erste derselben zeigt, dass man die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - e^{-2\int X_2 dx} = 0$$

integriren kann. Transformiren wir die Bedingung D)^{II}, indem wir für α_1 dessen Werth setzen, so ergiebt sich leicht, dass die Bedingung D)^{II} in folgende übergeht:

$$X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^4}$$

und dass folglich die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^4} = 0$$

integrirt werden kann.

Um die Bedingung D)^{II} zu transformiren, setzen wir zur Abkürzung $e^{-\int (X_2 + 2\alpha_1) dx} = R$; die betrachtete Bedingung lässt sich dann in folgender Weise schreiben:

$$\frac{X_3}{R} = -R \,.\, e^{-4\int X_3 \alpha_2 dx}.$$

Aus der Formel für α_2 erhält man aber

$$\int X_3 \alpha_2 dx = -\log . \int X_3 e^{\int (X_2 + 2\alpha_1) dx} dx = -\log . \int \frac{X_3}{R} dx.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die vorhergehende Gleichung, indem man $\int \frac{X_3}{R} dx = w$ setzt, so erhält man

$$-\frac{dw}{w^4} = R\, dx.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$w = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int R\, dx\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Weiter erhält man durch Differentiation

$$X_3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}} R^2 . \left(\int R\, dx\right)^{-\frac{4}{3}}.$$

Substituirt man für R seinen Ausdruck, so ergiebt sich leicht

$$X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{8}{3}}},$$

wo der constante Factor $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$ in der willkürlichen Constante des Integrals $-2\int X_2 dx$, das als Exponent vorkommt, enthalten ist.

Diese letzte Form der Bedingung zeigt, dass die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X dx} dx\right)^{\frac{8}{3}}} = 0$$

durch Quadraturen integrirt werden kann.

Auf ganz ähnliche Weise lässt sich die Integrabilitäts-Bedingung $D)^{IV}$ transformiren. Durch Integration und Differentiation erhält man in diesem Falle die transformirte Bedingung

$$X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx}\, dx\right)^{\frac{12}{5}}},$$

aus der sich die Möglichkeit der Integration von

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_{\cdot} dx} dx\right)^{\frac{12}{5}}} = 0$$

ergiebt u. s. w. Auf diese Weise können Differential-Gleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx}\, dx\right)^m} = 0$$

durch unbestimmte Quadraturen integrirt werden; der Exponent m darf hierbei die Werthe $m = 0,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \frac{12}{5}, \ldots$ haben, welche in der allgemeinen Formel

$$m = \frac{4i}{2i - 1}$$

enthalten sind, falls i eine ganze positive Zahl bedeutet. Man kann hieraus nach Analogie schliessen, dass sich durch Quadraturen im Allgemeinen Differential-Gleichungen von der Form

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx}\, dx\right)^{\frac{4i}{2i-1}}} = 0$$

integriren lassen. Wir wollen dies übrigens später mit aller Strenge beweisen.

Betrachten wir jetzt die Reihe der Integrabilitäts-Bedingungen $C)^{I}$, $C)^{II}$, $C)^{III}$.... Alle diese Bedingungen lassen sich in derselben Weise wie die vorigen transformiren, indem man in jeder derselben X_3 durch X_2 ausdrückt. Auf solche Weise ergiebt sich, wenn man der Kürze wegen $e^{-\int X_2 dx} = S$ setzt, dass $C)^{II}$ in folgender Art geschrieben werden kann:

$$\frac{X_3}{S} = -S . e^{-4\int X_3 \alpha_2 dx},$$

wo für α_2 der frühere Ausdruck substituirt werden muss, und nicht zu vergessen ist, dass in dem betrachteten Falle $\alpha_1 = 0$ ist. Demnach haben wir

$$\frac{X_3}{S} = S\left(\int \frac{X_3}{S} dx\right)^4 \text{ und hieraus } \frac{1}{3v^2} = \int S\, dx,$$

wo $v = \int \frac{X_8}{S} dx$. Aus der letzten Gleichung leiten wir zuerst v ab, und erhalten hierauf durch Differentiation

$$X_8 = -k . \left(\int S dx\right)^{-\frac{4}{3}} . S^2$$

oder, wenn wir für S seinen Ausdruck substituiren und den constanten Factor k in den Exponenten einrechnen

$$X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2\,dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2\,dx}\,dx\right)^{\frac{4}{3}}}.$$

Es lässt sich folglich die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2\,dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2\,dx}\,dx\right)^{\frac{4}{3}}} = 0$$

integriren.

Auf ähnliche Weise kann man die Bedingung C)^{III} transformiren; man erhält

$$\frac{X_3}{S} = -S\left(\int \frac{X_3}{S}\,dx\right)^4 . e^{-4\int \alpha_3\,dx}.$$

Setzt man $\alpha_1 = 0$ in dem Ausdrucke für α_3, so wird

$$\int \alpha_3\,dx = log.\int v^2\,S\,dx,$$

wo v die frühere Bedeutung hat. Nach Substitution dieses Ausdrucks in die frühere Gleichung lässt sich die Integration vollziehen und X_3 bestimmen; dies giebt

$$X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2\,dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2\,dx}\,dx\right)^{\frac{8}{5}}},$$

womit die Möglichkeit der Integration von

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2\,dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2\,dx}\,dx\right)^{\frac{8}{5}}} = 0$$

bewiesen ist.

Auf ähnliche Weise kann man auch die folgende Integrabilitäts-Bedingung der betrachteten Reihe transformiren. Aus dem Gesagten folgt, dass die Differential-Gleichungen der allgemeinen Form

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2\,dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2\,dx}\,dx\right)^m} = 0$$

durch unbestimmte Quadraturen integrirt werden können, wenn der Exponent m einen der Werthe

$$m = 0,\ \tfrac{4}{3},\ \tfrac{8}{5}, \ldots$$

hat, welche in der allgemeinen Form $m = \frac{4i}{2i+1}$ enthalten sind, falls i eine ganze positive Zahl bedeutet. Verbindet man dieses Resultat mit dem früheren, so lässt sich vermuthen, dass Gleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2\,dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2\,dx}\,dx\right)^{\frac{4i}{2i\pm 1}}} = 0$$

durch unbestimmte Quadraturen integrirt werden können.

17) Wir wollen jetzt den Beweis liefern, dass das Gesetz der Exponenten in der Reihe der integrablen Gleichungen wirklich durch die Form

$\frac{4i}{2i \pm 1}$ ausgedrückt ist. Als gegeben betrachten wir hierbei die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y + X_3 = 0, \text{ wo } X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2 d}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^m}.$$

Wenn man auf dieselbe die Transformation $y = \alpha + \frac{1}{z}$ anwendet, so geht sie, wie schon gezeigt wurde, in folgende über:

$$\frac{dz}{dx} - X_3 z^2 - (X_2 + 2\alpha) z - 1 = 0,$$

wo α der Differential-Gleichung genügt:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \alpha^2 + X_2 \alpha = 0, \text{ mithin } \alpha = \frac{d}{dx} \cdot \log \int e^{-\int X_2 dx} dx$$

oder $\alpha = 0$ ist. In die vorige Gleichung führen wir eine neue unabhängige Variable ein mittelst der Substitution

$$-\int X_3 dx = x', \quad \frac{dx'}{dx} = -X_3, \quad \frac{dz}{dx} = -X_3 \frac{dz}{dx'};$$

die transformirte Gleichung mit der unabhängigen Variablen x' ist dann

$$\frac{dz}{dx'} + z^2 + X'_2 z + X'_3 = 0,$$

wo der Kürze wegen

$$X'_2 = \frac{X_2 + 2\alpha}{X_3}, \quad X'_3 = \frac{1}{X_3}$$

gesetzt wurde. Offenbar kann man aus den beiden letzten Gleichungen X_2 eliminiren und erhält dann $X'_3 = f(X'_2)$. Bestimmen wir diese Function. Die erste der beiden letzten Gleichungen giebt

$$\int X_2 dx + 2 \log . \int e^{-\int X_2 dx} dx = -\int X'_2 dx';$$

setzt man $\int e^{-\int X_2 dx} dx = v$ und geht von den Logarithmen zu deren Zahlen über, so erhält man

$$\frac{dv}{v^2} = -X'_3 e^{-\int X'_2 dx'} dx', \text{ hieraus } v = \left\{\int X'_3 e^{-\int X'_2 dx'} dx'\right\}^{-1}.$$

Die Differentiation von v giebt weiter

$$\frac{dv}{dx} = \left\{\int X'_3 e^{\int X'_2 dx'} dx'\right\}^{-2} . e^{\int X'_2 dx'},$$

worin $X'_3 = \frac{1}{X_3} = v^m \left(\frac{dv}{dx}\right)^{-2}$; substituirt man die früher gefundenen Ausdrücke für v und $\frac{dv}{dx}$ und setzt zur Abkürzung

$$\int X'_3 e^{\int X'_2 dx'} dx' = w,$$

so erhält man die Gleichung

$$w^{m-4} dw = e^{-\int X'_2 dx'} dx' \text{ und } w = (m-3)^{\frac{1}{m-3}} \left(\int e^{-\int X'_2 dx'} dx'\right)^{\frac{1}{m-3}}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Differentiation

$$X'_3 = -\frac{e^{-2\int X'_2 dx'}}{\left(c+\int e^{-\int X'_2 dx'} dx'\right)^{\frac{m-4}{m-3}}},$$

so dass die transformirte Gleichung in folgender Form dargestellt werden kann:

$$\frac{dz}{dx'} + z^2 + X'_2 z - \frac{e^{-\int X'_2 dx'}}{\left(c+\int e^{-\int X'_2 dx'} dx'\right)^{\frac{m-4}{m-3}}} = 0.$$

Diese Gleichung hat ganz dieselbe Form wie die ursprüngliche; sie unterscheidet sich blos durch die Form des Exponenten. Folglich würden wir, wenn in der ursprünglichen Gleichung $m = \frac{4i}{2i-1}$, wo i eine ganze positive Zahl bedeutet, nach der oben angegebenen Transformation eine Gleichung derselben Art erhalten, in welcher der Exponent $m' = \frac{4-m}{3-m}$ den Werth $m' = \frac{4(i-1)}{2(i-1)-1}$ hätte; demzufolge finden wir, wenn man auf die erhaltene Gleichung wieder dieselbe Transformation anwendet, den Exponenten $m'' = \frac{4(i-2)}{2(i-2)-1}$ u. s. w., bis wir endlich zu einem Exponenten $m^{(i)} = 0$ gelangen; alsdann lässt sich die Gleichung, wie wir gesehen, unmittelbar integriren. Hieraus folgt, dass man die im Anfange dieses Paragraphen angeführte Gleichung integriren kann, wenn der Exponent $m = \frac{4i}{2i-1}$ ist. Nimmt man zu Anfange der Transformationen $\alpha = 0$ und $y = \frac{1}{z}$, so entsteht die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - X_3 z^2 - X_2 z - 1 = 0,$$

die, wenn man als unabhängige Variable $x' = -\int X_3 dx$ wählt, in folgende übergeht:

$$\frac{dz}{dx'} + z^2 + X'_2 z + X'_3 = 0,$$

wo $X'_2 = \frac{X_2}{X_3}$ und $X'_3 = \frac{1}{X_3}$. Die Elimination von X_2 aus den beiden letzten Gleichungen X_2 liefert wie früher

$$X'_3 e^{\int X'_2 dx'} \left(\int X'_3 e^{-\int X'_2 dx'} dx'\right)^{-m} = e^{-\int X'_2 dx'}.$$

Hieraus ergiebt sich nach einer der früheren ganz ähnlichen Methode:

$$X'_3 = -\frac{e^{-2\int X'_2 dx}}{\left(c+\int e^{-\int X'_2 dx'} dx'\right)^{\frac{m}{m-1}}};$$

wenn daher die Differential-Gleichung

$$\frac{dz}{dx'} + z^2 + X'_2 z - \frac{e^{-2\int X'_2 dx'}}{\left(c + \int e^{-\int X'_2 dx'} dx'\right)^{\frac{m}{m-1}}} = 0$$

integrirt werden kann, so kann auch die ursprüngliche Gleichung derselben Form mit dem Exponenten m integrirt werden. Ist in der ursprünglichen Gleichung $m = \frac{4i}{2i+1}$, so erhält man durch die betrachtete Transformation einen Exponenten $m_1 = \frac{m}{m-1} = \frac{4i}{2i-1}$; bei dieser Form des Exponenten aber lässt sich, wie wir bewiesen haben, die Gleichung integriren. Auf diese Weise kann man es als bewiesen betrachten, dass das Gesetz der Exponenten, das wir durch Analogie gefunden, wirklich stattfindet.

18) Aus dem Gesagten folgt, dass alle Gleichungen, die in der Form

$$\alpha) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}} = 0$$

enthalten sind, durch Quadraturen integrirt werden können. Ersetzt man in dieser Gleichung X_2 durch $X_2 - \frac{1}{X_1} \cdot \frac{dX_1}{dx}$ und X_2 durch $X_1 X_2$, so ergiebt sich in Uebereinstimmung mit der Bemerkung, die wir im Anfange unserer Untersuchungen gemacht haben, dass die Differential-Gleichungen der allgemeineren Form

$$\beta) \qquad \frac{dy}{dx} + X_1 y^2 + X_2 y - \frac{X_1 e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}} = 0,$$

die zwei willkürliche Functionen X_1 und X_2 enthält, durch unbestimmte Quadraturen integrirt werden können.

Was die Bestimmung des Integrals der Gleichungen α) und β) betrifft, so bemerken wir, dass die Transformationen

$$y = \alpha_1 + \frac{1}{z_1}, \quad z_1 = \alpha_2 + \frac{1}{z_2}, \quad z_2 = \alpha_3 + \frac{1}{z_3} \ldots.$$

auf die Gleichung α) angewandt, zu einer unmittelbar integrablen Gleichung führen, und dass zugleich das Integral der Gleichung α) in Form eines Kettenbruches erhalten wird, dessen Entstehungsgesetz leicht in allgemeiner Form dargestellt werden kann. Wir ziehen es aber vor, die Gleichung α) zuerst in eine lineare Gleichung zweiter Ordnung umzuformen, weil alsdann das Integral einfacher und symmetrischer ausfällt. Vorher wollen wir noch andeuten, wie man aus den gefundenen Gleichungen die bekanntesten speciellen Fälle erhält.

Um die gewöhnliche Gleichung von **Riccati** zu erhalten, braucht man nur in der Gleichung β) $X_1 = 1$ und $X_2 = 0$ zu setzen; es entsteht dann die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx^2} + y^2 = \frac{a}{(c+x)^{\frac{4i}{2i\pm 1}}},$$

wo a eine willkürliche Constante bedeutet. Für $c = 0$ findet man eine Gleichung, die alle integrabelen Fälle Riccati'schen Gleichung enthält.

Betrachten wir ferner die Differential-Gleichung:

$$x\frac{dy}{dx} + ax^n y^2 - by = cx^m,$$

die als speciellen Fall nicht nur die Gleichung von **Riccati**, sondern auch die allgemeinere Gleichung von **Malmstén** (**Crelle** 39) enthält. Hier ist $X_1 = ax^{n-1}$, $X_2 = -\frac{b}{x}$ und $X_3 = -cx^{m-1}$. Bestimmt man X_3 nach der oben gegebenen Formel, so findet man:

$$X_3 = -\frac{X_1 e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c' + \int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\zeta}} = \frac{\beta^2 a x^{n-2b-1}}{\left(c' + \frac{a\beta}{b+n} x^{n+b}\right)^{\zeta}},$$

wo $\zeta = \frac{4i}{2i \pm 1}$ und c' und β willkürliche Constanten bedeuten. Setzt man $c' = 0$ und bestimmt β so, dass $X_3 = -cx^{m-1}$, vergleicht die Exponenten und substituirt für ζ seinen Ausdruck, so erhält man folgende Bedingung der Integrabilität der betrachteten Differential-Gleichung:

$$m(2i \pm 1) + n(2i \mp 1) \mp 2b = 0;$$

in dieser Bedingung dürfen sowohl die oberen als die unteren Zeichen mit einander combinirt werden. Für $n = 1$ erhält man die Integrabilitäts-Bedingung der Gleichung von **Malmstén** und nimmt man hierbei noch $b = 0$ und ersetzt m durch $m + 1$, so erhält man die Integrabilitäts-Bedingung der **Riccati**'schen Gleichung.

19) Wenden wir uns jetzt wieder zu der Gleichung α) und setzen $y = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$, um dieselbe in eine lineare Gleichung der zweiten Ordnung umzuformen, so erhalten wir die Gleichung:

$$\gamma) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + X_2\frac{du}{dx} - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4i}{2i\pm 1}}} u = 0,$$

die folglich auch durch Quadraturen integrirt werden kann. Um das Integral dieser Gleichung zu bestimmen, setzen wir zur Abkürzung:

$$c + \int e^{-\int X_2 dx} dx = \lambda, \quad \frac{4i}{2i \pm 1} = m$$

und betrachten die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + X_2\frac{du}{dx} + X_3 u = 0,$$

worin $X_3 = -\lambda^{-m}.e^{-2\int X_2 dx}$ ist. Diese Gleichung kann durch Einführung einer neuen unabhängigen Variabeln in eine sehr einfache lineare Gleichung der zweiten Ordnung, welche die willkürliche Function X_2 nicht enthält, umgeformt werden. Mittelst der Substitution:

$$\lambda^{1-\frac{m}{2}} = t, \quad \frac{dt}{dx} = \left(1-\frac{m}{2}\right)\lambda^{-\frac{m}{2}}.\frac{d\lambda}{dx}$$

erhält man nämlich:

$$\left(1-\frac{m}{2}\right)^2\lambda^{-m}.\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2.\frac{d^2u}{dt^2}+\left(1-\frac{m}{2}\right)\left\{\lambda^{-\frac{m}{2}}.\frac{d^2\lambda}{dx^2}-\frac{m}{2}\lambda^{-\frac{m}{2}-1}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2\right.$$
$$\left.+\lambda^{-\frac{m}{2}}.X_2\frac{d\lambda}{dx}\right\}\frac{du}{dt}-\lambda^{-m}.e^{-2\int X_2 dx}.u=0.$$

Streicht man $\lambda^{-\frac{m}{2}}$ und bemerkt, dass

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}+X_2\frac{d\lambda}{dx}=0, \quad e^{-2\int X_2 dx}=\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$$

ist und lässt man den allgemeinen Factor $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$ weg, so wird:

$$\left(1-\frac{m}{2}\right)^2.\lambda^{1-\frac{m}{2}}\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{m}{2}\left(1-\frac{m}{2}\right)\frac{du}{dt}-\lambda^{1-\frac{m}{2}}.u=0$$

oder, weil $\lambda^{1-\frac{m}{2}}=t$ ist:

$$t.\frac{d^2u}{dt^2}+p\frac{du}{dt}-q^2t.u=0,$$

wo der Kürze wegen $\frac{m}{m-2}=p$ und $\frac{4}{(m-2)^2}=q^2$ gesetzt wurde. Für $u=e^{\alpha t}.v$ folgt weiter:

$$t.\frac{d^2v}{dt^2}+(p+2qt)\frac{dv}{dt}+pqv=0,$$

wenn man nur $\alpha^2=q^2$ und $\alpha=\pm q=\pm\frac{2}{m-2}$ voraussetzt, so dass man q mit den Zeichen $+$ oder $-$ nehmen kann. Die letzte Gleichung ist eine derjenigen Gleichungen, auf welche sich leicht die Integrations-Methode von Liouville durch Differentiation unbestimmter Ordnung anwenden lässt; da aber die Formeln, die man hierbei findet, das Zeichen d oft mit einem incomensurabeln oder auch imaginären Index enthalten, so scheint es besser, die Methode von Liouville nur bei Differentiationen mit ganzen positiven oder negativen Indices anzuwenden; in den Fällen aber, welche Differentiationen mit gebrochenen Indices verlangen und die den Umständen entsprechen, bei welchen die Integration durch unbestimmte Quadraturen nicht möglich scheint, ist es besser, die Methode von Laplace anzuwenden, indem man das gesuchte Integral durch bestimmte Quadraturen

ausdrückt.*) Indem wir die Methode von Liouville etwas ändern, multipliciren wir die vorige Gleichung mit dt^n und integriren jedes Glied n mal; durch theilweise Integration ergiebt sich:

$$\int^{(n)} t \frac{d^2 v}{dt^2} dt^n = t . \int^{(n-2)} v\, dt^{n-2} - n . \int^{(n-1)} v\, dt^{n-1}$$

$$\int^{(n)} (p+2qt) \frac{dv}{dt} dt^n = (p+2qt) \int^{(n-1)} v\, dt^{n-1} - 2qn . \int^{(n)} v\, dt^n.$$

Substituirt man, so erhält man die Gleichung:

$$t . \int^{(n-2)} v\, dt^{n-2} + (p-n+2qt) \int^{(n-1)} v\, dt^{n-1} + q(p-2n) \int^{(n)} v\, dt^n = \varphi(t),$$

wo $\varphi(t)$ eine ganze Function des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet. Für $p=2n$, d. h. $m = \frac{4n}{2n-1}$, wo n eine willkürliche ganze positive Zahl bedeutet, wird:

$$t \int^{(n-2)} v\, dt^{n-2} + (n+2qt) \int^{(n-1)} v\, dt^{n-1} = \varphi(t)$$

und wenn man $\int^{(n-1)} v\, dt^{n-1} = Z$ setzt, so findet man die lineare Gleichung der ersten Ordnung:

$$t . \frac{dZ}{dt} + (n+2qt) . Z = \varphi(t).$$

Hieraus ergiebt sich nach einer bekannten Formel:

$$Z = C_1 e^{-2qt} . t^{-n} + C_1 e^{-2qt} t^{-n} . \int t^{n-1} e^{2qt} \varphi(t)\, dt.$$

Das letzte Integral lässt sich mittelst folgender Bemerkung finden. Die Function $\varphi(t)$ kann in einer anderen Form dargestellt werden. Es sei nämlich:

$$\int^{(n-1)} v\, dt^{n-1} = v_{n-1} + f(t) = v_{n-1} + c_0 t^{n-2} + c_1 t^{n-3} + \ldots + c_{n-2},$$

wo v_{n-1} das Integral der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung von $v\,dt$ bezeichnet, bei dem aber keine willkürlichen Constanten hinzugefügt sind; die Coefficienten $c_0, c_1 \ldots c_{n-2}$ sind $n-1$ willkürliche Constanten; es wird nun offenbar:

$$\varphi(t) = t . f'(t) + (n+2qt) . f(t)$$

und deshalb erhalten wir:

$$\int t^{n-1} e^{2qt} . \varphi(t)\, dt = e^{2qt} . t^n . f(t),$$

was leicht durch unmittelbare Differentiation verificirt werden kann. Die Substitution giebt:

$$Z = C_1 e^{-2qt} t^{-n} + C_1 f(t).$$

---

*) Vergl. Prof. Spitzer, Studien über die Integration linearer Gleichungen. Erste Fortsetzung.

Hieraus erhalten wir durch Differentiation:

$$\frac{d^{n-1}Z}{dt^{n-1}} = v_1 = C_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[t^{-n} e^{-2qt}].$$

Hätte man zu Anfange der Rechnung $\alpha = -q$ gesetzt, so würde man die Gleichung:

$$t.\frac{d^2 v}{dt^2} + (p - 2qt)\frac{dv}{dt} - pqv = 0$$

erhalten und hieraus durch eine $n$mal wiederholte Integration für den Fall $m = \frac{4n}{2n-1}$ die Gleichung:

$$t.\frac{dZ}{dt} + (n - 2qt) Z = \varphi(t)$$

gefunden haben, in der dieselben Bezeichnungen wie früher beibehalten sind. Hieraus ergiebt sich:

$$Z = C_2 e^{2qt}.t^{-n} + C_2 f(t),$$

wo $f(t)$ eine ganze Function des $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet und deshalb erhalten wir:

$$\frac{d^{n-1}Z}{dt^{n-1}} = v_2 = C_2 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[t^{-n} e^{2qt}].$$

Auf diese Weise haben wir zwei particuläre Integrale der Gleichung nach v gefunden, von denen jedes eine willkürliche Constante enthält. Das vollständige Integral der Gleichung nach u wird daher:

$$u = C_1 e^{qt}.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[t^{-n}.e^{-2qt}] + C_2 e^{-qt}.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[t^{-n}.e^{2qt}].$$

Hier ist $n = \frac{m}{2m-4}$ eine ganze positive Zahl, so dass der Exponent m unter der Form $m = \frac{4n}{2n-1}$ vorausgesetzt wird; dies giebt, wie wir früher gesehen, eine Reihe von Fällen, in denen die Integration unserer Gleichung durch unbestimmte Quadraturen möglich ist. Um das Integral für den Fall $m = \frac{4n}{2n+1}$ zu erhalten, muss man zuerst die Methode der Transformation etwas ändern; man setzt nämlich in der Gleichung

$$t\frac{d^2u}{dt^2} + p\frac{du}{dt} - q^2 tu = 0$$

$u = t^\beta.z$ und bestimmt β so, dass $\beta - 1 + p = 0$, d.h. man setzt $\beta = 1 - p$ und erhält:

$$t.\frac{d^2 z}{dt^2} + p_1\frac{dz}{dt} - q^2 tz = 0,$$

wo $p_1 = 2 - p = \frac{m-4}{m-2}$. Weiter verfahren wir mit dieser Gleichung in derselben Weise, wie oben mit der früheren Gleichung; man setzt $p_1 = 2n$,

was dem Falle $m=\frac{4n-4}{2n-1}$ oder $m=\frac{4n}{2n+1}$ entspricht und wiederholt die frühere Analyse; man erhält so das Integral:

$$u=t^{1-p}\left\{C_1 e^{qt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[t^{-n}e^{-2qt}]+C_2 e^{-qt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[t^{-n}e^{2qt}]\right\},$$

wo $n=\frac{m-4}{4m-4}$ eine ganze positive Zahl bedeutet.

Auf diese Weise führt die Betrachtung der linearen Gleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+X_2\frac{du}{dx}-\frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2 dx}dx\right)^m}u=0$$

wieder auf die bereits gefundenen Fälle der Integrabilität, nämlich auf $m=\frac{4n}{2n\pm 1}$. In den Fällen, wo der Exponent m nicht diese Form hat, kann man das Integral dieser Gleichung durch bestimmte Quadraturen darstellen. Die Bildung dieser Ausdrücke ist nicht schwierig, denn führt man wie früher die unabhängige t ein, so entsteht eine Gleichung, deren Integration durch bestimmte Integrale bekannt ist.

IX.

Grundzüge eines Kreislinien-Coordinaten-Systems.

Von

GEORG V. GYURKOVICH,

Lieutenant im k. k. 46. österr. Linien-Infanterie-Regimente.

II.

17. Nachdem in den bisherigen Artikeln auf einen innigen Zusammenhang des entwickelten Kreislinien- mit dem Dreipunkt-Coordinaten-Systeme hingewiesen wurde, so wollen wir im Folgenden ähnliche Beziehungen des Kreislinien-Coordinaten-Systems mit dem Dreilinien-Coordinaten-Systeme entwickeln.

Es seien bezüglich eines orthogonalen Parallel-Cordinaten-Systems

25) $K_1 = x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0$ und $K_2 = x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0$

die Gleichungen zweier Kreise, und

$$K_3 = \lambda K_1 + \mu K_2 = x^2 + y^2 + \frac{\lambda D_1 + \mu D_2}{\lambda + \mu} x + \frac{\mu E_2 + \lambda E_1}{\lambda + \mu} y + \frac{\lambda F_1 + \mu F_2}{\lambda + \mu} = 0$$

die Gleichung eines Kreises, der mit K_1 und K_2 die Chordale gemein hat. Sind weiter (x_1, y_1) die Coordinaten eines beliebigen Punktes, ferner

$$P_1 = 0, \ P_2 = 0 \text{ und } P_3 = 0$$

der Reihe nach die Polaren dieses Punktes bezüglich der obigen drei Kreise, so hat man bekanntlich:

$$26) \left\{ \begin{array}{l} P_1 = (D_1 + 2x_1)x + (E_1 + 2y_1)y + D_1 x + E_1 y + 2F_1 = 0, \\ P_2 = (D_2 + 2x_1)x + (E_2 + 2y_1)y + D_2 x + E_2 y + 2F_2 = 0, \\ P_3 = \left(\frac{\lambda D_1 + \mu D_2}{\lambda + \mu} + 2x_1\right)x + \left(\frac{\lambda E_1 + \mu E_2}{\lambda + \mu} + 2y_1\right)y \\ \quad + \frac{\lambda D_1 + \mu D_2}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda E_1 + \mu E_2}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda F_1 + \mu F_2}{\lambda + \mu} = 0. \end{array} \right.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, lässt sich die Gleichung von $P_3 = 0$ durch einfache Transformationen auf die Form

$$P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2 = 0$$

bringen, welche zeigt, dass $P_3 = 0$ stets durch den Schnittpunkt von $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ gehen müsse, wie auch λ und μ beschaffen sein mögen, daher der bekannte Satz:

„Die Polaren eines Punktes bezüglich eines Systems von Kreisen, welche dieselbe Gerade als Chordale gemein haben, gehen alle durch denselben Punkt."

18. Sind nunmehr $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ die Gleichungen dreier beliebiger Kreise und $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ der Reihe nach die Polaren eines Punktes (x_1, y_1) bezüglich dieser drei Kreise, so findet man bei analogem Verfahren, wie im vorigen Artikel, als Polare des Punktes (x_1, y_1) in Bezug auf den Kreis:

$K_4 = \lambda K_1 + \mu K_2 + \nu K_3 = 0$, die Gerade $P_4 = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 = 0$.

Wir haben also im Vereine mit dem aus der Gleichung 17) abgeleiteten Satze, den allgemeineren Lehrsatz:

„Sind die Mittelpunkte dreier Kreise $K_1=0$, $K_2=0$, $K_3=0$ der Reihe nach $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$ und $P_1=0$, $P_2=0$, $P_3=0$ die Polaren eines Punktes M bezüglich dieser Kreise, so ist der Mittelpunkt des Kreises $K_4 = \lambda K_1 + \mu K_2 + \nu K_3 = 0$, der Punkt $C_4 = \lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 = 0$ und $P_4 = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 = 0$ die Polare von M bezüglich K_4."

Welche Bedeutung hat die Bildungs-Gleichung 21) bezüglich der Gleichung von P_4?

19. Im Artikel 17 wurde angedeutet, dass die Polaren eines Punktes M bezüglich eines Systems von Kreisen mit gemeinschaftlicher Chordale durch denselben Punkt gehen. Suchen wir nun einen oder mehrere Punkte von der Beschaffenheit, dass deren Polaren bezüglich irgend eines der Kreise des Systems nicht allein durch einen festen Punkt gehen, sondern ganz fest sind.

Es seien die durch 25) dargestellten Kreise $K_1 = 0$, $K_2=0$ zwei Kreise des Systems und die durch 26) ausgedrückten Geraden $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ die Polaren des Punktes M (x_1, y_1) bezüglich K_1 und K_2.

Sollen nun $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ zusammenfallen, so erhält man zur Bestimmung der Coordinaten (x_1, y_1) von M aus den Gleichungen 26) dieser beiden Geraden:

$$\frac{D_1 + 2x_1}{D_1 x_1 + E_1 y_1 + 2F_1} = \frac{D_2 + 2x_2}{D_2 x_1 + E_2 y_1 + 2F_2}$$

und

$$\frac{E_1 + 2y_1}{D_1 x_1 + E_1 y_1 + 2F_1} = \frac{E_2 + 2y_1}{D_2 x_1 + E_2 y_1 + 2F_2}.$$

Man sieht schon hieraus, dass zur Bestimmung von (x_1, y_1) eine quaratische Gleichung resultiren würde, dass also stets zwei Punkte von der

verlangten Eigenschaft bestehen. — Um aber die Lage dieser beiden Punkte besser beurtheilen zu können, wollen wir einen einfacheren Weg einschlagen.

Es seien nämlich:

$$K_1 = (x - \alpha_1)^2 + y^2 - r_1^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - (r_1^2 - \alpha_1^2) = 0,$$
$$K_2 = x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - (r_2^2 - \alpha_2^2) = 0$$

in orthogonalen Parallel-Coordinaten die Gleichungen zweier Kreise, deren Centrale die Abscissen-Axe und deren Chordale die Ordinaten-Axe des Coordinaten-Systems ist. Demzufolge muss $r_1^2 - \alpha_1^2 = r_2^2 - \alpha_2^2$ sein und es werden sich K_1 und K_2 in zwei reellen oder in zwei imaginären Punkten schneiden,

je nachdem $\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\Big\} > \text{ oder } < \Big\{\begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix}$ ist.

Im ersten Falle bedeutet $r_1^2 - \alpha_1^2 = r_2^2 - \alpha_2^2 = c^2$ das Quadrat der Entfernung c eines der Schnittpunkte der beiden Kreise von deren Centralen.

Im zweiten Falle bedeutet $\alpha_1^2 - r_1^2 = \alpha_2^2 - r_2^2 = t^2$ das Quadrat der Länge t der aus dem Schnittpunkte der Chordale und Centrale der beiden Kreise an diese gelegten Tangenten.

Für diesen Fall nehmen die Gleichungen dieser Kreise die Formen:

27) $K_1 = x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x + t^2 = 0$ und $K_2 = x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x + t^2 = 0$ an.

Die Gleichungen der zwei Polaren eines Punktes (x_1, y_1) bezüglich dieser zwei Kreise sind dann nach 26):

$$28) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = xx_1 + yy_1 - \alpha_1 (x + x_1) + t^2 = 0 \text{ und} \\ P_2 = xx_1 + yy_1 - \alpha_2 (x + x_1) + t^2 = 0, \end{array} \right.$$

welche beiden Geraden augenscheinlich, wie auch α_1 und α_2 beschaffen sein mögen, stets durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$29) \quad xx_1 + yy_1 + t^2 = 0 \text{ und } (x + x_1) = 0$$

gehen müssen.

Sollen $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ identisch werden, so müssen es — wie leicht einzusehen ist — auch die Geraden 29) werden, was nur geschieht, wenn

$$y_1 = 0, \quad x_1 = \pm t$$

ist.

Es resultiren hiernach zwei bezüglich der Chordale von K_1 und K_2 auf deren Chordalen symmetrisch gelegene Punkte, welche *Poncelet* (*Traité des propriétés proj. p.* 41) als die „Grenzpunkte" des Systems der Kreise K_1 und K_2 bezeichnet hat (Grenzpunkte deshalb, weil für zwischen $+t$ und $-t$ gelegene Werthe von α_1 nur imaginäre Kreise resultiren. Wir haben also den Satz:

> „Es können immer zwei Punkte von der Beschaffenheit gefunden werden, dass ihre Polaren bezüglich irgend eines zum Systeme (K_1, K_2) gehörigen Kreises nicht allein durch einen festen Punkt gehen, sondern ganz fest sind."

Für den Fall $r_1 > a_1$ (also auch $r_2 > a_2$) resultiren als Coordinaten der Grenzpunkte $y_1 = 0$, $x_1 = \pm c\sqrt{-1}$, d. h.:

„Schneiden sich die Kreise des Systems (K_1, K_2) in zwei reellen Punkten, so werden die Grenzpunkte imaginär.“

20. Bestimmt man den festen Schnittpunkt (x', y') der beiden Polaren $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ 28) des Punktes (x_1, y_1) bezüglich der Kreise K_1 und K_2 27), so erhält man aus den beiden Gleichungen 29)

$$30)\qquad x' = -x_1, \quad y' = \frac{x_1^2 - t^2}{y_1}.$$

Wie man sich mittelst dieser beiden Gleichungen leicht überzeugen kann,

„gehen umgekehrt die Polaren des Punktes (x', y') bezüglich K_1 und K_2 27) durch den Punkt (x_1, y_1) und es sind (x', y') und (x_1, y_1) diametral gegenüber liegende Punkte eines durch die Grenzpunkte des Kreissystems (K_1, K_2) gehenden Kreises.“

Die Grenzpunkte selbst sind specielle Lagen dieser Punkte.

1. Lehrsatz. Bewegt sich einer der beiden Punkte (x_1, y_1), (x', y') auf ihrer gemeinschaftlichen Verbindungsgeraden, so beschreibt der andere stets die durch die Grenzpunkte des Kreissystems gehende Hyperbel:

$$31)\qquad x^2 + \frac{y_1 - y'}{x_1 - x'}\, xy + \frac{x' y_1 - x_1 y'}{x_1 - x'}\, y - t^2 = 0.$$

2. Lehrsatz. Der Pol der Geraden $Ax + By + C = 0$ bezüglich des Kreises $K_1 = x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x + t^2 = 0$ ist:

$$x_1 = \frac{At^2 + C\alpha_1}{A\alpha_1 + C}, \quad y_1 = \frac{B}{A\alpha_1 + C}(t^2 - \alpha_1).$$

3. Lehrsatz. Der geometrische Ort der Pole einer Geraden bezüglich aller zum Kreissysteme (K_1, K_2) gehörigen Kreise ist eine Curve vierten Grades.

4. Lehrsatz. Sind $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2 = 0$ die Polaren des auf dem Kreise $K_3 = \lambda K_1 + \mu K_2$ sich bewegenden Punktes $M(x_1, y_1)$ bezüglich dieses und der beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, so ist für P_3 (Tangente an K_3) stets $\frac{P_1}{P_2} = -\frac{\mu}{\lambda} = const$, d. h.?

5. Lehrsatz. Beschreibt man aus den festen Punkten $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ die Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ mit variablen Halbmessern und dann aus dem festen Punkte $C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ den Kreis $K_3 = \lambda K_1 + \mu K_2 = 0$, so ist für diesen

stets $\frac{K_1}{K_2} = -\frac{\mu}{\lambda} = const$, also infolge des Schlusssatzes Artikel 1 u. s. w.

Sind $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2 = 0$ die Polaren eines Punktes bezüglich dieser drei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = \lambda K_1 + \mu K_2 = 0$, so ist abermals für P_3, $\frac{P_1}{P_2} = -\frac{\mu}{\lambda} = const$, d. h.?

21. Es ist der geometrische Ort eines Punktes M zu bestimmen, dessen Polaren $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ bezüglich dreier beliebiger Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ (ohne gemeinschaftliche Chordale) durch einen und denselben Punkt gehen.

Legen wir zur Vereinfachung der Untersuchung die orthogonalen Parallel-Coordinaten so, dass die Abscissen- und Ordinaten-Axe beziehungsweise mit der Centralen und Chordale von K_1 und K_2 zusammenfallen und es seien hiernach die Gleichungen der drei Kreise

$$K_1 = x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x + t^2 = 0, \quad K_2 = x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x + t^2 = 0,$$
$$K_3 = x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Die Polaren $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ eines Punktes (x_1, y_1) bezüglich dieser drei Kreise werden sich in einem Punkte schneiden, wenn $P_3 = 0$ durch den Schnittpunkt (von P_1 und P_2, also auch durch jenen) der Geraden 29)

$$xx_1 + yy_1 + t^2 = 0 \text{ und } x + x_1 = 0$$

geht.

Die Gleichung von P_3 in Parallel-Coordinaten ist aber

$$P_3 = (D + 2x_1)x + (E + 2y_1)y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0,$$

welche, damit sie durch den Schnittpunkt der Geraden 29) gehe, mit der Form $xx_1 + yy_1 + t^2 + \lambda(x + x_1) = 0$ identisch sein muss – wobei λ ein unbestimmter Parameter ist —, was nur geschehen kann, wenn

$$\frac{D + 2x_1}{E + 2y_1} = \frac{x_1 + \lambda}{y_1} \quad \text{und} \quad \frac{Dx_1 + Ey_1 + 2F}{E + 2y_1} = \frac{t^2 + \lambda x_1}{y_1}$$

wird.

Durch Elimination von λ aus diesen beiden Gleichungen folgt als Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes von (x_1, y_1):

$$x^2 + y^2 - 2\frac{t^2 - F}{E}y - t^2 = 0,$$

oder unter der Form:

$$32) \qquad K = x^2 + \left(y - \frac{t^2 - F}{E}\right)^2 - \left[t^2 + \left(\frac{t^2 - F}{E}\right)^2\right] = 0,$$

welche offenbar einen Kreis darstellt; dessen Mittelpunkts-Coordinaten (α, β)

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{t^2 - F}{E}$$

und dessen Halbmesser

$$r = \sqrt{t^2 + \left(\frac{t^2 - F}{E}\right)^2} \text{ ist.}$$

Nachdem die Gleichung der Chordale der beiden Kreise K und K_1

$$K - K_1 = (D + 2\alpha_1)x + Ey + F - t^2 = 0,$$

also deren Abschnitt y_0 auf der Ordinaten-Achse (der Chordale $K_1 - K_2 = 0$)

$$y_0 = \frac{t^2 - F}{E}$$

ist, so sieht man, dass der Mittelpunkt von $K = 0$ das Chordal-Centrum der Kreise K_1, K_2, K_3 ist.

Als Quadrat der Länge T der vom Punkte (α, β) an $K_1 = 0$ gelegten Tangente ergiebt sich nach Substitution der Coordinaten (α, β) in die Gleichung $K_1 = 0$

$$T^2 = t^2 + \left(\frac{t^2 - F}{E}\right)^2 = r^2,$$

also ist der Halbmesser von $K = 0$ gleich der Länge, der von seinem Mittelpunkte (Chordal-Centrum) an einen der drei Kreise gelegten Tangenten.

Hiernach schneidet $K = 0$ die drei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ unter rechten Winkeln und er wurde deshalb von Plücker (Anal.-geom. Entwickelungen Bd. I, pag. 56) als „Orthogonal-Kreis" der drei Kreise K_1, K_2, K_3 bezeichnet. Daher der Satz:

> „Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Polaren in Bezug auf drei Kreise sich in einem Punkte schneiden, ist der Orthogonal-Kreis dieser drei Kreise."

22. Man überzeugt sich leicht, dass der Orthogonal-Kreis durch die sechs Grenzpunkte der drei Kreise geht, dass also:

> „die sechs Grenzpunkte dreier Kreise, die Ecken eines dem Orthogonal-Kreise eingeschriebenen Sechsecks bilden."

Schneiden sich die drei Kreise in sechs reellen Punkten, so ist der Orthogonal-Kreis natürlicherweise imaginär.

Lässt man zu den drei Kreisen K_1, K_2, K_3 noch einen vierten K_4, der mit diesen das Chordal-Centrum gemein hat, hinzutreten, so geht offenbar die Polare von $M(x_1, y_1)$, P_4 bezüglich K_4 auch durch den (auf dem Orthogonal-Kreise gelegenen) Schnittpunkt der Polaren P_1, P_2, P_3, was überhaupt für jede Anzahl von Kreisen mit gemeinschaftlichem Chordal-Centrum gilt.

Durch diese Verallgemeinerung lässt sich der Eingangs dieses Artikels angeführte Lehrsatz ebenfalls erweitern, d. h.:

> „Der Orthogonal-Kreis eines Systems von Kreisen (mit gemeinschaftlichem Chordal-Centrum) ist der geometrische Ort der Grenzpunkte derselben."

Nach der im Artikel 20) angeführten Bemerkung — dass der Schnittpunkt der Polaren eines Punktes M, bezüglich zweier Kreise, auf einem durch M und die beiden Grenzpunkte gehenden Kreise und dem Punkte M diametral gegenüber liegt — lässt sich bezüglich des Orthogonal-Kreises der Satz aufstellen:

„Bestimmt man die Polaren P_1, P_2, P_3 eines dem Kreise K angehörigen Punktes M bezüglich dreier Kreise K_1, K_2, K_3, welche K zum Orthogonal-Kreise haben, so schneiden sich diese Polaren in einem auf K dem Punkte M diametral gegenüberliegenden Punkte M'."

23. Nach dem Bisherigen sind wir nun auch im Stande, die Gleichung des Orthogonal-Kreises K der durch die allgemeinen Gleichungsformen ausgedrückten Kreise

$$K_1 = x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0,$$

$$K_2 = x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0,\ K_3 = x^2 + y^2 + D_3 x + E_3 y + F_3 = 0$$

unter der Form

$$K = x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

darzustellen. Weil nämlich K jeden der drei Kreise unter rechten Winkeln schneidet, so muss offenbar die Polare des Mittelpunktes $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ von K bezüglich des Kreises K_1 mit der Chordale $K - K_1 = 0$ zusammenfallen.

Die Polare von $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ in Bezug auf $K_1 = 0$ ist aber:

$$P_1 = (D - D_1)\,x + (E - E_1)\,y + \frac{DD_1}{2} + \frac{EE_1}{2} - 2F_1 = 0$$

und die Chordale

$$K - K_1 = (D - D_1)\,x + (E - E_1)\,y + F - F_1 = 0,$$

welche Gleichungen nur dann identisch werden, wenn

$$\frac{DD_1 + EE_1}{2} - 2F = F - F_1$$

ist.

Verfährt man bezüglich K_2 und K_3 analog, so erhält man zur Bestimmung der Grössen D, E, F die Gleichungen:

$$DD_1 + EE_1 - 2F_1 = F,\ DD_2 + EE_2 - 2F = F,\ DD_3 + EE_3 - 2F_3 = F,$$

aus welchen:

$$33)\quad \begin{cases} D = 2\dfrac{(F_1 - F_3)(E_1 - E_2) - (F_1 - F_2)(E_1 - E_3)}{(D_1 - D_3)(E_1 - E_2) - (D_1 - D_2)(E_1 - E_3)}, \\[2ex] E = 2\dfrac{(D_1 - D_3)(F_1 - F_2) - (D_1 - D_2)(F_1 - F_3)}{(D_1 - D_3)(E_1 - E_2) - (D_1 - D_2)(E_1 - E_3)} \text{ und} \\[2ex] F = 2\dfrac{F_1(D_2E_3 - D_3E_2) + F_2(D_3E_1 - D_1E_3) + F_3(D_1E_2 - D_2E_1)}{(D_1 - D_3)(E_1 - E_2) - (D_1 - D_2)(E_1 - E_3)} \end{cases}$$

folgt.

Die Grössen $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ geben zugleich die Coordinaten desChordal-Centrums der drei Kreise K_1, K_2, K_3.

24. Die Reciprocität des Dreipunkt- und des Dreilinien-Coordinaten-Systems in der geometrischen Interpretation analytischer Formen ist bekannt, worauf auch im Laufe dieser Abhandlung mehrfach hingedeutet wurde.

Die bisher angestellten Betrachtungen erlauben es nunmehr, bei Annahme eines einzigen Fundamental-Dreiecks, die Beziehungen der bezüglich beider Coordinaten-Systeme durch eine und dieselbe analytische Form dargestellten Grössen näher zu beleuchten.

Es sei $C_1 C_2 C_3$ ein beliebiges Dreieck, aus dessen Ecken als Mittelpunkten C_1, C_2, C_3 der Reihe nach drei Kreise K_1, K_2, K_3 so beschrieben werden sollen, dass die Polaren P_1, P_2, P_3 eines noch zu bestimmenden Punktes O in Bezug auf diese drei Kreise mit den Geraden $C_2 C_3$, $C_3 C_1$, $C_1 C_2$ — kurz mit den Gegenseiten des betreffenden Kreismittelpunktes — zusammenfallen.

Nachdem der Pol stets in der aus dem Kreismittelpunkte auf die Polare gefällten Senkrechten liegen muss, so ist klar, dass der zu suchende Punkt O nur der Schnittpunkt der Höhenlothe des Dreiecks $C_1 C_2 C_3$ sein kann. Jetzt handelt es sich noch um die Bestimmung der Halbmesser r_1, r_2, r_3 der drei Kreise K_1, K_2, K_3.

Macht man hierzu $C_1 C_2$ zur Abscissenaxe und C_1 zum Ursprunge eines orthogonalen Parallel-Coordinaten-Systems und setzt $C_1 C_2 = \alpha_2$, während (α_3, β_3) die Coordinaten von C_3 sein mögen, so hat man als Gleichung von $(C_2 C_3)$ $y = \frac{\beta_3}{\alpha_3 - \alpha_2}(x - \alpha_2)$, von $(C_1 C_3)$ $y = \frac{\beta_3}{\alpha_3} x$ und von $(C_1 O) y = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\beta_3} x$.

Aus der letzten Gleichung ergeben sich für $x = \alpha_3$ als Coordinaten von O

$$34) \qquad x_1 = \alpha_3, \; y_1 = \frac{\alpha_3}{\beta_3}(\alpha_2 - \alpha_3).$$

Der Kreis K_1 hat jedenfalls die Gleichungsform $K_1 = x^2 + y^2 - r_1^2 = 0$, welcher zufolge und nach 26)

$$\alpha_3 x + \frac{\alpha_3}{\beta_3}(\alpha_2 - \alpha_3) = r_1^2$$

als Polare von O in Bezug auf K_1 erscheint. Diese Gleichung kann jedoch mit jener von $C_2 C_3$ nur unter der Bedingung

$$r_1^2 = \alpha_2 \alpha_3$$

identisch werden.

Bei analogem Verfahren bezüglich der Kreise K_2 und K_3 und der beiden Geraden $C_3 C_1$, $C_1 C_2$ erhält man

$$r_2^2 = \alpha_2^2 - \alpha_2 \alpha_3 \text{ und } r_3^2 = (\alpha_3^2 + \beta_3^2) - \alpha_2 \alpha_3,$$

weiter als Gleichungen der drei Kreise

$$35)\quad \begin{cases} K_1 = x^2 + y^2 - \alpha_2 \alpha_3 = 0, \\ K_2 = (x - \alpha_2)^2 + y^2 - (\alpha_2^2 - \alpha_2 \alpha_3) = 0, \\ K_3 = (x - \alpha_3)^2 + (y - \beta_3)^2 - (\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \alpha_2 \alpha_3) = 0. \end{cases}$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist der Punkt O zugleich das Chordal-Centrum dieser drei Kreise. Unter welchen Bedingungen wird einer derselben imaginär?

Werden C_1, C_2, C_3 als „Fundamentalpunkte" eines Dreipunkt-Coordinaten-Systems angenommen und durch die Gleichungen

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0$$

dargestellt, ferner die diesen Punkten gegenüber liegenden Geraden $C_2 C_3$, $C_3 C_1$, $C_1 C_2$ als „Fundamentallinien" eines Dreilinien-Coordinaten-Systems durch die Gleichungen

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0$$

repräsentirt, so können wir bei Annahme der drei Kreise 35) als „Fundamentalkreise", zufolge des am Schlusse des Artikel 18 ausgesprochenen Satzes den folgenden aussprechen:

„Die Gerade $P_4 = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 = 0$ ist die Polare des Punktes O bezüglich des aus dem Punkte $C_4 = \lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreises $K_4 = \lambda K_1 + \mu K_2 + \nu K_3 = 0$, der mit den drei Kreisen 35) das Chordal-Centrum gemein hat."

Eine besondere Eigenschaft der Geraden P_4 besteht darin, dass sie auf der Verbindungsgeraden der Punkte O (Pol) und C_4 (Mittelpunkt) senkrecht steht, wodurch deren Construction bei gegebenem Punkte C_4 ohne Verzeichnung der Kreise 35) möglich ist. Die Gerade P_4 geht nämlich durch den Schnittpunkt z. B. der beiden Geraden $P_1 = 0$ und $\mu P_2 + \nu P_3 = 0$, welch letztere wieder durch $C_1 = 0$ geht und auf der Verbindungsgeraden von O (Pol) und $\mu C_2 + \nu C_3 = 0$ (Mittelpunkt) senkrecht steht. Hierdurch kann P_4 construirt werden, indem nebst ihrer Richtung auch einer ihrer Punkte bekannt ist.

Die Umkehrung dieses Verfahrens giebt bei gegebener Geraden $P_4 = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 = 0$ ebenso einfach den Punkt $C_4 = \lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 = 0$.

25. Durch die bisherigen Betrachtungen haben wir nachgewiesen, dass die Gleichung eines Kreises K, der mit drei Kreisen K_1, K_2, K_3 das Chordal-Centrum gemein hatte, durch deren Gleichungen ausgedrückt werden konnte. War K nicht so gelegen, so wurde die Zuhilfenahme einer Constanten nothwendig, die aber durch die Einführung eines vierten Fundamentalkreises ersetzt werden kann, wie auch allgemein

„zur Bestimmung der Gleichung einer Curve n^{ten} Grades $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Fundamentalcurven desselben Grades nothwendig sind."

Wie sich nun bei Zugrundelegung von vier „Fundamentalkreisen" die Untersuchungen über die Kreislinie gestalten und neue Gesichtspunkte eröffnen, soll Gegenstand einer folgenden Abhandlung sein. In den bisherigen Entwickelungen, welche zum Theil als Grundlage für diese Abhandlung dienen sollen, waren wir mehr bemüht, auf den innigen Zusammenhang des Dreipunkt- und Dreilinien - Coordinaten - Systems mit dem bisher entwickelten Kreislinien - Coordinaten - Systeme hinzuweisen.

Anhang. Zu Artikel 4:

„Die Bedingung, dass der Kreis

$$K_1 = x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

mit den beiden Kreisen

$$\left.\begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix}\right\} = x^2 + y^2 + \left.\begin{matrix} D_1 \\ D_2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}\right\} = 0$$

ihre Chordale gemein hat, ist:

$$\frac{D - D_1}{D - D_2} = \frac{E - E_1}{E - E_2} = \frac{F - F_1}{F - F_2}."$$

Zu Artikel 7:

Setzt man die Entfernungen der Fundamentalpunkte $C_1 C_2 = c_3$, $C_2 C_3 = c_1$, $C_3 C_1 = c_2$, so lässt sich der Ausdruck für r_4 auf die Form

$$r_4^2 = \frac{\lambda r_1^2 + \mu r_2^2 + \nu r_3^2}{\lambda + \mu + \nu} - \frac{\lambda\mu c_3^2 + \mu\nu c_1^2 + \nu\lambda c_2^2}{(\lambda + \mu + \nu)^2}$$

bringen. Welche Form nimmt dieser Ausdruck für den Fall $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ an, und welche Folgerungen ergeben sich für r_4 daraus? (Siehe Artikel 15.)

Zu Artikel 9:

3. Lehrsatz: „Sind in der Gleichung $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ die Grössen D und E variabel, während F constant bleibt, so haben alle durch diese Gleichung dargestellten Kreise den Coordinaten-Ursprung zum Chordal-Centrum."

4. Lehrsatz: „Sind in der im vorigen Satze angeführten Gleichung die Grössen D, E und F der Bedingungs-Gleichung

$$aD + bE + cF = 0$$

unterworfen, worin a, b, c Constante bedeuten, so haben alle durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

dargestellten Kreise mit einander das Chordal-Centrum gemein."

Substituirt man in der obigen Bedingungs-Gleichung statt D, E und F ihre Werthe [siehe Gleichung 1)] $D = -2\alpha$, $E = -2\beta$, $F = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$, so hat man statt der obigen Bedingungs-Gleichung:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\frac{a}{c}\alpha - 2\frac{b}{c}\beta - r^2 = 0.$$

Denkt man sich r constant, so folgt:

5. Lehrsatz: „Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise von gleichem Halbmesser, welche einen und denselben Punkt als Chordal-Centrum gemein haben, ist ein Kreis.“

6. Lehrsatz: „Sind K_1, K_2, K_3, K_4 vier Kreise mit gemeinschaftlichem Chordal-Centrum, so bilden zwei Schnittpunkte von zweien der vier Kreise mit jenen der beiden anderen Kreise die Ecken eines Kreisvierecks.“

Kleinere Mittheilungen.

Bemerkung hinsichtlich der Priorität einiger Sätze über confocale Kegelschnitte. In meiner Abhandlung „Ueber lemniscatische Coordinaten" kommen einige Sätze über confocale Kegelschnitte etc. vor, welche unterdessen von Herrn Volpicelli, wenn ich nicht irre, im November 1866 der französischen Academie vorgelegt wurden. Dieselben lauten in der Fassung des Herrn Volpicelli:

Dans une série de coniques homofocales à centre, le lieu des points de contact des tangentes parallèles à une même droite est une hyperbole équilatère; et les points de contact des tangentes perpendiculaires aux premières sont sur la même hyperbole.

Si l'on mène aux coniques des tangentes parallèles, sous des directions differentes, les foyers des hyperboles équilatères lieux des points de contact sont sur une lemniscate.

Les sommets des mêmes hyberboles sont aussi sur une lemniscate.

Le lieu des sommets d'une série d'hyperboles équilatères concentriques, qui passent par une même point, est une lemniscate: et le lieu des sommets des mêmes hyperboles est aussi une lemniscate.

Auf die beiden letzteren Sätze erhebt auch Herr Serret Anspruch (*Compt. rend.* 1867 *Nr.* 5 *Févr.*), welcher dieselben in seiner Abhandlung: *Propriétés géométriques relatives aux fonctions elliptiques* im *Journal de Math. t. VIII* schon früher publicirt und ausserdem noch bemerkt hat, dass „*la lemniscate lieu de foyers coupe les hyperboles orthogonalement.*"

Die beiden letzteren Sätze sind demnach unbestrittenes Eigenthum des Herrn Serret; die beiden ersteren dagegen glaube ich vor Herrn Volpicelli für mich in Anspruch nehmen zu dürfen, da mein Manuscript bereits im Februar 1866 an die Redaction der Zeitschrift für Mathematik und Physik gelangte*) und ich dieselben ausserdem schon im Januar

---

*) Wird hiermit bestätigt. Schlömilch.

desselben Jahres in einem öffentlichen Vortrag (*pro venia legendi*) in Gegenwart der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der hiesigen philosophischen Facultät entwickelt habe.

Zürich. Dr. E. LOMMEL.

Gleichung der magnetischen Curven. (Hierzu Taf. III, Fig. 15.) Wenn man auf ein Blatt Papier, das auf die Pole eines starken Hufeisenmagnets gelegt ist, die feinsten Eisenfeilspähne streut und das Blatt gelinde erschüttert, so bilden sich sehr deutlich die sogenannten magnetischen Curven, von Pol zu Pol in Bogen gehend. Jedes Eisentheilchen wird durch die Einwirkung der Pole selbst magnetisch und nimmt die Stellung an, bei welcher seine Längenrichtung mit der Resultante der einwirkenden Kräfte zusammenfällt. Die magnetischen Curven sind also „Kraftlinien", Curven, deren Tangenten mit den Kraftrichtungen in den Berührungspunkten zusammenfallen. Sehr einfach ergiebt sich die Gleichung der „Niveaulinien", d. h. der Curven, deren Tangenten senkrecht stehen auf den Kraftrichtungen in den Berührungspunkten, denn für diese ist das Potential beider Pole oder die Summe der Potentiale der einzelnen Pole constant und da diese den Entfernungen r_1 und r_2 des Eisentheilchens von den Polen umgekehrt proportional sind, doch mit entgegengesetztem Zeichen, so hat man sogleich:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{c}$$

als Gleichung der Niveaulinien, wo c eine von Curve zu Curve sich ändernde Constante ist. Die magnetischen Curven ergeben sich jetzt als senkrechte Trajectorien der Niveaulinien, da nach dem Obigen bei den ersten die Tangente mit der Kraftrichtung zusammenfällt, bei den letzten einen rechten Winkel bildet. Ich weiss nicht, ob irgendwo die Gleichung dieser Curven gegeben ist; es würde mich wundern, weil sie in so einfacher Form sich geben und so leicht sich ableiten lässt, dass sie, wenn bekannt, in die Lehrbücher übergegangen wäre.

Die bipolaren Coordinaten, wobei die Lage eines beliebigen Punktes durch seine Entfernungen von zwei festen Punkten, Brennpunkten, bestimmt wird, geben besonders einfache Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel $\{r_1 \pm r_2 = c\}$, für den Kreis $\left\{\frac{r_1}{r_2} = c\right\}$, für die Lemniscate $\{r_1 r_2 = c^2\}$ und für die obigen Niveaulinien. Die Roberval'sche Methode, Tangenten zu ziehen, führt bei allen diesen Curven zu einfachen Constructionen der Tangenten, also auch der Normalen, und da jene Methode eigentlich die Construction einer Differential-Gleichung der Curve ist, so wird die nach dieser Methode construirte Normale auch auf eine Differential-Gleichung der senkrechten Trajectorie führen können.

Das zeigt sich zunächst sehr einfach bei der Ellipse und Hyperbel. Sind F_1 und F_2 die Brennpunkte und M ein Punkt der Hyperbel und ver-

längert man die Brennstrahlen um gleichviel über M hinaus nach M_1 und M_2, so dass $MM_1 = dr_1$ und $MM_2 = dr_2$ ist (gleich, weil $r_1 - r_2 = c$ ist), so darf man nur von F_1 und F_2 aus mit F_1M_1 und F_2M_2 Kreisbögen beschreiben, welche sich in T schneiden, um den unendlich nahe bei M liegenden Punkt T der Hyperbel zu erhalten. Die Kreisbögen M_1T und M_2T kann man als unendlich kleine auf F_1M_1 und F_2M_2 senkrechte Gerade betrachten. Nimmt man dagegen für MM_1 und MM_2 endliche den Differentialen dr_1 und dr_2 proportionale Längen, so ist der Schnittpunkt T der Senkrechten in M_1 und M_2 auf F_1M_1 und F_2M_2 ein Punkt der Tangente in M, weil wegen der Aehnlichkeit der Vierecke die Richtung MT beide Male dieselbe ist. Nun ist klar, dass man die Normale statt der Tangente erhält, wenn man $(-dr_2)$ an die Stelle von (dr_2) setzt, weil die Halbirungslinie des Winkels (dr_1, dr_2) senkrecht steht auf der des Winkels $(dr_1, -dr_2)$. Da nun die Differential-Gleichung der Hyperbel $dr_1 - dr_2 = 0$ ist, so ist die ihrer senkrechten Trajectorien $dr_1 + dr_2 = 0$ und die Trajectorien selbst sind $r_1 + r_2 = c$, d. h. die confocalen Ellipsen.

In gleicher Weise kann man für die anderen drei Curven die Differential-Gleichungen der senkrechten Trajectorien bestimmen, aber diese Gleichungen werden zu complicirt, um die Integration einfach durchzuführen. Mein College, Professor C. W. Baur, fand den richtigen Weg, indem er von den Brennstrahlen der gegebenen Curve überging zu den Winkeln der Brennstrahlen mit der Verbindungslinie der Brennpunkte bei der Trajectorie, davon ausgehend, dass man für den Kreis wieder Kreise, für die Lemniscate gleichseitige Hyperbeln erhält, die sich durch jene Winkel sehr einfach ausdrücken lassen; und das Resultat bei den magnetischen Curven war dem ganz entsprechend.

Der Brennstrahl $F_1M = r_1$ bilde mit der Richtung F_2F_1 den Winkel φ_1, er werde verlängert um $MM_1 = A \,.\, dr_1$, wo A eine beliebige Zahl ist. Der Brennstrahl $F_2M = r_2$ bilde mit der Richtung F_2F_1 den Winkel φ_2 und werde verlängert um $MM_2 = A \,.\, dr_2$. Die Senkrechten in M_1 und M_2 auf MM_1 und MM_2 schneiden sich in T, dann ist MT Tangente und MN senkrecht darauf Normale. N werde so gewählt, dass es auf FM_1 liegt und von N sei dann die Senkrechte NM_3 auf F_2M gefällt. Alsdann ist: $\angle NF_2M = d\varphi_2$ und $\angle NF_1M = d\varphi_1$, wobei φ_1 und φ_2 die Winkel sind, welche die Brennstrahlen der Trajectorie bestimmen. Da aber die Vierecke MM_2TM_1 und NM_3MM_1 ähnlich sind, so folgt: $MM_1 : MM_2 = NM_1 : NM_3$ oder $dr_1 : dr_2 = r_1\, d\varphi_1 : r_2\, d\varphi_2$, wozu noch kommt $r_1 \sin\varphi_1 = r_2 \sin\varphi_2$.

Für die Anwendung auf die drei übrigen Curven schreibe ich:

$$\frac{dr_1}{r_1} : \frac{dr_2}{r_2} = d\varphi_1 : d\varphi_2.$$

Dann hat man für den Kreis:

$$\frac{r_1}{r_2} = c, \qquad dr_1 = c\, dr_2 = \frac{r_1}{r_2} dr_2,$$

also

$$\frac{dr_1}{r_1} = \frac{dr_2}{r_2} \quad \text{und} \quad d\varphi_1 = d\varphi_2,$$

woraus durch Integration:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = c,$$

d. h. die senkrechten Trajectorien sind Kreise über $F_1 F_2$ als Sehne.

Für die Lemniscate hat man:

$$r_1 r_2 = c^2, \quad r_1 dr_2 + r_2 dr_1 = 0,$$

also:

$$\frac{dr_1}{r_1} = -\frac{dr_2}{r_2} \quad \text{und} \quad d\varphi_1 = -d\varphi_2,$$

woraus durch Integration:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = c,$$

d. h. die senkrechten Trajectorien der Lemniscate sind gleichseitige Hyperbeln durch die zwei Brennpunkte, die bekannte Erscheinung der isochromatischen Curven bei zweiaxigen Krystallen im polarisirten Licht.

Endlich hat man für die oben erwähnten Niveaulinien:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{c}, \quad \frac{dr_1}{r_1^2} - \frac{dr_2}{r_2^2} = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{dr_1}{r_1} : \frac{dr_2}{r_2} = : r_1 r_2 = \sin\varphi_2 : \sin\varphi_1,$$

also:

$$d\varphi_1 : d\varphi_2 = \sin\varphi_2 : \sin\varphi_1 \quad \text{und} \quad d\varphi_1 \sin\varphi_1 = d\varphi_2 \sin\varphi_2$$

und durch Integration:

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = c,$$

was die Gleichung der magnetischen Curven ist, sicher die einfachste und eleganteste, die möglich ist. Die beiliegende Zeichnung giebt die nach dieser Formel gezeichneten Curven nebst den Niveaulinien und sie zeigt sogleich die nahe Uebereinstimmung mit dem, was die Erfahrung giebt.

Stuttgart, 29. März 1867. Prof. Dr. Zech.

Einige Bemerkungen über Kometen. Bericht des Director von Littrow über eine Abhandlung von Prof. Dr. Bruhns in Leipzig. Die epochemachende Entdeckung Schiaparelli's über den innigen Zusammenhang von Kometen und Sternschnuppen wendet die Aufmerksamkeit der Astronomen diesem bisher wenig beachteten Gebiete zu. So lieferte vor Kurzem Le Verrier eine treffliche Arbeit über das Novemberphänomen und dessen möglichen Ursprung in Uranusstörungen. So hat Dr. E. Weiss sich zur Aufgabe gemacht, zu untersuchen, ob nicht, nachdem die Zusammengehörigkeit des Augustschwarmes mit dem III. Kometen von 1862, sowie der Novembermeteore mit dem Kometen 1866 I erwiesen ist, auch für andere periodische Sternschnuppenerscheinungen Kometen bekannt sind, die der Erdbahn an den Orten nahe kommen, wo die Erde sich zur Zeit jener Erscheinungen von Meteoren befindet. Er fand so:

Period. Sternschnuppenfälle	Kometen	Knoten	Diff. der Rad. vector.	Umlaufszeit.
		☄	♁ — ☄	☄
Januar 1.—4.	1792 II	☋	— 0 . 073	
	1860 IV	☊	+ 0 . 025	
April 4.—11.?	837	☊	— 0 . 021?	
April 20.—24.	1861 I	☋	+ 0 . 002	415 J.
Mai 26.?	....	...	......	
Juli 27.	1737 II	☋	+ 0 . 005	
September 1.?	....	...	......	
Septbr. 18.—25.?	1790 I	☋	— 0 . 054?	
	1763	☊	— 0 . 016	
October 19.—26.	1779	☊	+ 0 . 024	
	1739	☋	— 0 . 078	
	1097	☋	+ 0 . 056	
	1366	☋	— 0 . 054	
November 28.	Biela	☋	— 0 . 018	6 . 6 J.
December 6.—9.	1819 IV	☊	+ 0 . 085	4 . 8 ?“

(Dem Laurentiusstrome scheint noch der Komet 1852 II anzugehören.)

Somit entbehren wahrscheinlich auch von diesen weniger bekannten Sternschnuppenepochen nur die beiden, übrigens sehr unsicher bestimmten vom 26. Mai und 1. September eines Kometen, ja einige haben ihrer sogar mehrere. Die Benutzung der Convergenzpunkte zur Ableitung der eigentlichen Bahnen dieser Meteore behält sich Dr. Weiss später durchzuführen vor und macht einstweilen nur noch auf die eigenthümliche Thatsache der auffallend häufigen Näherungen von Kometenbahnen unter einander aufmerksam.

Herr Prof. Bruhns nun hat der Sache wieder neue Seiten dadurch abgewonnen, dass er zunächst die bekannte Theilung des Biela'schen Kometen mit dem Durchgange dieses Himmelskörpers durch den Ring der Novembermeteore in Verbindung bringt. Er findet das sehr merkwürdige Resultat, dass der Komet um die Zeit, als man dessen Theilung bemerkte (Neujahr 1846), dem Ringe sehr nahe, vielleicht in demselben stand. Vorausgesetzt, dass die von Dr. Weiss aufgestellte Vermuthung des Zusammenhanges eines anderen Sternschnuppenschwarmes mit dem Kometen Biela sich bestätigt, hätten wir hier den ersten Fall zweier sich kreuzenden Meteorringe.

Prof. Bruhns schliesst weiter, dass, da ein Durchgang des Kometen durch die Sternschnuppenbahn 40 Tage vor dem Perihel des Kometen stattfindet, möglicherweise bei den Wiederkünften des Kometen in den Jahren 1859 und 1866 noch mehrfache Theilungen des Kometen eingetreten sein können.

Herr Prof. Bruhns hat es sich ferner zur Aufgabe gemacht, einer Periode in der Häufigkeit der Kometen nachzuspüren, und findet Andeutungen eines überraschenden Zusammenfallens dieser Periode mit der bekannten elfjährigen der Sonnenflecken.

Endlich hebt Prof. Bruhns noch die sehr oft vorkommenden bekannten Bahnnähen zwischen periodischen Kometen und den alten Planeten hervor, und schliesst mit der Frage, ob etwa sämmtliche periodische Kometen ihre Bahnen durch Einwirkung von Planeten erhalten haben.

(Wiener Akademie.)

X.

Ueber das Minimum oder Maximum der Summe der positiven und negativen Quadrate der Abstände eines Punktes von drei Geraden einer Ebene.

Von

Dr. Franz Wetzig,

Oberlehrer an der Realschule zu Leipzig.

(Hierzu Tafel IV, Figur 1 bis 8.)

In einer, im „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ Band 62 erschienenen Abhandlung habe ich die Eigenschaften des Punktes untersucht, in welchem die Summe beliebiger, insbesondere aber der zweiten Potenzen seiner Abstände von gegebenen Punkten, Geraden oder Ebenen ihr Minimum oder Maximum erreicht. Dass damit dieser Gegenstand noch keineswegs erschöpft sei, soll in einigen folgenden Aufsätzen und zunächst in diesem gezeigt werden, welcher specieller den Punkt, für welchen die Quadratsumme seiner Abstände von drei Geraden einer Ebene ihr Minimum erreicht, sowie mit Erweiterung der ursprünglichen Aufgabe, seine Beziehung zu den drei Punkten betrachtet, für welche die drei Aggregate ihr Minimum oder Maximum haben, die sich aus jener Summe ergeben, wenn man je ein Glied derselben negativ setzt. Es wird, wie ich glaube, daraus hervorgehen, dass dieser Punkt in seinen einfachen Beziehungen zum Dreieck den übrigen „merkwürdigen Punkten“ des Dreiecks nicht nachsteht. Ich schicke die Entwickelung einiger einfachen, wie mir scheint aber noch nicht bekannten Eigenschaften des Schwerpunktes dreier Punkte voraus. Der Vollständigkeit und veränderter Form halber wiederhole ich die schon in jener Abhandlung gegebenen allgemeinen Betrachtungen.

§. 1.

1) Sind die Abstände des Punktes A von den Punkten S und S' der Grösse und Richtung nach $SA = r$, $S'A = r'$, ist die Strecke $SS' = t$, und

wird der Winkel ASS' einfach mit rt bezeichnet, so ist

$$r'^2 = r^2 + t^2 - 2rt\cos rt.$$

Unterscheidet man die Abstände der Ecken A, B, C eines Dreiecks von den Punkten S und S' durch die Indices 1, 2, 3, so erhält man durch Addition der obenstehenden mit den analogen Gleichungen

$$r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 3t^2 - 2t(r_1\cos r_1 t + r_2\cos r_2 t + r_3\cos r_3 t).$$

1) $$r_1\cos r_1 t + r_2\cos r_2 t + r_3\cos r_3 t = 0,$$

bilden also seine Abstände der Grösse und Richtung nach an einander gesetzt ein geschlossenes Dreieck, so ist für ihn obige Summe offenbar ein Minimum, da der Zuwachs $3t^2$ positiv und zwar auf Kreisen vom Mittelpunkte S constant ist. Dieser Punkt ist aber, wie bekannt*), der Schwerpunkt des Dreiecks ABC; denn wenn man in Gleichung 1) $r_1 t = \frac{\pi}{2}$ setzt, erhält man

$$r_2\sin r_2 r_1 + r_3\sin r_3 r_1 = 0,$$
$$r_2 r_1 \sin r_2 r_1 = r_1 r_3 \sin r_1 r_3,$$
$$\triangle SBA = \triangle SAC,$$

eine bekannte Eigenschaft des Schwerpunktes, aus der sich auch sofort ergiebt, dass SA die Seite BC in L halbirt; denn es ist,

$$SBA = ALB - SLB,$$
$$SAC = ACL - SCL,$$
$$SAB : SAC = LB : CL,$$

also $LB = CL$. Ebenso halbiren SB und SC die Seiten CA und AB in M und N (Fig. 1).

2) Auf gleiche Weise findet man, dass das Aggregat

$$-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$$

in demjenigen Punkte T sein Minimum erreicht, welcher die Bedingung

2) $$-r\cos r_1 t + r_2\cos r_2 t + r_3\cos r_3 t = 0$$

erfüllt, so dass also $-r_1$, r_2, r_3 der Grösse und Richtung nach an einander gesetzt ein Dreieck bilden. Demnach muss T der Durchschnitt der durch C und B zu AB und AC gelegten Parallelen sein, wie auch sehr einfach aus Gleichung 2) folgt; denn indem man $r_2 t = \frac{\pi}{2}$ setzt, erhält man

$$r_1\sin r_1 r_2 - r_3\sin r_3 r_2 = 0,$$
$$r_1 r_2 \sin r_1 r_2 + r_2 r_3 \sin r_2 r_3 = 0,$$
$$\triangle TAB + \triangle TBC = 0,$$
$$\triangle TCA = \triangle BCA,$$

folglich liegen T und B auf einer Parallelen zu CA. Nimmt man hinzu, dass der Zuwachs des obengenannten Aggretaes die Grösse t^2 hat, so ergiebt sich das Resultat (Fig. 1):

---

*) s. *L'Huilier, de maximis et minimis* §. 68—78; *Carnot*, Geometrie der Stellung Art. 275.

In den Ecken T, U, V des dem Dreieck ABC mit parallelen Seiten umschriebenen Dreiecks erreichen die Aggregate

$$-r_1^2+r_2^2+r_3^2,\quad r_1^2-r_2^2+r_3^2,\quad r_1^2+r_2^2-r_3^2$$

ihr Minimum. Die Orte constanten Zuwachses sind Kreise mit den Mittelpunkten T, U, V, und der Zuwachs selbst ist dem Quadrate des Kreishalbmessers gleich.

Die Geraden AT, BU, CV schneiden sich in S, und da

$$\frac{AS}{SL}=-\frac{AT}{TL}=2,$$

so liegen die Punkte A, S, L, T etc. harmonisch.

Bezeichnen Σ, Σ', Σ'', Σ''' die den Punkten S, T, U, V entsprechenden Minimalwerthe der obengenannten Aggregate a, b, c die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Dreiecksseiten, so findet sich leicht

$$\Sigma=\tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$
$$\Sigma'=a^2-b^2-c^2,$$
$$\Sigma''=-a^2+b^2-c^2,$$
$$\Sigma'''=-a^2-b^2+c^2.$$

3) Das Dreieck, welches die Abstände SA, SB, SC an einander gesetzt bilden, erhält man, wenn man durch B (Fig. 1) eine Parallele zu SC bis zu ihrem Durchschnitte G mit SA zieht; dann sind SB, BG, GS gleich und gleichgerichtet mit SB, SC, SA; L ist die Mitte von GS; eine Parallele durch S zu AB, welche BC in H schneidet, halbirt BG, die GH ist parallel CA und halbirt SB, folglich ist H. der Schwerpunkt des Dreiecks SBG. Die Schwerlinien (d. h. die Strecken von jeder Ecke bis zur Mitte der gegenüberliegenden Seite) des letzteren sind die Hälften der entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC und bilden mit einander Winkel, welche die Winkel von ABC zu 180° ergänzen, z. B. $\angle CAB+\angle GHS=180°$; und die Schwerlinien LA, MB, NC des Dreiecks ABC sind das $\frac{3}{2}$fache der Seiten GS, SB, BG, und ihre Winkel ergänzen die der letzteren zu 180°, z. B. $\angle BSC+\angle SBG=180°$. Uebertrâgt man diese Bemerkungen vom Dreieck BGS auf ein ihm ähnliches DEF von paralleler Lage (Fig. 2), dessen Schwerlinien DD', EE', FF' sich in O schneiden, so erhält man den Satz:

Sind die Seiten EF, FD, DE eines Dreiecks proportional und gleichgerichtet den Schwerpunktsabständen SA, SB, SC eines anderen, so sind die Schwerpunktsabstände OD, OE, OF des ersteren proportional und gleichgerichtet den Seiten CB, AC, BA des letzteren.

Daher bilden entsprechende Strecken in beiden Dreiecken mit einander gleiche Winkel und ähnliche Dreiecke. Die Schwerlinien CN und FF' zerlegen einerseits die Dreiecke ASB und DEF, andererseits die Dreiecke ACB und DOF in ähnliche Dreiecke, nämlich $ASN \sim FEF'$, $BSN \sim FDF'$, und $ACN \sim OEF'$, $BCN \sim ODF'$. Wenn man drei congruente Dreiecke ABC

nach den Schwerlinien AL, BM, CN in je zwei Dreiecke zerlegt, so kann man die erhaltenen sechs Dreiecke auf die in Fig. 3 dargestellte Weise in eines zusammensetzen, dessen Schwerlinien die $\frac{3}{2}$fachen von den Seiten und dessen Seiten die Doppelten der Schwerlinien des ersten sind.

§. 2.

Ich gehe nun zum eigentlichen Gegenstande dieses Aufsatzes über.

1) Stellt man die Regel auf, dass die senkrechten Abstände r und r' zweier Punkte O und O' einer Ebene von einer Geraden in derselben gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, je nachdem die Punkte auf gleicher oder auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, so gilt, wenn t die Strecke OO' bezeichnet, allgemein

$$r' = r - t \cos rt.$$

Die Abstände r_1, r_2, r_3 eines Punktes O von den Seiten $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$ des Dreiecks ABC sollen positiv gerechnet werden, wenn O innerhalb des Dreiecks liegt. Sind nun r'_1, r'_2, r'_3 die entsprechenden Abstände eines beliebigen Punktes O', so erhält man mittelst vorstehender Gleichung als Quadratsumme seiner Abstände

$$r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - 2t\,(r_1 \cos r_1 t + r_2 \cos r_2 t + r_3 \cos r_3 t)$$
$$+ t^2 (\cos^2 r_1 t + \cos^2 r_2 t + \cos^2 r_3 t).$$

Diese Summe erreicht offenbar ihren kleinsten Werth, wenn die Bedingung

$$1) \qquad r_1 \cos r_1 t + r_2 \cos r_2 t + r_3 \cos r_3 t = 0$$

erfüllt ist, wenn also die Abstände r der Grösse und Richtung nach an einander gesetzt ein Dreieck bilden, welches der Winkelgleichheit wegen dem gegebenen ähnlich ist. Der durch diese Gleichung bestimmte Minimumpunkt O ist zugleich der Schwerpunkt der Fusspunkte D, E, F (Fig. 8) seiner Abstände, wie aus ihrer Uebereinstimmung mit Gleichung 1) in §. 1 folgt.

Um seine Lage zu bestimmen, nehme man eine der Dreiecksseiten, etwa a, als Nullinie und setze demnach in Gleichung 1)

$$r_1 t = r_1 a = \frac{\pi}{2}, \quad r_2 t = r_2 b + ba = \frac{\pi}{2} + ba, \quad r_3 t = r_3 c + ca = \frac{\pi}{2} + ca,$$

so erhält man

$$r_2 \sin ba + r_3 \sin ca = 0,$$
$$r_2 \sin ab = r_3 \sin ca,$$
$$r_2 : r_3 = CA : AB = b : c.$$

Die Abstände des Punktes O sind den zugehörigen Dreiecksseiten proportional, $r_1 : r_2 : r_3 = a : b : c$.

Schneiden die Geraden AO, BO, CO die gegenüberliegenden Seiten BC, CA, AB in den Punkten G, H, J (Fig. 4), so ist

$$\frac{AJ}{JB}=\frac{\triangle CAJ}{\triangle CJB}=\frac{CA.r_2}{BC.r_1}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{CB}^2}.$$

Die zwei Abschnitte, welche jede Gerade von einer Ecke des Dreiecks nach dem Punkt O auf der gegenüberliegenden Seite bildet, verhalten sich wie die Quadrate der ihnen anliegenden Seiten. Wie die Schwerlinien des Dreiecks seine Seiten in deren Mitten, d. i. in den Schwerpunkten je zweier Ecken schneiden, so sind ähnlicherweise G, H, J diejenigen Punkte der Geraden a, b, c, in welchen die Quadratsumme der zwei Abstände von den beiden übrigen Geraden ihr Minimum haben. Denn auf ganz gleiche Weise wie oben wird gefunden, dass der Punkt der Geraden AB, für welchen die Summe $r_1^2+r_2^2$ Minimum sein soll, der Bedingung

$$r_1\cos r_1c+r_2\cos r_2c=0,$$
$$r_1\sin ac+r_2\sin bc=0,$$
$$r_1:r_2=BC:CA$$

genügen muss; dieselbe wird aber durch den Punkt J erfüllt.

2) Damit das Aggregat

$$-r_1^2+r_2^2+r_3^2$$

Minimum oder Maximum sei, ist statt 1) die Bedingung

$$2)\qquad -r_1\cos r_1t+r_2\cos r_2t+r_3\cos r_3t=0$$

erforderlich, welche ausdrückt, dass $-r_1$, r_2, r_3, d. h. r_1 in der Richtung vom Fusspunkte nach dem Ausgangspunkt genommen, an einander gesetzt ein Dreieck bilden. Da der in diesem Falle sich ergebende Zuwachs

$$t^2(-\cos^2r_1t+\cos^2r_2t+\cos^2r_3t)$$

positiv oder negativ sein kann, so bedarf es einer besonderen Untersuchung (s. §. 7), ob in dem durch Gleichung 2) bestimmten Punkte, der P genannt werden soll, Minimum oder Maximum eben genannten Aggregates stattfindet.

Die Uebereinstimmung dieser Gleichung mit Gleichung 2) in §. 1 lehrt, dass, wenn unter r_1, r_2, r_3 die Abstände eines Punktes von den Fusspunkten (E', F', L in Fig. 8) der Abstände des Punktes P verstanden werden der Werth $-r_1^2+r_2^2+r_3^2$ im Punkte P sein Minimum hat und dieser mit jenen drei Fusspunkten die Ecken eines Parallelogramms bildet.

Wenn man in Gleichung 2) den Winkel r_1t, r_2t, r_3t der Reihe nach den Werth $\frac{\pi}{2}$ giebt, so erhält man auf dieselbe Weise, wie in voriger Nummer

$$\frac{r_2}{r_3}=\frac{CA}{AB},\quad \frac{r_3}{r_1}=-\frac{AB}{BC},\quad \frac{r_1}{r_2}=-\frac{BC}{CA},$$
$$-r_1:r_2:r_3=BC:CA:AB.$$

Daher liegt P auf der Geraden AO, während BP und CP die gegenüberliegenden Dreiecksseiten CA und AB in den Punkt $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ (Fig. 4.) nach denselben, aber negativen Verhältnissen theilen, als es H und J thun,

$$\frac{A\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}C} = -\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = -\frac{AH}{HC}$$
$$\frac{A\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}B} = -\left(\frac{CA}{BC}\right)^2 = -\frac{AJ}{JB}.$$

Mithin sind $\mathfrak{H}$ zu C, H, A, ferner $\mathfrak{J}$ zu A, J, B, daher auch P zu A, O, G die vierten harmonischen Punkte. Es ergiebt sich auch leicht, analog der am Schlusse voriger Nummer erwähnten Eigenschaft der Punkte G, H, J, dass $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ diejenigen Punkte der Geraden CA und AB sind, für welche die Differenzen $r_3^2 - r_1^2$ und $r_2^2 - r_1^2$ ihr Minimum (oder Maximum) haben.

Theilt der Punkt $\mathfrak{G}$ die Seite BC nach dem Verhältniss
$$\frac{B\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}C} = -\frac{B\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}C} = -\left(\frac{AB}{CA}\right)^2 {}^{*)}$$
und erreicht im Punkte Q der Werth $r_1^2 - r_2^2 + r_3^2$, im Punkte R der Werth $r_1^2 + r_2^2 - r_3^2$ sein Minimum oder Maximum, so ergiebt sich in gleicher Weise wie P als Durchschnitt von $B\mathfrak{H}$ und $C\mathfrak{J}$ und als vierter harmonischer Punkt zu A, O, G, der Punkt Q als Durchschnitt der Geraden $C\mathfrak{J}$ und $A\mathfrak{G}$ und als vierter harmonischer Punkt zu B, O, H, endlich R als Durchschnitt von $A\mathfrak{G}$ und $B\mathfrak{H}$ und vierter harmonischer Punkt zu C, O, J. Hieraus folgt:

> Die Punkte P, Q, R, in welchen die Aggregate $-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$, $r_1^2 - r_2^2 + r_3^2$, $r_1^2 + r_2^2 - r_3^2$ ihr Minimum oder Maximum erreichen, sind die Ecken eines dem gegebenen Dreieck ABC so umschriebenen Dreiecks, dass die Verbindungslinien AP, BQ, CR der gegenüberliegenden Ecken sich in dem Punkte O schneiden, in welchem die Summe $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ ihr Minimum hat.

Um eine kurze Bezeichnung zu haben, sollen die Punkte P, Q, R die dem Punkte O (in Bezug auf Dreieck CBA) „harmonisch zugeordneten" heissen. In gleicher Weise entsprechen sich der Schwerpunkt des Dreiecks und die Eckpunkte des ihm mit parallelen Seiten umschriebenen Dreiecks (§. 1), der Mittelpunkt des von innen und die Mittelpunkte der von aussen die Dreiecksseiten berührenden Kreise. In einem anderen Aufsatze werde ich zeigen, wie aus diesem Gesichtspunkte Sätze der elementaren Geometrie über die sogenannte merkwürdigen Punkte des Dreiecks, insbesondere über berührende Kreise, verallgemeinert werden.

3) Aus dem Vorhergehenden folgt sehr leicht, dass je drei Dreiecke, deren gemeinschaftliche Spitze einer der Punkte O, P, Q, R ist und die auf den Seiten des gegebenen Dreiecks stehen, sich wie die (positiven oder negativen) Quadrate derselben

---

*) Die Punkte $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{J}$ liegen bekanntlich in einer Geraden: s. z. B. Möbius barycentr. Calcul p. 270.

verhalten. Denn da allgemein zwei Dreiecke, die auf gemeinschaftlicher Seite in entgegengesetztem Sinne stehen, sich wie die Abschnitte verhalten, die von derselben auf der Geraden durch die Spitzen gebildet werden, so ist (Fig. 4)

$$AOB : BOC = AH : HC = \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2,$$
$$AOB : BOC : COA = \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2.$$

Die Verhältnisse der Dreiecke, deren Spitzen P, Q, R sind, unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen; für den Punkt P ist

$$\frac{APB}{BPC} = \frac{A\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}C} = -\left(\frac{AB}{BC}\right)^2,$$
$$\frac{BPC}{CPA} = \frac{B\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}A} = -\left(\frac{BC}{CA}\right)^2,$$
$$APB : BPC : CPA = \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 : -\overline{CA}^2.$$

§. 3.

1) Für das Folgende ist ein einfacher Hilfsatz nöthig.

Durch die Mitte G (Fig. 5) einer Kreissehne $B'C'$ werde eine beliebige Sehne CB gezogen, CB' und $C'B$ schneiden sich in A, so ist

$$\frac{BG}{GC} = \frac{\triangle ABG}{\triangle AGC} = \frac{AC'G - BC'G}{AGB' + B'GC},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch die gleichen Flächen $AC'G$ und AGB' theilt,

$$BG = \frac{1 - \frac{BC'}{AC'}}{1 + \frac{B'C}{AB'}} = \frac{AB}{AC'} : \frac{AC}{AB'} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB'}{AC'},$$

$$\frac{BG}{GC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AB'}{AC'}\right)^2.$$

Zieht man ferner $A\mathfrak{G} \parallel B'C'$, so sind C, G, B, $\mathfrak{G}$ harmonische Punkte,

$$\frac{B\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}C} = -\frac{BG}{GC} = -\left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Ist L die Mitte von BC, so sind die Dreiecke CAL und $C'AG$ ähnlich, denn sie stimmen in den Winkeln ACL und $AC'G$ und in dem Verhältniss der diese einschliessenden Seiten überein, nämlich

$$CA : CL = 2\,CA : CB = 2\,C'A : C'B' = C'A : C'G,$$

folglich Winkel $CAL = C'AG$.

Zieht man also durch A eine Gerade AG, welche die gegenüberliegende Dreiecksseite BC im Verhältniss der Quadrate der anliegenden Dreiecksseiten theilt, so ist G die Mitte der Strecke $B'C'$, welche in B' und C' mit AC und AB dieselben Winkel bildet, wie BC in C und C mit AB und AC. Umgekehrt folgt: Legt man durch die Mitte L von BC eine Parallele zu $B'C'$, so wird deren Strecke zwischen AC und AB in L nach dem Verhält-

niss der Quadrate der anliegenden Dreiecksseiten getheilt, $B'C'$ daher von AL in G' nach dem Verhältniss $B'G' : G'C' = \overline{AB'}^2 : \overline{AC'}^2$. Die Gerade $B'C'$ und die mit ihr Parallele durch A theilen BC harmonisch. Die Geraden AG und AL bilden mit der Halbirungslinie des Winkels BAC nach beiden Seiten gleiche Winkel.

2) Diese Bemerkungen finden directe Anwendung auf das gegebene Dreieck ABC (Fig. 6) und sein Höhendreieck $A'B'C$, d. h. dasjenige Dreieck, dessen Ecken A', B', C' die Fusspunkte der von A, B, C' auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Senkrechten sind; denn, legt man dasselbe Dreieck ABC zu Grunde, so ist mit den Geraden $B'C'$ und $A\mathfrak{G}$ in Fig. 5 die Seite $B'C'$ des Höhendreiecks parallel. Hieraus ergiebt sich Folgendes:

Zieht man durch die Ecken A, B, C des gegebenen Dreiecks Parallele zu den gegenüberliegenden Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ seines Höhendreiecks, so schneiden sich dieselben in den dem Punkte O harmonisch zugeordneten Punkten R, P, Q (§. 2, 2). Die Geraden AP, BQ, CR, welche je eine Dreiecksseite nach dem Verhältniss der Quadrate der anliegenden Seiten theilen, halbiren die entsprechenden Seiten des Höhendreiecks in den Punkten L', M', N', weshalb O der Mittelpunkt des Kegelschnittes ist, welcher die Seiten von ABC in C', A', B' berührt. Die Geraden AL, BM, CN, welche die Seiten des gegebenen Dreiecks halbiren, also seine Schwerlinien, theilen je eine Seite des Höhendreiecks im Verhältniss der Quadrate der anliegenden Seiten des durch das Höhendreieck vom gegebenen abgeschnittenen Dreiecks, z.B. $B'G' : G'C' = \overline{AB'}^2 : \overline{AC'}^2$, weshalb auf ihnen die Minimumpunkte O_1, O_2, O_3 der Dreieke $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ liegen. Jede der Geraden AP, BQ, CR von einer Ecke durch den Minimumpunkt bildet mit einer der beiden sie einschliessenden Dreiecksseiten denselben Winkel, wie die Schwerlinie durch diese Ecke mit der anderen, oder es wird der Winkel je zweier Geraden von einer Ecke nach Minimumpunkt und Schwerpunkt von der Geraden nach dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises halbirt.

In analoger Weise werden die Winkel der Geraden von B und C nach den den Punkten O und S harmonisch zugeordneten Punkten P und T (§. 1), also die Winkel PBT und PCT (Fig. 6) von den Geraden nach dem Mittelpunkte des zugehörigen äusseren Berührungskreises — also nach dem, dem Mittelpunkte des inneren Berührungskreises harmonisch zugeordneten Punkte — in zwei gleiche Theile getheilt. Denn da BP mit

$A'C'$ und CP mit $A'B'$, ferner BT mit AC und CT mit AB parallel ist, so bilden BP mit der Verlängerung von AB und BT mit BC die Winkel γ, CP mit der Verlängerung von AC und CT mit CB die Winkel β.

3) Da die Winkel CAL und BAG, sowie $AB'G'$ und ABG einander gleich sind, so ist $\angle AG'B' = \angle AGB$, woraus, wenn der Winkel bei A ein spitzer ist, $\angle LG'L' + \angle LGL' = 180^0$, wenn dieser Winkel stumpf ist, $\angle LG'L' = \angle LGL'$ folgt. Daher liegen die Punkte G, G', L, L' auf einem Kreise und ist im ersten Falle $\angle LGG' = \angle LL'G'$, im zweiten $\angle LGG' + \angle LL'G' = 180^0$. Da aber L der Mittelpunkt des durch B, C, B', C' gelegten Kreises und L' die Mitte der Sehne $B'C'$ ist, so ist $\angle LL'G'$ und daher auch $\angle LGG'$ ein rechter. **Also theilen die in den Punkten G, H, J auf den Dreiecksseiten errichteten Senkrechten GG', HH', JJ' die entsprechenden Seiten des Höhendreiecks nach denselben Verhältnissen, als die Seiten des gegebenen Dreiecks.**

Da die Punkte A, O, G, P harmonisch liegen, so bilden LA, LO, LG, LP einen harmonischen Büschel und der Strahl LO halbirt die mit LP parallele Dreieckshöhe AA'. Da O der Durchschnitt dieses Strahles mit AG und GG' parallel mit AA' ist, so muss auch $A'G'$ durch den Punkt O gehen und von O in demselben Verhältniss getheilt werden, als AG. Wegen der Aehnlickeit der Dreiecke $AB'C'$ und ABC muss $AO_1 : O_1G' = AO : OG$, daher OO_1 mit GG' und AA' parallel sein, folglich O_1 auf der Senkrechten OD von O auf BC im Abstande $O_1 = OD$ liegen. Man hat daher Folgendes:

> **Die drei Geraden, welche die Mitte jeder Dreiecksseite und die Mitte der zugehörigen Höhe, sowie die drei, welche jede Ecke des Höhendreiecks und den Durchschnittspunkt seiner gegenüberliegenden Seite mit der entsprechenden Schwerlinie des gegebenen Dreiecks verbinden, endlich die drei Senkrechten von dem Minimumpunkte jedes der durch das Höhendreieck vom gegebenen abgeschnittenen Dreiecke auf die gegenüberliegende Seite des gegebenen Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte, dem Minimumpunkte O; und zwar werden $A'G'$, $B'H'$, $C'J'$ in O nach denselben Verhältnissen getheilt, als AG, BH, CJ, während die genannten Senkrechten sich in O halbiren.**

Der Punkt O bildet mit den Seiten des Höhendreiecks Dreiecke, welche sich wie diejenigen verhalten, welche er mit den Seiten des gegebenen Dreiecks bildet, also wie die Quadrate dieser Seiten,

$$OB'C' : OC'A' : OA'B' = OBC : OCA : OAB = \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2 : \overline{AB}^2,$$

denn es ist

$$OB'C' : A'B'C' = OG' : A'G' = OG : AG = OBC : ABC,$$
$$OB'C' : OBC = A'B'C' : ABC.$$

4) Die in voriger Nummer bewiesenen Beziehungen finden ihre gemeinsame Erklärung darin, dass die beiden Punktsysteme A, B, C, F.... und A', B', C', F'.... in solcher Lage affin*) sind, dass der Punkt O in beiden Systemen sich selbst entspricht. Ferner entspricht dem Mittelpunkt K des umschriebenen Kreises im ersten System der Höhendurchschnitt $K'=W$ im zweiten. Denn da in affinen Figuren entsprechende Strecken durch entsprechende Punkte in demselben Verhältniss getheilt werden, so liegt der dem Punkte A als einem des zweiten Systems entsprechende Punkt $\mathfrak{A}$ des ersten so auf OL, dass $OL : L\mathfrak{A} = OL' : L'A$; und da LL' auf $B'C'$ senkrecht steht und daher mit AK parallel ist, so bestimmt sich $\mathfrak{A}$ als der Durchschnitt von OL mit AK. Der Geraden $\mathfrak{A}A$ des ersten Systems entspricht daher AA' des zweiten und, bei analoger Bezeichnung, dem Durchschnittspunkt K der drei Geraden $\mathfrak{A}A$, $\mathfrak{B}B$, $\mathfrak{C}C$ der Durchnittspunkt W von AA', BB', CC'. In den Seiten des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ liegen die Ecken des Dreiecks CAB und theilen jene nach denselben Verhältnissen, als C', A', B' die Seiten des gegebenen.

Die Punkte P, Q, R des ersten Systems liegen mit den ihnen entsprechenden P', Q', R' des zweiten auf den senkrechten Halbirungslinien der Dreiecksseiten BC, CA, AB in gleicher Entfernung von denselben nach beiden Seiten. Denn wie P zu A, O, G, so ist P' der vierte harmonische Punkt zu A', O, G', daher der Durchschnitt von $A'G'$ mit LP; und da LO die Höhe AA' halbirt, so halbirt LO auch die dazu Parallele PP'. Die Seiten des Dreiecks $P'Q'R'$ gehen durch die Ecken des Höhendreiecks $C'A'B'$ und werden von diesen nach denselben Verhältnissen getheilt, als Seiten von diesen nach denselben Verhältnissen getheilt, als die Seiten von PQR in C, A, B.

Dem umschriebenen Kreise ABC entspricht die die Seiten von $P'Q'R'$ in C', A', B' berührende Ellipse, deren Mittelpunkt der Höhendurchschnitt W ist, in welchen sich auch die Geraden $P'L'$, $Q'M'$, $R'N'$ gemeinschaftlich schneiden. Da ferner in affinen Figuren das Verhältniss entsprechender Flächen constant ist, so verhält sich die Fläche dieser Ellipse zu der des umschriebenen Kreises (und ebenso jede Fläche des zweiten Systems zur entsprechenden des ersten), wie die Fläche des Höhendreiecks zur Fläche des gegebenen, wofür man auch sagen kann**), wie der Halbmesser

---

*) Ueber die Eigenschaften affiner Figuren siehe Möbius barycentrischer Calcul §. 144, Magnus, Aufgaben und Lehrsätze §. 16.

**) Siehe Feuerbach, das geradlinige Dreieck §. 25.

desjenigen Berührungskreises des ersteren, dessen Mittelpunkt W ist, zum Halbmesser des dem zweiten umschriebenen Kreises.

5) Wird das Dreieck ABC zunächst als spitzwinklig vorausgesetzt und bezeichnet man seine Winkel bei A, B, C mit α, β, γ, so ist $\angle PCB = \angle B'A'C' = \alpha$, $\angle PBC = \angle B'A'C' = \alpha$, folglich $\angle PCB = \angle PBC = \alpha$, ebenso $\angle QCA = \angle QAC = \beta$, $\angle RAB = \angle RBA = \gamma$. Daher berührt der Kreis CAB das Dreieck PQR von innen und PL, QM, RN sind die senkrechten Halbirungslinien der Seiten BC, CA, AB, welche sich im Kreismittelpunkte K schneiden. Ist das Dreieck bei A stumpfwinklig (Fig. 7), so fallen B' und C' auf die Verlängerungen von CA und BA und die durch B und C zu $A'C'$ und $A'B'$ gezogenen Parallelen schneiden sich in einem Punkte P, der mit A auf derselben Seite von BC liegt. Da ferner $\angle PCB = \angle B'A'B = C'A'C = \angle PBC = 180^0 - \alpha$ ist, so sind PQ und QR, sowie aus ähnlichen Gründen QR, Tangenten des Kreises ABC, und zwar berührt derselbe die durch den Scheitel des stumpfen Winkels gehende Dreiecksseite QR von Aussen. Hieraus folgt:

> In jedem Dreieck PQR ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der Geraden, welche seine Ecken mit den Berührungspunkten A, B, C eines seiner berührenden Kreise verbinden, der Minimumpunkt O des Dreiecks ABC und PQR sind die ihm harmonisch zugeordneten Punkte. Den Minimumpunkten der vier Berührungskreise des Dreiecks PQR sind daher die Ecken desselben gemeinschaftlich harmonisch zugeordneten Punkte*).

§. 4.

1) Da $\angle PCB = \alpha$ (Fig. 6) und $\angle QCA = \beta$, so sind die Abschnitte, in welche der Punkt C die Seite PQ theilt,

$$PC = \frac{a}{2\cos\alpha}, \quad CQ = \frac{b}{2\cos\beta},$$

folglich verhält sich

$$PC : CQ = a\cos\beta : b\cos\alpha = BC' : C'A,$$

und ebenso

$$QA : AR = CA' : A'B, \quad RB : BP = AB' : B'C.$$

---

*) Erst nach Vollendung dieses Aufsatzes lernte ich die reichhaltige Schrift von Adams, „die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks“, kennen, wo (Lehrsatz III) bewiesen ist, dass die Geraden von den Ecken A, B, C eines Dreiecks, nach denen P, Q, R desjenigen Dreiecks, dessen Seiten den Kreis ABC in A, B, C berühren, die gegenüberliegenden Seiten des ersten im Verhältniss der Quadrate der anliegenden Seiten theilen und mit jeder von zwei anliegenden Seiten dieselben Winkel bilden, als die Schwerlinien mit der anderen.

Die Ecken des gegebenen Dreiecks theilen die Seiten des Dreiecks PQR in denselben Verhältnissen, wie die Höhen des ersteren die zugehörigen Seiten.

Die Seitenlänge PQ beträgt

$$PQ = PC + CQ = \frac{a}{2\cos\alpha} + \frac{b}{2\cos\beta} = \frac{a\cos\beta + b\cos\alpha}{2\cos\alpha\cos\beta},$$

$$PQ = \frac{c}{2\cos\alpha\cos\beta},$$

in welchem Ausdrucke statt eines stumpfen Dreieckswinkels sein Nebenwinkel zu setzen ist. Durch Multiplication dieser Gleichung mit den analogen Werthen von QR, RP erhält man

$$\frac{AB \,.\, BC \,.\, CA}{PQ \,.\, QR \,.\, RP} = 8\cos^2\alpha \,.\, \cos^2\beta \,.\, \cos^2\gamma.$$

Das Product der Cosinus der Dreieckswinkel kann man folgenderweise ausdrücken *): Bezeichnet ϱ den Halbmesser desjenigen Berührungskreises des Höhendreiecks, dessen Mittelpunkt, der Höhendurchschnitt W ist, also im spitzwinkligen Dreieck ABC den Halbmesser des $A'B'C'$ von innen, in einem bei A stumpfwinkligen Dreieck den Halbmesser des $B'C'$ von aussen berührenden Kreises und zwar negativ genommen, bezeichnet ferner R den Halbmesser des Kreises ABC, so ist

$$\frac{\varrho}{R} = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Da bekanntlich der Halbmesser des Kreises $A'B'C'$ oder, was dasselbe ist, des Kreises LMN, $\frac{1}{2}R$ beträgt**), und da die Dreiecke $A'B'C'$ und PQR ähnlich sind, so verhält sich, wenn P den Halbmesser des Kreises PQR bezeichnet,

$$\varrho : \tfrac{1}{2}R = R : P,$$

folglich ist auch

$$\frac{R}{P} = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes erhält man

$$\frac{AB \,.\, BC \,.\, CA}{PQ \,.\, QR \,.\, RP} = \frac{R^2}{2P^2},$$

oder in Worten: Das Seitenproduct eines Dreiecks PQR verhält sich zum Seitenproduct eines seiner Berührungsdreiecke ABC, wie die doppelte Kreisfläche PQR zur Kreisfläche ABC.

Uebrigens folgt dieser Satz aus der schon bekannten Proportion

$$\triangle PQR : \triangle ABC = 2P : R\text{***}),$$

---

*) Siehe Feuerbach, das geradlinige Dreieck §. 24.

**) Siehe Feuerbach §. 26; vorzüglich aber Steiner, geometrische Construction p. 49.

***) Siehe Feuerbach §. 8.

wenn man die Beziehung benutzt, dass der Halbmesser des umschriebenen Kreises gleich dem Seitenproduct des Dreiecks, dividirt durch seine vierfache Fläche ist.

2) Weil GG' parallel mit LP und das Dreieck ABG dem Dreieck $AB'G'$ ähnlich ist, so folgt

$$\frac{AL}{AP} = \frac{AG'}{AG} = \frac{AB'}{AB} = \cos\alpha,$$

$$AL = AP\cos\alpha, \quad BM = BQ\cos\beta, \quad CN = CR\cos\gamma,$$

in welchen Ausdrücken statt eines stumpfen Winkels α, β, γ sein Nebenwinkel zu setzen ist. Indem man diese Gleichungen mit einander mul tiplizirt, erhält man

$$\frac{AL\,.\,BM\,.\,CN}{AP\,.\,BQ\,.\,CR} = \cos\alpha\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\gamma = \frac{\varrho}{2R} = \frac{\frac{1}{2}R}{2P}.$$

Da ferner LO die Höhe AA' halbirt und AA' mit LP parallel geht, so ist

$$\frac{AO}{OP} = \frac{\frac{1}{2}AA'}{LP} = \frac{c\sin\beta}{2\,.\,\frac{a}{2}\,tang\,\alpha} = \frac{bc\cos\alpha}{a^2}.$$

Multiplizirt man diesen Werth mit den analogen Ausdrücken für $\frac{BO}{OQ}$ und $\frac{CO}{OR}$, so erhält man

$$\frac{AO\,.\,BO\,.\,CO}{OP\,.\,OQ\,.\,OR} = \cos\alpha\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\gamma = \frac{\varrho}{2R} = \frac{R}{4P}.$$

Das Product der Abstände der Ecken des gegebenen Dreiecks von den Mitten L, M, N seiner gegenüberliegenden Seiten verhält sich zu dem der Abstände von den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks PQR, und ebenso das der Abstände des Minimumpunktes O von den Ecken des gegebenen Dreiecks zum Product seiner Abstände von den Punkten P, Q, R wie der Halbmesser des Mittenkreises LMN zum Durchmesser des Kreises PQR.

Aus den oben stehenden Werthe von $AO:OP$ folgt

$$\frac{AO}{AP} = \frac{b\cos\alpha}{a^2 + bc\cos\alpha} = \frac{2bc\cos\alpha}{a^2+b^2+c^2} = \frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Hieraus ergiebt sich wegen $AL = AP\cos\alpha$

$$\frac{AO}{AL} = \frac{2bc}{a^2+b^2+c^2},$$

$$a\,.\,\frac{AO}{AL} = b\,.\,\frac{BO}{BM} = c\,.\,\frac{CO}{CN} = \frac{2abc}{a^2+b^2+c^2},$$

$$a\,.\,AO : b\,.\,BO : c\,.\,CO = AL : BM : CN,$$

d. i. die Rechtecke aus jeder Seite des Dreiecks mit dem Abstande des Minimumpunktes O von der gegenüberliegenden Ecke verhalten sich wie die Schwerlinien des Dreiecks.

Aus dem Werthe von $AO:OP$ erhält man noch

$$\frac{PA}{PO}=\frac{bc\cos\alpha+a^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2a^2},$$

$$a^2\frac{PA}{PO}=b^2\frac{QB}{QO}=c^2\frac{RC}{RO}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

$$\frac{PO}{PA}:\frac{QO}{QB}:\frac{RO}{RC}=a^2:b^2:c^2.$$

§. 5.

Im Folgenden sollen die Abstände der Punkte O, P, Q, R von Seiten des Dreiecks durch dessen Bestandtheile ausgedrückt werden.

1) Bezeichnen r_1, r_2, r_3 die Abstände des Punktes O von den Seiten $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, h_1, h_2, h_3 die parallelen Höhen, Δ die Fläche des Dreiecks, so ist

$$2\Delta=2ABC=2(OAB+OBC+OCA)=cr_3+ar_1+br_2,$$

woraus in Verbindung mit

$$r_1:r_2:r_3=a:b:c$$

folgt

$$r_1=h_1\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2},$$

$$r_2=h_2\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2},$$

$$r_3=h_3\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2c\Delta}{a^2+b^2+c^2},$$

woraus sich als Minimalsumme der Quadrate der Abstände ergiebt:

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=\Sigma=\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Das Verhältniss der Abstände zu den zugehörigen Dreiecksseiten ist also gleich dem der vierfachen Dreiecksfläche zur Quadratsumme der Seiten. Unterscheidet man die entsprechenden Abstände des Punktes P durch einen Strich, die von Q durch zwei, die von R durch drei Striche, so erhält man die Abstände des Punktes P aus den Gleichungen

$$2\Delta=cr'_3+ar'_1+br'_2,$$

$$-r'_1:r'_2:r'_3=a:b:c,$$

und auf gleiche Weise die der Punkte Q und R; nämlich

$$r'_1=h_1\frac{-a^2}{-a^2+b^2+c^2},\quad r'_2=h_2\frac{b^2}{-a^2+b^2+c^2},\quad r'_3=h_3\frac{c^2}{-a^2+b^2+c^2},$$

$$r''_1=h_1\frac{a^2}{a^2-b^2+c^2},\quad r''_2=h_2\frac{-b^2}{a^2-b^2+c^2},\quad r''_3=h_3\frac{c^2}{a^2-b^2+c^2},$$

$$r'''_1=h_1\frac{a^2}{a^2+b^2-c^2},\quad r'''_2=h_2\frac{b^2}{a^2+b^2-c^2},\quad r'''_3=h_3\frac{-c^2}{a^2+b^2-c^2},$$

$$\Sigma'=\frac{4\Delta^2}{-a^2+b^2+c^2},\quad \Sigma''=\frac{4\Delta^2}{a^2-b^2+c^2},\quad \Sigma'''=\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2-c^2},$$

wo Σ', ... die Minimal- bezüglich Maximalwerthe der Aggregate $-r_1'^2+r_2'^2+r_3'^2$, ... bezeichnen. Zwischen den Grössen Σ besteht die Relation

$$\frac{1}{\Sigma}=\frac{1}{\Sigma'}+\frac{1}{\Sigma''}+\frac{1}{\Sigma'''},$$

und zwischen den vier Abständen der Punkte O, P, Q, R von einer der Dreiecksseiten, etwa von a, die jener analoge

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1'}=\frac{1}{r_1''}+\frac{1}{r_1'''}=\frac{2}{h_1}.$$

Die letztere Gleichung gilt übrigens allgemein für vier Punkte, deren drei dem vierten harmonisch zugeordnet sind und enthält als besonderen Fall, in welchem von den Vorzeichen der Abstände abzusehen ist, die bekannte Relation zwischen den Halbmessern der Berührungskreise

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}.$$

2) Die vorstehenden Ausdrücke für die Abstände r vereinfachen sich, wenn man die Dreieckswinkel α, β, γ und den Winkel δ einführt, den drei Gerade durch die Ecken eines Dreiecks mit dessen Seiten bilden müssen, wenn sie sich in einem Punkte X schneiden und mit den Dreiecksseiten einen und denselben Winkel einschliessen sollen*). Dieser Winkel wird durch die Gleichung

$$\cot\delta=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

bestimmt und der Punkt X als gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt dreier Kreise gefunden, welche AB, BC, CA zu Sehnen und BC, CA, AB zu Tangenten haben; dann ist $\angle XBC=\angle XCA=\angle XAB=\delta$ und ausserdem $AX^\wedge XC=\alpha$, $BX^\wedge XA=\beta$, $CX^\wedge XB=\gamma$. Berücksichtigt man ferner die Beziehungen

$$ah_1=bh_2=ch_3=2\Delta,\quad \cot\alpha=\frac{-a^2+b^2+c^2}{4\Delta},\ \ldots.$$

so erhält man

$$\begin{array}{llll}
2r_1=a\,\mathrm{tang}\,\delta & 2r_2=b\,\mathrm{tang}\,\delta & 2r_3=c\,\mathrm{tang}\,\delta & \Sigma=\Delta\,\mathrm{tang}\,\delta,\\
-2r_1'=a\,\mathrm{tang}\,\alpha & 2r_2'=b\,\mathrm{tang}\,\alpha & 2r_3'=c\,\mathrm{tang}\,\alpha & \Sigma'=\Delta\,\mathrm{tang}\,\alpha,\\
2r_1''=a\,\mathrm{tang}\,\beta, & -2r_2''=b\,\mathrm{tang}\,\beta & 2r_3''=c\,\mathrm{tang}\,\beta & \Sigma''=\Delta\,\mathrm{tang}\,\beta,\\
2r_1'''=a\,\mathrm{tang}\,\gamma & 2r_2'''=b\,\mathrm{tang}\,\gamma, & -2r_3'''=c\,\mathrm{tang}\,\gamma & \Sigma'''=\Delta\,\mathrm{tang}\,\gamma.
\end{array}$$

Aus diesen Werthen folgt, dass die Durchschnittspunkte von AX, BX, CX mit den senkrechten Halbirungslinien von AB, BC, CA von diesen Seiten die Abstände r_3, r_1, r_2 haben. Die Ausdrücke für die Abstände der Punkte P, Q, R ergeben sich nach §. 3 auch sofort aus der Figur.

---

*) Die Eigenschaften des Punktes X hat zuerst Crelle betrachtet: Ueber einige Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Berlin 1816; ferner C. F. A. Jacobi, *de triang. rectil. proprietatibus. Lipsiae* 1825.

3) Aus den vorstehenden Gleichungen lassen sich noch einige einfache Beziehungen ableiten.

Multiplicirt man die drei Abstände der Punkte P, Q, R von je einer Dreiecksseite mit einander, so ergiebt sich, dass diese Producte sich wie die dritten Potenzen der Dreiecksseiten, oder, dass die aus diesen Abständen gebildeten Parallelepipeda sich wie die Würfel der Dreiecksseiten verhalten,

$$r_1' r_1'' r_1''' : r_2' r_2'' r_2''' : r_3' r_3'' r_3 = a^3 : b^3 : c^3.$$

Setzt man ferner in die trigonometrische Relation

$$tang\,\alpha + tang\,\beta + tang\,\gamma = tang\,\alpha \,.\, tang\,\beta \,.\, tang\,\gamma$$

die Werthe

$$tang\,\alpha = -\frac{2r_1'}{a}, \quad tang\,\beta = \frac{2r_1''}{a}, \quad tang\,\gamma = \frac{2r_1'''}{a}$$

ein, so erhält man

$$-4r_1' r_1'' r_1''' = a^2(-r_1' + r_1'' + r_1'''),$$

welche Gleichung ohne Berücksichtigung der Vorzeichen der Abstände für das spitzwinklige Dreieck lautet

$$4r_1' r_1'' r_1''' = a^2(r_1' + r_1'' + r_1'''),$$

für ein bei A stumpfwinkliges

$$4r_1' r_1'' r_1''' = a^2(r_1' - r_1'' - r''').$$

Es ist also im spitzwinkligen Dreieck das vierfache Parallelepiped aus den drei Abständen der Punkte P, Q, R von einer Dreiecksseite gleich dem Parallelepiped über dem Quadrat dieser Seite mit einer Höhe gleich der Summe jener Abstände.

In ähnlicher Weise kann man die Relation

$$4r_1' r_2'' r_3''' = r_1' bc + r_2'' ca + r_3''' ab$$

auslegen, die man erhält, wenn man

$$tang\,\alpha = -\frac{2r_1'}{a}, \quad taug\,\beta = -\frac{2r_2''}{b}, \quad tang\,\gamma = -\frac{2r_3'''}{c}$$

einsetzt.

Führt man in das Product

$$tang\,\alpha\; tang\,\beta\; tang\,\gamma$$

die Werthe ein

$$2\Delta = bc\,sin\,\alpha, \quad R = \frac{c}{2\,sin\,\gamma} = \frac{b}{2\,sin\,\beta}, \quad \varrho = 2R\,cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma,$$

so erhält man

$$tang\,\alpha \,.\, tang\,\beta \,.\, tang\,\gamma = \frac{\Delta}{\varrho R},$$

wo das Doppelte des Products ϱR gleich ist dem Producte je zweier Höhenabschnitte,

$$2\varrho R = AW \,.\, WA' = BW \,.\, WB' = CW \,.\, WC',$$

der Potenz des Punktes W in Bezug auf die drei Kreise, deren Durch-

messer die Seiten des Dreiecks sind*). Ferner drückt der Quotient $\frac{2\varDelta}{R}$ den Umfang des Höhendreiecks $u = A'B' + B'C' + C'A'$ aus, jedoch mit der Einschränkung, dass, wenn α ein stumpfer Winkel, die Seite $B'C'$ negativ zu nehmen ist**). Man hat daher

$$tang\,\alpha + tang\,\beta + tang\,\gamma = tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta\,.\,tang\,\gamma = \frac{\varDelta}{\varrho R} = \frac{u}{2\varrho},$$

und erhält man hieraus, ohne Berücksichtigung der Vorzeichen der Abstände, für das spitzwinklige Dreieck die Relationen:

$$r_1' + r_1'' + r_1''' : a = \varDelta : 2\varrho R = u : 4\varrho,$$

$$r_1' r_1'' r_1''' : \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \varDelta : \varrho R = u : 2\varrho,$$

deren erstere für das stumpfwinklige Dreieck lautet:

$$r_1' - r_1'' - r_1''' : a = \varDelta : 2\varrho R = u : 4\varrho.$$

§. 6.

Das Folgende handelt von den Dreiecken, deren Ecken die Fusspunkte der Abstände r sind.

1) Sind OD, OE, OF (Fig. 8) die Abstände des Punktes O von den Seiten BC, CA, AB, so ist nach §. 2, 1 O der Schwerpunkt von D, E, F und seine Abstände von den Ecken des Dreiecks DEF sind den Seiten des Dreiecks BCA proportional und stehen auf ihnen senkrecht. Hieraus folgt aber nach §. 1, 3, dass die Seiten des Dreiecks DEF sich wie die Schwerlinien des Dreiecks ABC verhalten und auf denselben senkrecht stehen,

$$EF : FD : DE = AL : BM : CN;$$

EF steht auf AL, FD auf BM, DE auf CN senkrecht, und die Winkel des Dreiecks DEF sind den Winkeln gleich, welche die entsprechenden Schwerlinien mit einander bilden.

Bezeichnet T wie früher den Durchschnittspunkt der Parallelen durch B und C zu den gegenüberliegenden Seiten, so sind die Dreiecke FOE und ABT ähnlich, weil sie in den Winkeln übereinstimmen und die dieselben umschliessenden Seiten proportional sind; folglich ist

$$\frac{EF}{TA} = \frac{EF}{2AL} = \frac{OF}{AB} = \frac{r_3}{c} = \tfrac{1}{2}\,tang\,\delta,$$

$$\frac{EF}{AL} = \frac{FD}{BM} = \frac{DE}{CN} = tang\,\delta = \frac{4\varDelta}{a^2+b^2+c^2}.$$

---

*) Siehe Feuerbach §. 35; vergl. Baltzer, Element.-Plan. §. 14, 7.

**) Feuerbach §. 19.

Die Seiten des Dreiecks DEF verhalten sich also zu den Schwerlinien des Dreiecks ABC, wie die vierfache Fläche des letzteren zur Quadratsumme seiner Seiten. Das Flächenverhältniss beider Dreiecke ist

$$\frac{FOE}{ABF} = \frac{\frac{1}{3}DEF}{\Delta} = \frac{1}{4}\,tang^2\,\delta = \frac{4\Delta^2}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\tfrac{1}{3}DEF : \Delta = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 : a^2 + b^2 + c^2.$$

Es verhält sich also das Dreieck DEF zum gegebenen wie die dreifache Quadratsumme der Abstände des Punktes O zur Quadratsumme der Seiten des Dreiecks ABC.

2) Sind PD' oder PL, da der Fusspunkt D' mit L zusammenfällt, ferner PE', PF' die Abstände des Punktes P von den Seiten BC, CA, AB, so bilden nach §. 2, 2 $D'P = LP$, PE', PF' der Grösse und Richtung nach an einander gesetzt ein geschlossenes Dreieck LPE', das Viereck $PE'LF'$ ist also ein Parallelogramm. Die beiden congruenten Dreiecke $F'PE'$ und $E'LF'$ sind aus denselben Gründen wie FOE dem Dreieck ABT ähnlich, woraus folgt

$$\frac{E'F'}{TA} = \frac{E'F'}{2AL} = \frac{PE'}{BF} = \frac{r_2'}{b} = \tfrac{1}{2}\,tang\,\alpha,$$

$$\frac{E'F'}{AL} = tang\,\alpha = \frac{4\Delta}{-a^2+b^2+c^2}.$$

Bei analoger Bezeichnung der Abstände der Punkte Q und R erhält man

$$\frac{F''D''}{BM} = tang\,\beta = \frac{4\Delta}{a^2-b^2+c^2},$$

$$\frac{D'''E'''}{CN} = tang\,\gamma = \frac{4\Delta}{a^2+b^2-c^2}.$$

Das Flächenverhältniss des Dreiecks $LE'F'$ zum gegebenen ist

$$\frac{LE'F'}{\Delta} = \frac{LE'F'}{ABT} = \tfrac{1}{4}\,tang^2\,\alpha = \frac{4\Delta^2}{(-a^2+b^2+c^2)^2},$$

wofür man auch schreiben kann (§. 3, 1)

$$LE'F' : \Delta = r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 : a^2 + b^2 + c^2,$$

zu welcher Beziehung die in voriger Nummer entwickelte ganz analog ist. Es folgt hieraus, dass das Verhältniss jedes der Fusspunktdreiecke zur Quadratsumme der zugehörigen Abstände dasselbe ist, nämlich

$$\frac{\frac{1}{3}DEF}{\Sigma} = \frac{LE'F'}{\Sigma'} = \frac{MF''D''}{\Sigma''} = \frac{ND'''E'''}{\Sigma'''} = \frac{\Delta}{a+b^2+c^2}.$$

§. 7.

Endlich soll noch die Grösse des Zuwachses betrachtet werden, welchen die Quadratsumme der Abstände eines Punktes von den Dreiecksseiten erfährt, wenn derselbe sich vom Minimumpunkte O oder von einem

seiner zugeordneten Punkte entfernt. Es bedarf dazu der Entwickelung einiger Hilfsätze.

1) Der Abstand des Mittelpunktes K des umschriebenen Kreises vom Höhendurchschnitt W bestimmt sich aus dem Dreieck KAW, nämlich

$$\overline{KW}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{AW}^2 - 2AK \,.\, AW \,.\, \cos KAW,$$

wo $AK = R$, ferner im spitzwinkligen Dreieck

$$AW = \frac{AB'}{\sin\gamma} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = 2R\cos\alpha, \quad \angle KAW = \beta - \gamma,$$

dagegen in einem bei A stumpfwinkligen Dreieck

$$AW = -2R\cos\alpha \text{ und } \angle KAW = 180^0 + (\beta - \gamma)$$

zu setzen ist. In beiden Fällen erhält man

$$\begin{aligned}\overline{KW}^2 &= R^2 + 4R^2\cos^2\alpha - 4R^2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)\\ &= R^2\{1 - 4\cos\alpha\,[\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma)]\}\\ &= R^2(1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).\end{aligned}$$

Zieht man ferner in dem Kreise ABC die Sehne BD senkrecht zu AB, so steht auch CD auf AC senkrecht, das Dreieck BCD hat die Winkel $CDB = 180^0 - \alpha$, $DBC = 90^0 - \beta$, $BCD = 90^0 - \gamma$, der Mittelpunkt seines umschriebenen Kreises ist ebenfalls K, sein Höhendurchschnitt aber der Durchschnitt T der durch B und C zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten AC und AB gelegten Parallelen. Setzt man diese Werthe in die obenstehende Gleichung ein, so erhält man

$$\overline{KT}^2 = R^2(1 + 8\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma),$$

und analog ist

$$\overline{KU}^2 = R^2(1 + 8\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma),$$
$$\overline{KV}^2 = R^2(1 + 8\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma),$$

durch Addition dieser vier Gleichungen*) erhält man

$$\overline{KW}^2 + \overline{KT}^2 + \overline{KU}^2 + \overline{KV}^2 = 12R^2.$$

Die Quadratsumme der Abstände des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises vom Höhendurchschnitt und den Ecken des parallel umschriebenen Dreiecks ist gleich dem dreifachen Quadrate des Kreisdurchmessers und daher auch gleich der Quadratsumme der Abstände desselben Punktes von den Mittelpunkten der vier berührenden Kreise; denn letztere hat auch den Werth $12R^2$**).

2) Bezeichnet c^2 den Zuwachs der Quadratsumme der Abstände in Bezug auf den Punkt O, so ist (§. 2, 1)

$$\frac{c^2}{t^2} = \cos^2 r_1 t + \cos^2 r_2 t + \cos^2 r_3 t.$$

*) Von diesen vier Gleichungen ist die erste schon Feuerbach §. 53 in der Form $\overline{KW}^2 = R^2 - 4\varrho R$ gegeben.

**) Siehe Feuerbach §. 50.

Da dieser Ausdruck eine stets positive Grösse ist, so ist O Minimumpunkt, und der Ort constanter Zunahme sind Ellipsen, deren Mittelpunkt O ist und welche die Dreiecksseiten in ihren Minimumpunkten G, H, J berühren (siehe §. 6 meines Aufsatzes im Journal für reine Mathematik). Nimmt man eine der Seiten, etwa a im Sinne AB, als Nulllinie und als positive Drehung die von r_1 nach r_2, setzt man $at = u$, so ist

$$r_1 t = r_1 a + at = 90^0 + u,$$
$$r_2 t = r_2 b + ba + at = 90^0 + (180^0 + \gamma) + u,$$
$$r_3 t = r_3 c + ca + at = 90^0 + (180^0 - \beta) + u,$$
$$\frac{c^2}{t^2} = \sin^2 u + \sin^2 (u - \beta) + \sin^2 (u + \gamma)$$
$$= \sin^2 u (1 + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + \cos^2 u (\sin^2\beta + \sin^2\gamma)$$
$$+ \sin u \cos u (\sin 2\gamma - \sin 2\beta).$$

Diesen Ausdruck bringt man auf die Form

$$\frac{c^2}{t^2} = A \cos^2 u + B \sin^2 u,$$

wenn man die Nulllinie um einen der beiden durch die Gleichung

$$\tang 2\varphi = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\gamma}{1 + \cos 2\beta + \cos 2\gamma}$$

bestimmten Winkel φ dreht, und man erhält durch eine kleine hier zu übergehende Zwischenrechnung für A und B die Werthe

$$2A = 3 + \sqrt{1 - 8 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}$$
$$2B = 3 - \sqrt{1 - 8 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}.$$

Da nun nach voriger Nummer

$$KW = R\sqrt{1 - 8 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma},$$

so erhält man die einfache Gleichung

$$2c^2 = t^2 \left(3 + \frac{KW}{R} \cos 2u\right).$$

Dieselbe drückt also den Zuwachs der Quadratsumme der Abstände eines Punktes aus, der sich vom Minimumpunkt O um die Strecke t entfernt hat, welche mit einer der beiden Axenrichtungen der concentrischen ähnlichen Ellipsen constanter Zunahme den Winkel u bildet. Das Axenverhältniss dieser Ellipsen hat den Werth

$$\sqrt{\frac{3R - KW}{3R + KW}}.$$

3) Bezeichnet c'^2 die Zunahme des Aggregates $-r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2$ für einen Punkt, der sich von P um die Strecke t unter dem Winkel $at = u$ entfernt hat, so ist (§. 2, 2)

$$\frac{c'^2}{t^2} = -\cos^2 r_1' t + \cos^2 r_2' t + \cos^2 r_3' t = -\cos^2 r_1 t + \cos^2 r_2 t + \cos^2 r_3 t$$
$$= \sin^2 u (\cos^2\beta - \sin^2\gamma) + \cos^2 u (\sin^2\beta + \sin^2\gamma) + \sin u \cos u (\sin 2\gamma - \sin 2\beta).$$

Diesen Ausdruck bringt man auf die Form

$$\frac{c'^2}{t^2} = A' \cos^2 u + B' \sin^2 u,$$

wenn man die Nulllinie um einen der beiden durch die Gleichung

$$\tan 2\varphi = \frac{\sin 2\gamma - \sin 2\beta}{1 - \cos 2\gamma - \cos 2\beta}$$

bestimmten Winkel φ dreht. Es ergiebt sich

$$2A' = 1 + \sqrt{1 + 8 \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma} = 1 + \frac{KT}{R},$$

$$2B' = 1 - \sqrt{1 + 8 \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma} = 1 - \frac{KT}{R}.$$

Ist α ein stumpfer Winkel, so sind A' und B' beide positiv; ist α spitz so ist A' positiv, B' negativ. Liegt also der Punkt P einem stumpfen Dreieckswinkel gegenüber, so ist er Minimumpunkt und der Ort constanter Zunahme sind Ellipsen; liegt er einem spitzen Dreieckswinkel gegenüber, so sind zwei Hyperbeln von gemeinschaftlichen Asymptoten der Ort constanten positiven oder negativen Zuwachses; für jeden Punkt der Asymptoten selbst hat das Aggregat $-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ dieselbe Grösse wie in P.

Setzt man die Werthe von A' und B' ein, so erhält man

$$2c'^2 = t^2\left(1 + \frac{KT}{R}\cos 2u\right),$$

und analog ist für die Punkte Q und R

$$2c''^2 = t^2\left(1 + \frac{KU}{R}\cos 2u\right)$$

$$2c'''^2 = t^2\left(1 + \frac{KV}{R}\cos 2u\right).$$

XI.

Zur Theorie der bestimmten Integrale und der Gammafunctionen.

Von

Dr. LUDWIG MATTHIESSEN in Husum.

Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{Ax^{2n-2}+Bx^{2n-4}+Cx^{2n-6}+\ldots\ldots\ldots+Px^2+R}{x^{2n}+ax^{2n-2}+bx^{2n-4}+cx^{2n-6}+\ldots+px^2+r}\partial x = \int_0^\infty \frac{U\,\partial x}{[x^{2n}]}$$

ist bereits in einer früheren Mittheilung (Zeitschr. VI, pag. 308) für den speciellen Fall

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^8+ax^6+bx^4+cx^2+d} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^8]}$$

von Enneper berechnet. Derselbe bezeichnet die Berechnung des allgemeinen Falles mit Recht als ein ziemlich complicirtes Problem. Ich werde nun im Folgenden zeigen, wie man sogar das allgemeine Integral

$$\int_0^\infty \frac{Ax^u+Bx^{u-1}+Cx^{u-2}+\ldots\ldots+Xx^2+Yx+Z}{[x^{rn}+ax^{r(n-1)}+bx^{r(n-2)}+\ldots+px^r+r]^m}\partial x,$$

worin r eine beliebige positive ganze oder gebrochene Zahl $\frac{v}{w} \gtrless 1$, u, m und n positive ganze Zahlen bedeuten, auf eine sehr einfache Art, blos durch Auflösung von $\frac{(v-1)mn}{w}$ oder $u+1$ linearen Gleichungen bestimmen kann Den Beweis dieses schönen Theorems, zu welchem ich auf synthetischem *Wege gelangt* bin, überlasse ich anderen Fachmännern.

§. 1.

Bestimmung des Integrals $\int_0^\infty \frac{U\,\partial x}{[x^{2n}]}$.

Wir setzen voraus, es sei

$$1)\qquad x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \ldots\ldots \mp \pi x \pm \varrho = 0$$

die Gleichung der positiven Quadratwurzeln von

$$2a)\qquad x^{2n} - a x^{2n-2} + b x^{2n-4} - c x^{2n-6} + \ldots . \mp p x^2 \pm r = 0,$$

oder von

$$2b)\qquad x^{2n} - (\alpha^2 - 2\beta)\, x^{2n-2} + (\beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta)\, x^{2n-4} - \ldots . \\ \ldots . \mp (\pi^2 - 2.o.\varrho)\, x^2 \pm \varrho^2 = 0.$$

Es ist also

$$\alpha = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots .$$
$$\beta = x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_0 x_3 + \ldots .$$

wobei $x_0 x_1 x_2 \ldots .$ als wesentlich reelle positive Grössen betrachtet werden. Es wird alsdann die Function

$$[x^{2n}] = x^{2n} + a x^{2n-2} + b x^{2n-4} + \ldots . + p x^2 + r$$

für alle möglichen reellen Werthe von x positiv bleiben und wenn nun der Differentialquotient für kein reelles x innerhalb der Grenzen Null und Unendlich selbst unendlich wird oder sein Divisor verschwindet, so ist das Integral endlich und zwar eine rationale algebraische Function der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$ der Gleichung 1). Dagegen ist das allgemeine Integral

$$3)\qquad \int_0^\infty \frac{A x^{2n-3} + B x^{2n-5} + C x^{2n-7} + \ldots . + P x}{x^{2n} + a x^{2n-2} + b x^{2n-4} + \ldots\ldots\ldots . + p x^2 + r} . \partial x$$

eine, wenn auch endliche, jedoch transcendente und zwar logarithmische Function der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$ Ausdrücke des algebraischen Integrals in Functionen von $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$ sind beispielsweise:

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^6]} = \frac{\pi}{2} . \frac{\alpha}{\gamma(\alpha\beta - \gamma)}; \quad \int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x}{[x^6]} = \frac{\pi}{2} . \frac{1}{\alpha\beta - \gamma}.$$

Ein logarithmisches Integral ist

$$\int_0^\infty \frac{x\,\partial x}{x^4 + a x^2 + b} = \frac{1}{x_0 + x_1} . \frac{\log x_0 - \log x_1}{x_0 - x_1}$$
$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} . \log\left\{\frac{\alpha/_2 + 1/_2\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{\alpha/_2 - 1/_2\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\right\}.$$

Für die allgemeinen Integrale habe ich nun mittelst vieler mühevoller Inductionen folgende Ausdrücke gefunden:

$$4)\ \int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^{2n}]} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_0}{\varrho\{-(\xi\varrho-\pi o)P_0+(\mu\varrho-\pi\nu)P_1-\ldots\pm(0\varrho-\pi.1)P_{n/2-1}\}}$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_0}{\varrho . S_0}$$

$$5)\ \int_0^\infty \frac{x^{2k}\partial x}{[x^{2n}]} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P_{k-1}}{\{-(\xi\varrho-\pi o)P_0+(\mu\varrho-\pi\nu)P_1-\ldots\pm(0\varrho-\pi 1)P_{n/2-1}\}}$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P_{k-1}}{S_0},$$

je nachdem n von der Form $4q$ oder $4q+2$ ist,

$$6)\ \int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^{2n}]} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_0}{\varrho\{-(\xi\varrho-\pi o)P_0+(\mu\varrho-\pi\nu)P_1-\ldots\pm(1.\varrho-\pi\alpha)P_{n/2-3/2}\}}$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_0}{\varrho . S_0}$$

$$7)\ \int_0^\infty \frac{x^{2k}\partial x}{[x^{2n}]} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P_{k-1}}{\{-(\xi\varrho-\pi o)P_0+(\mu\varrho-\pi\nu)P_1-\ldots\pm(1.\varrho-\pi\alpha)P_{n/2-3/2}\}}$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P_{k-1}}{S_0}$$

je nachdem n von der Form $4q+1$ oder $4q+3$ ist. Obige Integrale gelten für $k \leqq n/2$. Sämmtliche aber in dem allgemeinen Ausdrucke

$$8)\ \int_0^\infty \frac{Ax^{2n-2}+Bx^{2n-4}+Cx^{2n-6}+\ldots Px^2+R}{x^{2n}+ax^{2n-2}+bx^{2n-4}+\ldots\ldots px^2+r}\,\partial x = \int_0^\infty \frac{U\,\partial x}{[x^{2n}]}$$

enthaltenen Partialintegrale $J_{2n-2}, J_{2n-4}, \ldots J_2, J_0$ lassen sich durch Auflösung von n linearen Gleichungen berechnen. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^{2n}]} = J_0,\quad \int_0^\infty \frac{x^2\partial x}{[x^{2n}]} = J_2, \ldots \int_0^\infty \frac{x^{2n-2}\partial x}{[x^{2n}]} = J_{2n-2},$$

so bilde man folgende Gleichungen:

$$9)\quad \begin{array}{rl}
\alpha J_{2n-2} - \gamma J_{2n-4} + \varepsilon J_{2n-6} - \eta J_{2n-8} + \ldots\ldots & = \frac{\pi}{2} \\
J_{2n-2} - \beta J_{2n-4} + \delta J_{2n-6} - \zeta J_{2n-8} + \ldots\ldots & = 0 \\
\alpha J_{2n-4} - \gamma J_{2n-6} + \varepsilon J_{2n-8} - \ldots\ldots & = 0 \\
J_{2n-4} - \beta J_{2n-6} + \delta J_{2n-8} - \ldots\ldots & = 0 \\
\alpha J_{2n-6} - \gamma J_{2n-8} + \ldots\ldots & = 0 \\
\ldots - \xi J_6 + \pi J_4 & = 0 \\
\ldots + \nu J_6 - o J_4 + \varrho J_2 & = 0 \\
\ldots + \mu J_6 - \xi J_4 + \pi J_2 & = 0 \\
\ldots\ldots + \nu J_2 - o J_2 + \varrho J_0 & = 0.
\end{array}$$

Wenn n beträchtlich gross ist, so wird das von Enneper angewandte

Verfahren der directen Bestimmung eine reine Unmöglichkeit. Ich habe dasselbe bis zu $n=8$ durchgeführt. Enneper findet mittelst einer scharfsinnigen aber schwierigen Operation das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^8]} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha\beta - \gamma}{\delta(-\alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma - \gamma^2)},$$

wozu es nur der Auflösung der vier linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha J_6 - \gamma J_4 &= \frac{\pi}{2} \\ J_6 - \beta J_4 + \delta J_2 &= 0 \\ \alpha J_4 - \gamma J_2 &= 0 \\ J_4 - \beta J_2 + \delta J_0 &= 0 \end{aligned}$$

nach der Grösse J_0 bedarf. Da nun aber $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ die Coefficienten der Gleichung der Quadratwurzeln von $[x^{2n}]=0$ sind, so ist die Verwandlung der Integrale in Functionen von $a, b, c \ldots.$ noch von der Bestimmung von α abhängig. Es lässt sich also das Integral nur in endlichen und allgemeinen Functionen von $a, b, c \ldots.$ ausdrücken, so lange die Gleichung

$$x^{2n} - a x^{2n-2} + b x^{2n-4} - c x^{2n-6} + \ldots. \mp p x^2 \pm r = 0$$

nicht den achten Grad übersteigt. Deshalb ist es einfacher, von der Gleichung

$$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \ldots. \mp \pi x \pm \varrho = 0$$

auszugehen und die Function $[x^{2n}]$ abzuleiten. Uebrigens lassen sich die Wurzeln $x_0 x_1 x_2 \ldots.$ immer durch eine der Näherungsmethoden finden. Für den Fall $n=4$ ist die Gleichung in α

$$\alpha^8 - 4a\,\alpha^6 + (6a^2 - 8b \mp 48\sqrt{d})\,\alpha^4 - (4a^3 - 16ab + 64c \mp 32\sqrt{d})\,\alpha^2 + (a^2 - 4b \pm 8\sqrt{d})^2 = 0,$$

also eigentlich vom 16[ten] Grade. Sie reducirt sich aber auf eine biquadratische und unter gewissen Voraussetzungen auf eine quadratische z. B. für $a^2 d - c^2 = 0$, wenn also die Function $[x^8]$ reciprok ist. Sie geht alsdann über in

$$\alpha^4 - 2\left(a \mp 4\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\alpha^2 + \frac{a^3 - 4ab + 8c}{a} = 0.$$

Unter derselben Voraussetzung lässt sich das Polynom $[x^8]$ in zwei trinomische Factoren $x^4 + (v^2-2)x^2 + n$ und $x^4 + (w^2-2)x^2 + n$ zerlegen. Setzt man einstweilen $n=1$, so erhält man das Integral

$$10)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^4 + (v^2-2)x^2 + 1][x^4 + (w^2-2)x^2 + 1]} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{vw+1}{vw(v+w)}$$

giltig für v und $w > 0$. Setzt man $w=v$, so geht dasselbe über in

$$11)\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^4 + (v^2-2)x^2 + 1]^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v^2+1}{2v^3}.$$

Vorstehender Ausdruck ist unter den acht verschiedenen Werthen, welche

die Gleichung in α liefert, der einzig giltige und habe ich die Richtigkeit desselben für mindestens acht beliebige Zahlenwerthe von v mit Hilfe der Cotesischen Näherungsformeln bestätigt gefunden. Differenzirt man die Gleichung 11) nach v, so erhält man noch

$$12) \quad \int_0^\infty \frac{x^{2m}\partial x}{[x^4+(v^2-2)x^2+1]^{m+2}} = \frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{(m+1)!\,2^{m+1}} \cdot \frac{v^2+(2m+1)}{v^{2m+3}}.$$

Die Berechnung des allgemeinen Integrals 8), nämlich

$$13) \quad \int_0^\infty \frac{U\partial x}{[x^{2n}]} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A\,.\,P_{n-2} + B\,.\,P_{n-3} + \ldots. + P\,.\,P_0 + R\,.\,\frac{R_0}{\varrho}}{S_0}$$

geschieht nach Enneper dadurch, dass man das Polynom $[x^{2n}]$ in Binomialfactoren zerlegt und den Differentialquotienten in n Partialbrüche. Bezeichnen wir also mit $x_0^2, x_1^2, x_2^2 \ldots.$ die n Wurzeln der Gleichung 2a), so setzen wir

$$\frac{1}{(x^2+x_0^2)(x^2+x_1^2)(x^2+x_2^2)\ldots.(x^2+x_{n-1}^2)} = \frac{U_0}{x^2+x_0^2} + \frac{U_1}{x^2+x_1^2} + \frac{U_2}{x^2+x_2^2} + \ldots.$$

und berechnen $U_0\ U_1\ U_2$ u. s. w. Wegen des bestimmten Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{x^2+x_0^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x_0}$$

lässt sich alsdann die Summe der partiellen Integrale in symmetrischen Functionen der Wurzeln $x_0, x_1, x_2 \ldots.$ ausdrücken. Da die Bestimmung des allgemeinen Integrals sich also auf die Summirung gewisser symmetrischer Functionen reducirt, diese aber für das allgemeine Problem sehr complicirt sind, so habe ich durch Berechnung der Integrale niederer Ordnung von unten auf durch Induction zu den höheren fortzuschreiten gesucht und durch Zahlenrechnungen bis zum 12ten Grade inclusive controlirt. Durch Ableitung verschiedener Theoreme aus dieser Reihe specieller Integralformeln ist es mir schliesslich gelungen, nicht nur das allgemeine Integral zu entdecken, sondern in dem sub 9) angeführten Systeme linearer Gleichungen das Verfahren aufzufinden, wie diese symmetrischen Functionen summirt werden können.

Zunächst will ich die von mir nach Enneper's Methode direct berechneten Integrale hier vorführen. Aus denselben wird nämlich theils entnommen werden können, welche Anordnung der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ hergestellt werden musste, um auf das System 9) zu gerathen, theils wird aus ihnen der Sinn der Integrale 4), 5), 6), 7) klar. Das allgemeine Integral ist nämlich

$$14)\quad \int_0^\infty \frac{x^{2k}\,\partial x}{[x^{2n}]} = \Sigma \frac{x_0^{2k-1}}{(x_0^2 - x_1^2)(x_0^2 - x_2^2)(x_0^2 - x_3^2)\ldots(x_0^2 - x_{n-1}^2)}.$$

Diese Summenformel lässt sich auch in Determinanten ausdrücken (vergl. diese Zeitschrift X, pag. 505).

$$\text{I)}\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{A_0}{\alpha B_0}.$$

$$\text{II)}\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^4 + a x^2 + b} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\beta\alpha} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{B_0}{\beta\,.\,C_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x}{[x^4]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{A_0}{C_0}.$$

$$\text{III)}\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^6 + a x^4 + b x^2 + c} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{\gamma(\alpha\beta - \gamma)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{C_0}{\gamma\,.\,D_0}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{C_0}{\gamma\,[-(1\,.\,\gamma - \beta\alpha)\,B_0]};\quad B_0 = 1,\ B_1 = \beta,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x}{[x^6]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha\beta - \gamma} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{B_0}{D_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^4\,\partial x}{[x^6]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha\beta - \gamma} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{B_1}{D_0}.$$

$$\text{IV)}\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^8]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha\beta - \gamma}{\delta(-\alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma - \gamma^2)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{D_0}{\delta\,.\,E_0}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{D_0}{\delta\,[-(\alpha\delta - \gamma\beta)\,C_0 + (0\,.\,\delta - \gamma\,.\,1)\,C_1]};\quad C_0 = \alpha,\ C_1 = \gamma,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x}{[x^8]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{(-\alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma - \gamma^2)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{C_0}{E_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^4\,\partial x}{[x^8]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\gamma}{(-\alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma - \gamma^2)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{C_1}{E_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^6\,\partial x}{[x^8]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\beta\gamma - \delta\alpha}{(-\alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma - \gamma^2)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{C_2}{E_0}.$$

$$\text{V)}\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^{10}]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{-\alpha(\alpha\delta - \varepsilon) + \gamma(\alpha\beta - \gamma)}{\varepsilon[-(\beta\varepsilon - \delta\gamma)(\alpha\beta - \gamma) - (\alpha\delta - \varepsilon)^2]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{E_0}{\varepsilon F_0}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{E_0}{\varepsilon[-(\beta\varepsilon - \delta\gamma)D_0 + (1\,.\,\varepsilon - \delta\alpha)\,D_1]};\quad D_0 = \alpha\beta - \gamma,\ D_1 = \alpha\delta - \varepsilon,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x}{[x^{10}]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha\beta-\gamma}{F_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{D_0}{F_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^4\,\partial x}{[x^{10}]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha\delta-\varepsilon}{F_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{D_1}{F_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^6\,\partial x}{[x^{10}]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\delta\gamma-\beta\varepsilon}{F_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{D_2}{F_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^8\,\partial x}{[x^{10}]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\beta(\delta\gamma-\beta\varepsilon)-\delta(\alpha\delta-\varepsilon)}{F_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{D_3}{F_0}.$$

$$\text{VI)}\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^{12}]} = \frac{\pi}{2}\,\frac{-(\alpha\beta-\gamma)[(\alpha\beta-\gamma)\delta-\alpha\zeta]+(\alpha\delta-\varepsilon)[(\alpha\beta-\gamma)\beta-(\alpha\delta-\varepsilon)]}{\zeta\left\{-[-\gamma(\alpha\zeta)+\varepsilon(\alpha\delta-\varepsilon)]\,[(\alpha\delta-\varepsilon)-{}^{\gamma}/_{\alpha}(\alpha\beta-\gamma)]+\left[\alpha\zeta-\frac{\varepsilon}{\alpha}(\alpha\beta-\gamma)\right]^2\alpha\right\}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{F_0}{\zeta.G_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{F_0}{\zeta[-(\gamma\zeta-\varepsilon\delta)E_0+(\alpha\zeta-\varepsilon\beta)E_1-(0.\zeta-\varepsilon.1)E_2]}$$

$$E_0 = -\alpha(\alpha\delta-\varepsilon)+\gamma(\alpha\beta-\gamma)$$
$$E_1 = -\alpha(\alpha\zeta-\eta)+\varepsilon(\alpha\beta-\gamma)$$
$$E_2 = -\gamma(\alpha\zeta-\eta)+\varepsilon(\alpha\delta-\varepsilon) = +\alpha(\gamma\zeta-\varepsilon\delta)-\varepsilon(0\zeta-\varepsilon.1)$$
$$E_3 = -\gamma(\gamma\zeta-\varepsilon\delta)+\varepsilon(\alpha\zeta-\varepsilon\beta).$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\partial x}{[x^{12}]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{-\alpha(\alpha\delta-\varepsilon)+\gamma(\alpha\beta-\gamma)}{G_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{E_0}{G_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^4\,\partial x}{[x^{12}]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{-\alpha(\alpha\zeta)+\varepsilon(\alpha\beta-\gamma)}{G_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{E_1}{G_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^6\,\partial x}{[x^{12}]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{-\gamma(\alpha\zeta)+\varepsilon(\alpha\delta-\varepsilon)}{G_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha(\gamma\zeta-\varepsilon\delta)-\varepsilon(0\zeta-\varepsilon\,1)}{G_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{E_2}{G_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^8\,\partial x}{[x^{12}]} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{-\gamma(\gamma\zeta-\varepsilon\delta)+\varepsilon(\alpha\zeta-\varepsilon\beta)}{G_0} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{E_3}{G_0},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{10}\,\partial x}{[x^{12}]}$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\beta[-\gamma(\gamma\zeta-\varepsilon\delta)+\varepsilon(\alpha\zeta-\varepsilon\beta)]-\delta[-\gamma(\alpha\zeta)+\varepsilon(\alpha\delta-\varepsilon)]+\zeta[-\alpha(\alpha\zeta)+\varepsilon(\alpha\beta-\gamma)]}{G_0}$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{E_4}{G_0},$$

$$\text{VII)}\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^{14}]}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{-[(\alpha\delta-\varepsilon)-{}^{\gamma}/_{\alpha}(\alpha\beta-\gamma)]\{\eta(\alpha\beta-\gamma)+\varepsilon(\alpha\delta-\varepsilon)-\gamma(\alpha\zeta-\eta)\}+\alpha[(\alpha\zeta-\eta)-{}^{\varepsilon}/_{\alpha}(\alpha\beta-\gamma)]^2}{\eta\,.\,[-(\delta\eta-\zeta\varepsilon)\,F_0+(\beta\eta-\zeta\gamma)\,F_1-(1\,.\,\eta-\zeta\alpha)\,F_2]}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G_0}{\eta\,.\,H_0} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G_0}{\eta\,[-(\delta\eta-\zeta\varepsilon)\,F_0+(\beta\eta-\zeta\gamma)\,F_1-(1\eta-\zeta\alpha)\,F_2]},$$

$$F_0 = -(\alpha\beta-\gamma)\,[(\alpha\beta-\gamma)\delta-(\alpha\zeta-\eta)]+(\alpha\delta-\varepsilon)\,[(\alpha\beta-\gamma)\beta-(\alpha\delta-\varepsilon)],$$

$$F_1 = -(\alpha\beta-\gamma)\,[(\alpha\beta-\gamma)\zeta-(\alpha\vartheta-\iota)]+(\alpha\zeta-\eta)\,[(\alpha\beta-\gamma)\beta-(\alpha\delta-\varepsilon)],$$

$$F_2 = -(\alpha\delta-\varepsilon)\,[(\alpha\beta-\gamma)\,\zeta-(\alpha\vartheta-\iota)]+(\alpha\zeta-\eta)\,[(\alpha\beta-\gamma)\delta-(\alpha\delta-\varepsilon)\beta],$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x}{[x^{14}]} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F_1}{H_0} \text{ etc. etc.}$$

Eine Hauptschwierigkeit des Problems bestand anfangs für mich darin, das Product der Wurzelsummen

$$S_0 = (x_0+x_1)\,(x_0+x_2)\,(x_0+x_3)\ldots\,(x_{n-2}+x_{n-1}),$$

welches der gemeinschaftliche Divisor aller Integrale derselben Ordnung ist, zu finden und demselben eine Form zu geben, die eine symbolische Bezeichnung zulässt. Als solche eignet sich am besten die Gleichung

$$15)\qquad S_0 = -(\xi\varrho-\pi o)\,P_0+(\mu\varrho-\pi\nu)\,P_1-(k\varrho-\pi\lambda)\,P_2+\ldots$$

Sie ist immer möglich und bietet zugleich die Werthe von P_{k-1} dar. Das Product S_0 der Wurzelsummen der Gleichung

$$x^n-\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}-\gamma x^{n-3}+\ldots\mp\pi x\pm\varrho=0$$

kann ausser der von Enneper angewandten Methode noch auf mehrere andere Arten gefunden werden. Erstlich also dadurch, dass man das System 9) nach $J_0\,J_2\ldots$ auflöst und von zwei Werthen derselben den gemeinschaftlichen Theiler sucht. Noch einfacher aber ist folgendes Verfahren. Man eliminire x aus den beiden Gleichungen

$$16)\qquad \begin{array}{l} x^n-\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}-\gamma x^{n-3}\ldots\mp\pi x\pm\varrho=0 \\ x^n+\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+\gamma x^{n-3}\ldots+\pi x+\varrho=0. \end{array}$$

Die Endgleichung auf Null und eine ganze Form gebracht, ist dem Producte S_0 gleich, wenn jene vom $\frac{n(n-1)}{1.2}$ten Grade ist in Bezug auf α. Ist sie von höherem Grade, was gewöhnlich der Fall ist, so lässt sie sich stets durch Absonderung überflüssiger Factoren auf den gedachten Grad reduciren*). Wie einfach dies Verfahren im Vergleich zu dem von Enneper angewandten ist, möge ein Beispiel beweisen. Sei $n=4$.

---

*) *Lacroix, Elém. d'algèbre I, No.* 192, 193.
Bret, Journ. de l'école polyt. Cah. XV.
Lefébure, Corresp. sur l'école polyt. vol. II, No. 3.
Euler, Introd. in analysin infinitorum.

Aus

$$x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0$$
$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

folgen durch Addition und Subtraction

$$x^4 + \beta x^2 + \delta = 0, \quad \alpha x^2 + \gamma = 0.$$

Die Endgleichung ist also

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - \beta\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) + \delta = 0,$$

folglich

$$-\alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma - \gamma^2 = (x_0 + x_1)(x_0 + x_2)(x_0 + x_3)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3).$$

Wir fügen bei dieser Gelegenheit hinzu, dass man auf eine ähnliche Art die Gleichung der Wurzelsumme $s_0 = x_0 + x_1$, nämlich

$$s^r - As^{r-1} + Bs^{r-2} - Cs^{r-3} + \ldots - M_s + N = 0,$$

worin $r = \frac{n(n-1)}{1.2}$ zu setzen ist, bestimmen kann. Hierzu hat man aus den beiden Gleichungen

$$17) \quad \begin{cases} (x - s/_2)^n - \alpha(x - s/_2)^{n-1} + \beta(x - s/_2)^{n-2} - \ldots \mp \pi(x - s/_2) \pm \varrho = 0 \\ (x + s/_2)^n + \alpha(x + s/_2)^{n-1} + \beta(x + s/_2)^{n-2} + \ldots + \pi(x + s/_2) + \varrho = 0 \end{cases}$$

die Grösse x zu eliminiren. Die Endgleichung in s ist die gesuchte. Dies Problem kann zur Auflösung algebraischer Gleichungen verwendet werden. Für die biquadratische

$$x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0$$

findet man die bicubische Resolvente

$$s^6 - {}^3/_2\,\alpha s^5 + \frac{3\alpha^2 + 2\beta}{4} s^4 - \frac{\alpha^3 + 4\alpha\beta}{8} s^3 + \frac{2\alpha^2\beta + \alpha\gamma + \beta^2 - 4\delta}{16} s^2$$
$$- \frac{\alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 - 4\alpha\delta}{32} s - \frac{\alpha^2\delta - \alpha\beta\gamma + \gamma^2}{64} = 0,$$

welche entweder durch die Annahme $\alpha = 0$ oder nach Job durch Zerlegung in drei trinomische Factoren auf den dritten Grad gebracht wird*).

Aus den sub I bis VII berechneten Integralformeln lassen sich nun folgende wichtige Theoreme unschwer erkennen:

Theorem I. Sind $x_0\, x_1\, x_2 \ldots\, x_{n-1}$ die n Wurzeln der Gleichung

$$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \ldots \mp \pi x \pm \varrho = 0,$$

so ist nach 14) und 2b)

---

*) *Lacroix*, *Compl. des Elém. d'algèbre. Paris* 1804. *No.* 49.

Blomstrand, *de methodis praecipuis aequ. solutiones inveniendi. Lundae* 1847. *pag.* 20.

Schlesicke, Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Grun. Archiv, XVI, 1851.

Job, Beiträge zur Auflösung der Gleichungen. Dresden 1864. Progr.

Matthiessen, L., Die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen Gleichungen. Husum und Leipzig 1866. No. 49.

$$18)\ \Sigma \frac{x_0^{2k-1}}{(x_0^2-x_1^2)(x_0^2-x_2^2)\dots(x_0^2-x_{n-1}^2)}$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{2k}\,\partial x}{x^{2n}+(\alpha^2-2\beta)x^{2n-2}+(\beta^2-2\alpha\gamma+2\delta)x^{2n-4}+\dots+(\pi^2-2o\varrho)x^2+\varrho^2}.$$

Zur Ergänzung dieses Theorems fügen wir hinzu mit Hinweis auf 3)

$$19)\ \Sigma \frac{x_0^{2k-2}\log x_0}{(x_0^2-x_1^2)(x_0^2-x_2^2)\dots(x_0^2-x_{n-1}^2)}$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{2k-1}\,\partial x}{x^{2n}+(\alpha^2-2\beta)x^{2n-2}+\dots+(\pi^2-2o\varrho)x^2+\varrho^2},$$

sowie mit Hinweis auf Band X dieser Zeitschrift pag. 504

$$20)\ \Sigma \frac{x_0^{2k}}{(x_0^2-x_1^2)(x_0^2-x_2^2)\dots(x_0^2-x_{n-1}^2)}$$

$$=Lim \frac{x^{2k+2}}{(x^2-x_0^2)(x^2-x_1^2)\dots(x^2-x_{n-1}^2)}=0$$

für unendlich wachsende x und $2k<2n-2$.

Theorem II. Der Divisor S_0 sämmtlicher Integrale derselben Ordnung ist gleich dem Producte der Wurzelsummen der Gleichung 1).

Theorem III. Der Dividend R_0 des Integrales J_0 hat denselben Typus, wie der Coefficient des ersten Gliedes $-(o\sigma-\varrho\pi)$ des Productes von den Wurzelsummen der Gleichung

$$x^{n+1}-\alpha,\ x^n+\beta,\ x^{n-1}-\gamma,\ x^{n-1}+\dots\pm\varrho,\ x\mp\sigma_1=0$$

dividirt durch das Absolutglied ϱ.

Theorem IV. Die Form der allgemeinen Integrale J_0 und J_{2k} ist in den sub 4), 5), 6) und 7) aufgestellten Gleichungen enthalten.

Theorem V. Die Integrale $J_0, J_2 \dots J_{2n-2}$ werden durch Auflösung der sub 9) angeführten n linearen Gleichungen berechnet.

Theorem VI. Dividirt man 15) durch S_0 und multiplicirt mit $\frac{\pi}{2}$, so folgt hieraus:

$$21)\qquad -(\xi\varrho-\pi o)J_2+(\mu\varrho-\pi\nu)J_4-\dots\pm(0\varrho-\pi 1)J_n=\frac{\pi}{2},$$

$$22)\qquad \alpha J_{2n-2}-\gamma J_{2n-4}+\varepsilon J_{2n-6}-\dots\mp\pi J_n=\frac{\pi}{2},$$

je nachdem n von der Form $4q$ oder $4q+2$ ist; hingegen

$$23)\quad -(\xi\varrho-\pi o)J_2+(\mu\varrho-\pi\nu)J_4-\dots\pm(1\varrho-\pi\alpha)J_{n-2}=\frac{\pi}{2},$$

$$24)\qquad \alpha J_{2n-2}-\gamma J_{2n-2}+\varepsilon J_{2n-6}-\dots\pm\varrho' J_{n-2}=\frac{\pi}{2},$$

je nachdem n von der Form $4q+1$ oder $4q+3$ ist.

Theorem VII. Das allgemeine Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{2k}\,\partial x}{[x^{2n}+ax^{2n-2}+bx^{2n-4}+\ldots+r]^m}$$

bestimmt man dadurch, dass man in dem System 9) statt der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ der Functionsreihe die Coefficienten ihrer m^{ten} Potenz einsetzt, also für $m=2$

$$2\alpha,\quad \alpha^2+2\beta,\quad 2\alpha\beta+2\gamma,\quad \beta^2+2\alpha\gamma+2\delta,\quad 2\beta\gamma+2\alpha\delta+2\varepsilon \text{ u. s. w.}$$

§. 2.

Folgerungen für die Theorie der Functionen $\Gamma(a)$ und $B(a,b)$.

Aus den obigen Sätzen ergeben sich eine Menge schöner Eigenschaften der Gamma- und Betafunctionen. Setzt man $x_0=x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}$, so nehmen die Integrale 18) und 19) die Form von Betafunctionen an. Nach Binet's Bezeichnung ist diese Function

$$B_{(a,b)}=\frac{\Gamma_{(a)}\,.\,\Gamma_{(b)}}{\Gamma_{(a+b)}},$$

wo $\Gamma(a)$ das Euler'sche Integral erster Gattung oder die Gammafunction bezeichnet. Da nun

$$25)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2k-1}\,\partial x}{(x^2+x_0^2)^n}=\frac{\Gamma(k)\,.\,\Gamma(n-k)}{2\,\Gamma(n)\,x_0^{2n-2k}},$$

$$26)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2k}\,\partial x}{(x^2+x_0^2)^n}=\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\,.\,\Gamma(n-k-\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(n)\,x^{2n-2k-1}}$$

ist, so werden die logarithmischen Functionen algebraisch, also

$$27)\qquad Lim\,\Sigma\frac{x_0^{2k-2}\,.\,log\ nat\ x_0}{(x_0^2-x_1^2)(x_0^2-x_2^2)\ldots(x_0^2-x_{n-1}^2)}=\frac{B(k,n-k)}{2\,.\,x_0^{2n-2k}}$$

$$28)\qquad Lim\,\Sigma\frac{x_0^{2k-1}}{(x_0^2-x_1^2)(x_0^2-x_2^2)\ldots(x_0^2-x_{n-1}^2)}=\frac{B(k+\frac{1}{2},n-k-\frac{1}{2})}{2\,.\,x_0^{2n-2k-1}},$$

Aus dem System 9) ergeben sich nun unter derselben Voraussetzung $x_0=x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}$ die Gleichungen

$$\alpha=\binom{n}{1}x_0,\quad \beta=\binom{n}{2}x_0^2,\quad \gamma=\binom{n}{3}x_0^3 \text{ u. s. w.}$$

nach der üblichen Bezeichnungsweise der Binomialcoefficienten. Multiplicirt man in dem Systeme 9) die zweite Gleichung mit x_0, die dritte mit x_0^2 etc., so erhält man folgendes System:

$$29)\qquad \begin{aligned} &\binom{n}{1}x_0 J_{2n-2}-\binom{n}{3}x_0^3 J_{2n-4}+\binom{n}{5}x_0^5 J_{2n-6}-\ldots\ldots=\frac{\pi}{2}\\ &\binom{n}{0}x_0 J_{2n-2}-\binom{n}{2}x_0^3 J_{2n-4}+\binom{n}{4}x_0^5 J_{2n-6}-\ldots\ldots=0\\ &\qquad+\binom{n}{1}x_0^3 J_{2n-4}-\binom{n}{3}x_0^5 J_{2n-6}+\binom{n}{5}x_0^7 J_{2n-8}-\ldots=0 \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

Da nun weiter

$$J_{2n-2}=\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}\,\partial x}{(x^2+x_0^2)^n}=\frac{\Gamma(1/2).\Gamma(n-1/2)}{2\,\Gamma(n)\,x_0}=\frac{B(1/2,n-1/2)}{2x_0},$$

$$J_{2n-4}=\int_0^\infty \frac{x^{2n-4}\,\partial x}{(x^2+x_0^2)^n}=\frac{\Gamma(3/2).\Gamma(n-3/2)}{2.\Gamma(n)\,x_0^3}=\frac{B(3/2,n-3/2)}{2x_0^3}$$

u. s. w.,

so erhält man folgende Beziehungen für die Betafunctionen

$$30)\quad \binom{n}{1}B(1/2,n-1/2)-\binom{n}{3}B(3/2,n-3/2)+\binom{n}{5}B(5/2,n-5/2)-\ldots\ldots=\pi,$$

$$31)\quad \binom{n}{0}B(1/2,n-1/2)-\binom{n}{2}B(3/2,n-3/2)+\binom{n}{4}B(5/2,n-5/2)-\ldots\ldots=0$$

allgemein:

$$32)\quad \binom{n}{1}B\left(\frac{m}{2},n-\frac{m}{2}\right)-\binom{n}{3}B\left(\frac{m}{2}+1,\,n-\frac{m}{2}-1\right)+\ldots\ldots=0,$$

$$33)\quad \binom{n}{0}B\left(\frac{m}{2},n-\frac{m}{2}\right)-\binom{n}{2}B\left(\frac{m}{2}+1,\,n-\frac{m}{2}-1\right)+\ldots\ldots=0,$$

worin m eine ungerade Zahl bezeichnet, welche grösser als die Ein heit ist.

Da $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/2)=1/2\sqrt{\pi}$, überhaupt

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)=\frac{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots.3.1}{2^{\frac{m-1}{2}}},$$

so erhält man noch

$$34)\quad \frac{1}{2^0}\binom{n}{1}\Gamma(n-1/2)-\frac{1}{2^1}\binom{n}{3}\Gamma(n-3/2)+\frac{3.1}{2^2}\binom{n}{5}\Gamma(n-5/2)-\ldots\ldots=\sqrt{\pi}.\Gamma(n),$$

$$35)\quad \frac{1}{2^0}\binom{n}{0}\Gamma(n-1/2)-\frac{1}{2^1}\binom{n}{2}\Gamma(n-3/2)+\frac{3.1}{2^2}\binom{n}{4}\Gamma(n-5/2)-\ldots\ldots=0,$$

wozu die allgemeinen Formeln sich leicht aus 32) und 33) ergeben.

Da weiter

$$J_2=\int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x}{(x^2+x_0^2)^n}=\frac{B(n-3/2,3/2)}{2x_0^{2n-3}}=\frac{J_{2n-4}}{x_0^{2n-6}},$$

so folgern auch noch aus 21) bis 24) mehrere andere Formeln, z. B.:

$$36)\quad -\left[\binom{n}{3}\binom{n}{0}-\binom{n}{1}\binom{n}{2}\right]B(3/2,n-3/2)$$
$$+\left[\binom{n}{5}\binom{n}{0}-\binom{n}{1}\binom{n}{4}\right]B(5/2,n-5/2)-\ldots\ldots=\pi.$$

§. 3.

Bestimmung des allgemeinen Integrals $\int_0^\infty \frac{U\,\partial x}{[x^{rn}]^m}$.

Obgleich das Integral allgemeinster Form das in §. 1 betrachtete als speciellen Fall in sich schliesst, so soll dasselbe hier namentlich deshalb besonders abgehandelt werden, weil meine Bestimmung desselben sich einzig und allein auf das frühere gründet und meistentheils aus den in §. 2 für die Betafunctionen entwickelten Formeln durch Analogie hergeleitet ist. Wir gehen dabei aus von dem Integral

$$37)\qquad \int_0^\infty \frac{Ax^u + Bx^{u-1} + Cx^{u-2} + \ldots + Xx^2 + Yx + Z}{[x^{rn} + ax^{r(n-1)} + bx^{r(n-2)} + \ldots + px^r + r]}\,\partial x,$$

worin r noch eine positive ganze Zahl > 1 bedeuten soll. Der Fall $[x^{rn}]^m$ wird dann nach Theorem VII, §. 1 behandelt. Wir nehmen also jetzt an, es sei

$$x^{rn} - ax^{r(n-1)} + bx^{r(n-2)} - cx^{r(n-3)} + \ldots \mp px^r \pm r = 0$$

die Gleichung der r^{ten} Potenzen der Wurzeln $x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$ der Gleichung

$$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \ldots \mp \pi x \pm \varrho = 0.$$

Sind diese n Wurzeln sämmtlich reell und positiv, so bleibt der Divisor $[x^{rn}]$ für alle Werthe von x innerhalb der Grenzen 0 und ∞ von Null verschieden und das Integral hat einen angebbaren Werth.

Das Integral

$$38)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2k-1}\,\partial x}{x^{rn} + ax^{r(n-1)} + \ldots + px^r + r}$$

ist so lange eine bestimmbare algebraische Function des Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, als r kein Factor von $2k$ ist. Dieser Satz gründet sich auf das Integral

$$39)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2k-1}\,\partial x}{x^r + x_0^r} = \frac{\pi}{r.\sin\frac{2k\pi}{r}}\, x_0^{2k-r},$$

welches zu den Euler'schen Integralen erster Gattung gehört. (Vergl. *Instit. calcul. integr.* §. 355. Petrop 1768—1794.) Ist r ein Factor von $2k$, so wird das Integral eine transcendente und zwar logarithmische Function; das Integral 39) nimmt alsdann den Werth ∞ an. Die Berechnung des allgemeinen Integrals 37) hängt von der Auflösung von $(r-1)\,n$ linearen Gleichungen ab und es ist merkwürdig, dass alle transcendenten Integrale durch die Natur des Gesetzes, wonach die Gleichungen des Systems gebildet werden, von selbst ausgeschlossen werden. Setzt man nämlich der *Kürze* wegen wiederum

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{[x^{rn}]} = J_0, \quad \int_0^\infty \frac{x\,\partial x}{[x^{rn}]} = J_1 \;\ldots\; \int_0^\infty \frac{x^u\,\partial x}{[x^{rn}]} = J_u,$$

so bilde man folgendes System von Gleichungen:

$$\alpha J_{rn-2} \sin\frac{\pi}{r} - \beta J_{rn-3} \sin\frac{2\pi}{r} + \gamma J_{rn-4} \sin\frac{3\pi}{r} - \ldots$$

$$\ldots \pm \mu J_{rn-r-2} \sin\frac{(r+1)\pi}{r} \mp \ldots = \frac{\pi}{r}$$

$$J_{rn-2} \sin\frac{\pi}{r} - \alpha J_{rn-3} \sin\frac{2\pi}{r} + \beta J_{rn-4} \sin\frac{3\pi}{r} - \ldots$$

$$\ldots \pm \lambda J_{rn-r-2} \sin\frac{(r+1)\pi}{r} \mp \ldots = 0$$

$$J_{rn-3} \sin\frac{2\pi}{r} - \alpha J_{rn-4} \sin\frac{3\pi}{r} + \ldots$$

$$\text{40)} \qquad \ldots \mp k J_{rn-r-2} \sin\frac{(r+1)\pi}{r} \pm \ldots = 0$$

$$J_{rn-4} \sin\frac{3\pi}{r} - \alpha J_{rn-5} \sin\frac{4\pi}{r} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\alpha J_{rn-r-2} \sin\frac{(r+1)\pi}{r} - \ldots = 0$$

$$J_{rn-r-2} \sin\frac{(r+1)\pi}{r} - \ldots = 0$$

$$\ldots\ldots = 0.$$

Das Integral J_{rn-r} ist offenbar ein logarithmisches und fällt, wie man sieht, durch den Coefficienten $\sin\frac{r\pi}{r} = 0$ aus den Reihen aus. Durch das in dem System 40) herrschende Gesetz wird auch die Bildung des Systems 9) klar. Denn es ist

$$\alpha J_{2n-2} - \gamma J_{2n-4} + \varepsilon J_{2n-6} - \eta J_{2n-8} \ldots$$

$$= \alpha J_{2n-2} \sin\frac{\pi}{2} - \beta J_{2n-3} \sin\frac{2\pi}{2} + \gamma J_{2n-4} \sin\frac{3\pi}{2} - \delta J_{2n-5} \sin\frac{4\pi}{2}$$

$$+ \varepsilon J_{2n-6} \sin\frac{5\pi}{2} - \ldots$$

worin J_{2n-3}, J_{2n-5} u. s. w. logarithmische Integrale sind.

Setzt man in 40) $r = \infty$, nachdem man durch $\frac{\pi}{r}$ dividirt hat, so geht das System wegen $Lim \sin\frac{m\pi}{r} : \frac{\pi}{r} = m$ über in

$$41)\quad \begin{aligned} 1 - \alpha J_{r\,n-2} + 2\beta J_{r\,n-3} - 3\gamma J_{r\,n-4} + \ldots &= 0 \\ J_{r\,n-2} - 2\alpha J_{r\,n-3} + 3\beta J_{r\,n-4} - \ldots &= 0 \\ 2 J_{r\,n-3} - 3\alpha J_{r\,n-4} + \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0. \end{aligned}$$

Zur Erläuterung des Bildungsgesetzes von 40) bemerke ich, dass die $(r+2)^{te}$, $(2r+3)^{te}$, $(3r+4)^{te}$ Reihe jedesmal wieder mit dem Coefficienten α beginnt. Dasselbe ist auch in 9) der Fall, wenn man nachträglich die logarithmischen Integrale einschaltet.

Mittelst der aus 40) berechneten Integrale lässt sich nun auch das Product

$$42)\quad S_{r-2} = \frac{(x_0^r - x_1^r)(x_0^r - x_2^r)\ldots(x_1^r - x_2^r)(x_1^r - x_3^r)\ldots(x_{n-2}^r - x_{n-1}^r)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_{n-2} - x_{n-1})},$$

wovon das Product S_0 ein specieller Fall ist, leicht bestimmen. Der Ausdruck S_{r-2} ist nämlich der gemeinschaftliche Divisor sämmtlicher Integrale. Beispielsweise ist für $r=3$ und $n=3$

$$\alpha J_7 - \beta J_6 = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}}$$

$$43)\quad \begin{aligned} J_7 - \alpha J_6 + \gamma J_4 &= 0 \\ J_6 - \beta J_4 + \gamma J_3 &= 0 \\ \alpha J_4 - \beta J_3 &= 0 \\ J_4 - \alpha J_3 + \gamma J_1 &= 0 \\ J_3 - \beta J_1 + \gamma J_0 &= 0, \end{aligned}$$

folglich

$$J_0 = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{(\alpha^2 - \beta)\beta - \alpha\gamma}{\gamma^2 [(\alpha^2 - \beta)\beta^2 - \alpha^3\gamma]} = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{(\alpha^2 - \beta)\beta - \alpha\gamma}{S_2},$$

$$J_1 = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta}{\gamma S_2}, \quad J_2 = F(\log \alpha, \beta, \gamma),$$

$$J_3 = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\alpha}{S_2}, \qquad J_4 = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\beta}{S_2},$$

$$J_5 = f(\log \alpha, \beta, \gamma); \qquad J_4 = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{S_2},$$

$$J_7 = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\alpha(\beta^2 - \alpha\gamma) - \beta\gamma}{S_2}.$$

Es ist also

$$S_2 = (x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2)(x_0^2 + x_0 x_2 + x_2^2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = (\alpha^2 - \beta)\beta^2 - \alpha^3\gamma.$$

§. 4.

Folgerungen für die Functionen $\Gamma(a)$ und $B(a,b)$.

Setzt man wiederum $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$, so nimmt das Integral J_u wiederum die Form von Betafunctionen an. Das Euler'sche Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,\partial x}{(1+x)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\,.\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(a,b)$$

lässt folgende Verallgemeinerungen zu:

$$44)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{ra-1}\,\partial x}{(x^r+x_0^r)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\,.\,\Gamma(b)}{r\,.\,\Gamma(a+b)\,.\,x_0^{rb}} = \frac{B(a,b)}{r\,.\,x_0^{rb}},$$

$$45)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{ra+u-1}\,\partial x}{(x^r+x_0^r)^{a+b}} = \frac{\Gamma\left(a+\frac{u}{r}\right).\,\Gamma\left(b-\frac{u}{r}\right)}{r\,.\,\Gamma(a+b)\,.\,x_0^{rb-u}}.$$

Dividirt man die Gleichung des Systems 40) durch $\frac{\pi}{r}$, schafft in der ersten Gleichung die 1 nach links und beachtet, dass

$$\sin\frac{m\pi}{r} = \pi : B\left(\frac{m}{r},\ 1-\frac{m}{r}\right),$$

so erhält man folgende Beziehungen für die Betafunctionen:

$$\binom{n}{0}\frac{B(0,n)}{B(0,1)} - \binom{n}{1}\frac{B\left(\frac{1}{r},\ n-\frac{1}{r}\right)}{B\left(\frac{1}{r},\ 1-\frac{1}{r}\right)} + \binom{n}{2}\frac{B\left(\frac{2}{r},\ n-\frac{2}{r}\right)}{B\left(\frac{2}{r},\ 1-\frac{2}{r}\right)} - \binom{n}{3}\frac{B\left(\frac{3}{r},\ n-\frac{3}{r}\right)}{B\left(\frac{3}{r},\ 1-\frac{3}{r}\right)} + \ldots = 0$$

$$46)\qquad \binom{n}{0}\frac{B\left(\frac{1}{r},\ n-\frac{1}{r}\right)}{B\left(\frac{1}{r},\ 1-\frac{1}{r}\right)} - \binom{n}{1}\frac{B\left(\frac{2}{r},\ n-\frac{2}{r}\right)}{B\left(\frac{2}{r},\ 1-\frac{2}{r}\right)} + \binom{n}{2}\frac{B\left(\frac{3}{r},\ n-\frac{3}{r}\right)}{B\left(\frac{3}{r},\ 1-\frac{3}{r}\right)} - \ldots = 0$$

$$\binom{n}{0}\frac{B\left(\frac{2}{r},\ n-\frac{2}{r}\right)}{B\left(\frac{2}{r},\ 1-\frac{2}{r}\right)} - \binom{n}{1}\frac{B\left(\frac{3}{r},\ n-\frac{3}{r}\right)}{B\left(\frac{3}{r},\ 1-\frac{3}{r}\right)} + \ldots = 0$$

u. s. w.

Beispielsweise folgt aus der ersten Gleichung für $n = 4$, $r = 3$

$$1 - 4\,\frac{8\,.\,5\,.\,2}{3^3} + 6\,\frac{7\,.\,4\,.\,1}{3^3} - 1\,.\,\frac{1\,.\,5\,.\,2}{3^3} = 0;$$

die Glieder mit dem Divisor $B\,(0,\,1)$ fallen sämmtlich weg.

Für $r = \infty$ erhält man eine bekannte Eigenschaft der Binomialcoefficienten, nämlich

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \ldots \mp \binom{n}{n-1} \pm \binom{n}{n} = 0.$$

§. 5.

Bestimmung des allgemeinen Integrals $\int\limits_0^\infty \frac{U\,\partial x}{\left[x^{\frac{v}{w}n}\right]^m}$.

Das Integral ist ebenso leicht zu berechnen, wenn r eine rationale Bruchform $\frac{v}{w}$ hat. Man braucht nur zu substituiren

$$x^{\frac{1}{w}} = y, \quad x = y^w \text{ und } \partial x = w y^{w-1}\,\partial y.$$

Das Integral ist so auf das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{U\,\partial y}{[y^{vn}]^m}$ zurückgeführt. Da nun die untere und obere Grenze der bestimmbaren Integrale

$$J_0 = \int\limits_0^\infty \frac{\partial y}{[y^{vn}]^m}, \quad J_{vnm-2} = \int\limits_0^\infty \frac{y^{vnm-2}\,\partial y}{[y^{vn}]^m}$$

bilden, so sind

$$J_0 = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{1-w}{w}}\,\partial x}{\left[x^{\frac{v}{w}n}\right]^m} \text{ und } J_u = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{vnm-w-1}{w}}\,\partial x}{\left[x^{\frac{v}{w}n}\right]^m}$$

die Grenzen der bestimmbaren Integrale für gebrochene r. Hieraus geht nun hervor, dass Integrale der im Vorhergehenden betrachteten Art für alle reellen ganzen oder gebrochenen positiven oder negativen Werthe von r sich berechnen lassen, so lange in dem Integrale $\int\limits_0^\infty \frac{x^u\,\partial x}{[x^{rn}]^m}$ die Bedingung $u + 1 < rnm$ erfüllt bleibt. So z. B. durch Substitution von $x^{-1/2} = y^2$

$$\int_0^\infty \frac{x^{-7/4}\,\partial x}{x^{-2/3}+a x^{-1/3}+b} = -b \int_0^\infty \frac{\partial y}{y^4+a y^2+b}.$$

Das System 46) ist nun gültig für positive und negative gebrochene Werthe von r. Z. B. die erste Gleichung giebt für

$n=3,\quad r=3/2$

$$1-3\,\frac{\Gamma(2/3)\,.\,\Gamma(7/3)}{\Gamma(3)\;\Gamma(2/3)\;\Gamma(1/3)}+3\,\frac{\Gamma(4/3)\,.\,\Gamma(5/3)}{\Gamma(3)\;\Gamma(4/3)\;\Gamma(-1/3)}-1\,\frac{\Gamma(6/3)\,.\,\Gamma(3/3)}{\Gamma(3)\;\Gamma(6/3)\;\Gamma(-3/3)}$$
$$=1-3/2\;4/3\,.\,1/3-3/2\,.\,2/3\,.\,1/3=0,$$

$n=3,\quad r=3/4$

$$1-3\,\frac{\Gamma(4/3)\,.\,\Gamma(5/2)}{\Gamma(3)\;\Gamma(4/3)\;\Gamma(-1/3)}+3\,\frac{\Gamma(8/3)\,.\,\Gamma(1/3)}{\Gamma(3)\;\Gamma(8/3)\;\Gamma(-5/3)}-1\,\frac{\Gamma(12/3)\,.\,\Gamma(-3/3)}{\Gamma(3)\,\Gamma(12/3)\,\Gamma(-9/3)}$$
$$=1+3/2\,.\,1/3\,.\,2/3+3/2\,.\,5/3\,.\,2/3-1/2\,.\,8/1\,.\,2/1=0,$$

$n=3,\quad r=-2/3$

1) $$1-3\,\frac{\Gamma(-2/3)\,.\,\Gamma(11/3)}{\Gamma(3)\;\Gamma(-2/3)\;\Gamma(5/3)}+3\,\frac{\Gamma(-4/3)\,.\,\Gamma(13/3)}{\Gamma(3)\;\Gamma(-4/3)\;\Gamma(7/3)}-1\,\frac{\Gamma(-2)\,.\,\Gamma(5)}{\Gamma(3)\;\Gamma(-2)\;\Gamma(3)}$$
$$=1-3/2\,.\,8/3\,.\,5/3+3/2\,.\,10/3\,.\,7/3-1/2\,.\,4/1\,.\,3/1=0,$$

2) $$1/2\,.\,8/3\,.\,5/3-3/2\,.\,10/3\,.\,7/3+3/2\,.\,12/3\,.\,9/3-1/2\,.\,14/3\,.\,11/3=0,$$

3) $$1/2\,.\,10/3\,.\,7/3-3/2\,.\,12/3\,.\,9/3+3/2\,.\,14/3\,.\,11/3-1/2\,.\,16/3\,.\,13/3=0,$$

4) $$1/2\,.\,12/3\,.\,9/3-3/2\,.\,14/3\,.\,11/3+3/2\;16/3\,.\,13/3-1/2\,.\,18/3\,.\,15/3=0$$

u. s. w.

Ist überhaupt $r=-\frac{v}{w}$, so ist gemäss 46)

$$\binom{n}{0}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma\left(n+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{w}{v}\right)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2w}{v}\right)}-\ldots\binom{n}{n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{nw}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{nw}{v}\right)}=0,$$

47) $$\binom{n}{0}\frac{\Gamma\left(n+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{w}{v}\right)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma\left(n+\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2w}{v}\right)}+\ldots\binom{n}{n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{[n+1]w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{[n+1]w}{v}\right)}=0$$

u. s. w.

Für $w=v$, also $r=-1$

48) $$\binom{n}{0}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(3)}-\ldots\binom{n}{n}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n+1)}=0,$$
$$\binom{n}{0}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(3)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(4)}-\ldots\binom{n}{n}\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)}=0$$

allgemein

$$49)\ \binom{n}{0}\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r+1)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(r+2)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma(n+r+2)}{\Gamma(r+3)}-\cdots\binom{n}{n}\frac{\Gamma(2n+r)}{\Gamma(n-r+1)}=0,$$

oder auch wegen $\Gamma(n+r)=(n+r-1)!$ als Facultät geschrieben

$$50)\ \binom{n}{0}\frac{(n+r-1)!}{r!}-\binom{n}{1}\frac{(n+r)!}{(r+1)!}+\binom{n}{2}\frac{(n+r+1)!}{(r+2)!}-\cdots\binom{n}{n}\frac{(2n+r+1)!}{(n-r)!}=0,$$

eine Gleichung, welche eine merkwürdige Eigenschaft der Binomialcoefficienten darstellt.

Aus 48) folgt noch durch Einsetzung der Gammafunction für die Binomialcoefficienten

$$51)\ \frac{1}{\Gamma(1)^2}\cdot\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}-\frac{1}{\Gamma(2)^2}\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)}+\frac{1}{\Gamma(3)^2}\cdot\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n-1)}-\frac{1}{\Gamma(4)^2}\cdot\frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(n-2)}$$
$$+\ldots=0,$$

oder auch durch Einsetzung des Binomialcoefficienten für die Gammafunctionen, nachdem man durch $\Gamma(n)$ dividirt hat, folgende Beziehung zwischen den Binomialcoefficienten und figurirten Zahlen:

$$52)\ \begin{aligned}
&\binom{n}{0}\binom{n-1}{0}-\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\binom{n+1}{2}-\binom{n}{3}\binom{n+2}{3}+\ldots=0\\
&\binom{n}{0}\binom{n}{1}-\binom{n}{1}\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}\binom{n+2}{3}-\binom{n}{3}\binom{n+3}{4}+\ldots=0\\
&\binom{n}{0}\binom{n+1}{2}-\binom{n}{1}\binom{n+2}{3}+\binom{n}{2}\binom{n+3}{4}-\binom{n}{3}\binom{n+4}{5}+\ldots=0
\end{aligned}$$

u. s. w.

Diesen Reihen lassen sich auch rückwärts fortsetzen, wie folgt:

$$53)\ \begin{aligned}
&\ldots\ldots\ldots=0\\
&-\binom{n}{3}\binom{n-1}{0}+\ldots=0\\
&+\binom{n}{2}\binom{n-1}{0}-\binom{n}{3}\binom{n}{1}+\ldots=0\\
&-\binom{n}{1}\binom{n-1}{0}+\binom{n}{2}\binom{n}{1}-\binom{n}{3}\binom{n+1}{2}+\ldots=0\\
&\binom{n}{0}\binom{n-1}{0}-\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\binom{n+1}{2}-\binom{n}{3}\binom{n+2}{3}+\ldots=0\\
&\binom{n}{0}\binom{n}{1}-\binom{n}{1}\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}\binom{n+2}{3}-\binom{n}{3}\binom{n+3}{4}+\ldots=0
\end{aligned}$$

u. s. w.

Durch Addition aller dieser:

$$54)\ \binom{n}{0}\binom{n+r}{r}-\binom{n}{1}\binom{n+r+1}{r+1}+\binom{n}{2}\binom{n+r+2}{r+2}-\binom{n}{3}\binom{n+r+3}{r+3}$$
$$+\ldots=0.$$

Man erkennt hieraus leicht, dass neue Reihen durch Addition aller vorhergehenden entstehen. Ebenso lassen sich die Systeme 46), 47), 48) *rückwärts fortsetzen*; z. B. 47)

$$55)\quad \begin{aligned}&\binom{n}{0}\frac{\Gamma\left(n-\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2w}{v}\right)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma\left(n-\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{w}{v}\right)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)}-\binom{n}{3}\frac{\Gamma\left(n+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{w}{v}\right)}\\&\qquad+\ldots.=0\\&\binom{n}{0}\frac{\Gamma\left(n-\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{w}{v}\right)}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{w}{v}\right)}-\binom{n}{3}\frac{\Gamma\left(n+\frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2w}{v}\right)}\\&\qquad+\ldots.=0.\end{aligned}$$

Durch Addition erhält man

$$56)\quad \binom{n}{0}\frac{\Gamma r-\frac{2w}{v}}{\Gamma 1-\frac{2w}{v}}-\binom{n}{1}\frac{\Gamma^{r}-\frac{w}{v}}{\Gamma 1-\frac{w}{v}}+\binom{n}{2}\frac{\Gamma r}{\Gamma 1}-\binom{n}{3}\frac{\Gamma r+\frac{w}{v}}{\Gamma 1+\frac{w}{v}}+\ldots.=0.$$

XII.

Bestimmung der symmetrischen Function

$(x_0^n + x_1^n)\,(x_0^n + x_2^n)\,(x_0^n + x_3^n)\;\ldots\;(x_{m-2}^n + x_{m-1}^n)$

der Wurzeln einer Gleichung vom m^{ten} Grade.

Von

Dr. Ludwig Matthiessen in Husum.

Wenn $x_0\, x_1\, x_2 \ldots . x_{m-1}$ die m Wurzeln der Gleichung

$$x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \ldots . \mp \pi x \pm \varrho = 0$$

bezeichnen, so lassen sich folgende symmetrische Functionen der Wurzeln durch Auflösung von $(n-1)\, m$ linearen Gleichungen berechnen:

$$1)\quad \frac{x_0^n - x_1^n}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x_0^n - x_2^n}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x_0^n - x_3^n}{x_0 - x_3} \ldots . \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_1^n - x_3^n}{x_1 - x_3} \ldots . \frac{x_{m-2}^n - x_{m-1}^n}{x_{m-2} - x_{m-1}},$$

$$2)\quad \frac{x_0^n + x_1^n}{x_0 + x_1} \cdot \frac{x_0^n + x_2^n}{x_0 + x_2} \cdot \frac{x_0^n + x_3^n}{x_0 + x_3} \ldots . \frac{x_1^n + x_2^n}{x_1 + x_2} \cdot \frac{x_1^n + x_3^n}{x_1 + x_3} \ldots . \frac{x_{m-2}^n + x_{m-1}^n}{x_{m-2} + x_{m-1}}$$

$$3)\quad (x_0^n + x_1^n).(x_0^n + x_2^n).(x_0^n + x_3^n) \ldots . (x_1^n + x_2^n).(x_1^n + x_3^n) \ldots . \ldots . (x_{m-2}^n + x_{m-1}^n),$$

ferner durch Auflösung von $(n + r - 2)\, m$ linearen Gleichungen die Function

$$4)\quad \frac{x_0^n \pm x_1^n}{x_0^r \pm x_1^r} \cdot \frac{x_0^n \pm x_2^n}{x_0^r \pm x_2^r} \ldots . \frac{x_1^n \pm x_2^n}{x_1^r \pm x_2} \cdot \frac{x_1^n \pm x_2^n}{x_1^r \pm x_2^r} \ldots . \frac{x_{m-2}^n \pm x_{m-1}^n}{x_{m-2}^r \pm x_{m-1}^n}.$$

Die Bestimmung der Functionen 2), 3) und 4) lässt sich offenbar auf die von 1) reduciren. *So* ist z. B.

$$(x_0^n + x_1^n) = \frac{x_0^{2n} - x_1^{2n}}{x_0^2 - x_1^2} \cdot \frac{x_0 - x_1}{x_0^n - x_1^n} \cdot \frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0 - x_1}.$$

Die von mir angewandte Methode, die Function 1) zu bestimmen durch die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ der Gleichung $[x^m] = 0$ besteht darin, das System 5) in XI nach y aufzulösen. Wenn alsdann

$$y = \frac{R}{S}$$

der auf die kleinste Benennung gebrachte Wurzelwerth ist, so ist die gesuchte Function 1) gleich S.

Bezeichnen wir die Hauptgrössen des Systems mit

$$y_{nm-2}, \quad y_{nm-3}, \quad y_{nm-4} \ldots\ldots y_3, \quad y_2, \quad y_1, \quad y_0$$

und setzen jede n^{te} dieser Grössen gleich Null, also

$$y_{nm-n-1} = y_{nm-2n-1} = \ldots\ldots = y_{2n-1} = y_{n-1} = 0,$$

so ist

$$\begin{array}{rrr}
\alpha y_{nm-2} - \beta y_{nm-3} + \gamma y_{nm-4} - \ldots\ldots \mp \lambda y_{nm-n} & \pm \nu y_{nm-n-2} \mp \ldots & = 1 \\
y_{nm-2} - \alpha y_{nm-3} + \beta y_{nm-4} - \ldots\ldots \mp \varkappa y_{nm-n} & \pm \mu y_{nm-n-2} \mp \ldots & = 0 \\
y_{nm-3} - \alpha y_{nm-4} + \ldots\ldots \pm \iota y_{nm-n} & \mp \lambda y_{nm-n-2} \pm \ldots & = 0 \\
y_{nm-4} - \alpha y_{nm-5} + \ldots\ldots & \pm \varkappa y_{nm-n-2} \mp \ldots & = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0 \\
 & \alpha y_{nm-n-2} - \beta y_{nm-n-2} + \ldots & = 0 \\
 & y_{nm-n-2} - \alpha y_{nm-n-3} + \ldots & = 0 \\
 & y_{nm-n-3} + \ldots & = 0 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0.
\end{array}$$

Bestimmt man aus diesen $(n-1)m$ Gleichungen y_{nm-2} und y_{nm-3}, wobei

$$y_{nm-2} = \frac{R_0}{S}, \quad y_{nm-3} = \frac{R_1}{S}$$

sein wird, so ist der gemeinschaftliche Divisor S die gesuchte Function. Zur grösseren Deutlichkeit nehmen wir beispielsweise $n = 5$, $m = 3$. Die Functionsreihe ist

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0,$$

also

$$\alpha = x_0 + x_1 + x_2, \quad \beta = x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2, \quad \gamma + x_0 x_1 x_2.$$

Gesucht wird die symmetrische Function

$$\frac{x_0^5 - x_1^5}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x_0^5 - x_2^5}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x_1^5 - x_2^5}{x_1 - x_2} = F(\alpha, \beta, \gamma).$$

Hierzu dienen folgende zwölf Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-\alpha y_{13}+\beta y_{12}-\gamma y_{11}&=-1\\
y_{13}-\alpha y_{12}+\beta y_{11}-\gamma y_{10}&=0\\
y_{12}-\alpha y_{11}+\beta y_{10}\qquad&=0\\
y_{11}-\alpha y_{10}\qquad+\gamma y_8&=0\\
y_{10}\qquad-\beta y_8+\gamma y_7&=0\\
-\alpha y_8+\beta y_7-\gamma y_6&=0\\
y_8-\alpha y_7+\beta y_6-\gamma y_5&=0\\
y_7-\alpha y_6+\beta y_5\qquad&=0\\
y_6-\alpha y_5\qquad+\gamma y_3&=0\\
y_5\qquad-\beta y_3+\gamma y_2&=0\\
-\alpha y_3+\beta y_2-\gamma y_1&=0\\
y_3-\alpha y_2+\beta y_1-\gamma y_0&=0.
\end{aligned}$$

Berechnet man hieraus y_{13} und y_{12}, so findet man

$$y_{13}=\frac{R_0}{F(\alpha,\beta,\gamma)},\quad y_{12}=\frac{R_1}{F(\alpha,\beta,\gamma)},\quad y_{11}=\frac{R_2}{F(\alpha,\beta,\gamma)}$$

u. s. w.

Die Function $F(\alpha, \beta, \gamma)$ lässt sich noch auf einem anderen Wege bestimmen, nämlich mittelst der Discriminante der Gleichung der n^{ten} Potenzen der Wurzeln der Functionsreihe.

Nach Brioschi erhält man die Discriminante einer homogenen Gleichung zweier Variabeln, indem man die beiden partiellen Differentialquotienten gleich Null setzt und die Variabeln eliminirt. Setzt man also, um sie homogen zu machen, in der Gleichung

$$x^m-\alpha x^{m-1}+\beta x^{m-2}-\gamma x^{m-3}+\ldots\mp\pi x\pm\varrho=0=F(x)$$

$y/_z$ statt x, multiplicirt sie mit z^m und sucht die partiellen Differentialquotienten, so erhält man

$$\left[\frac{\partial F(y,z)}{\partial y}\right]=my^{m-1}-\alpha(m-1)y^{m-2}z+\beta(m-2)y^{m-3}z^2$$
$$-\gamma(m-3)y^{m-4}z^3+\ldots=0$$

$$\left[\frac{\partial F(y,z)}{\partial z}\right]=-\alpha y^{m-1}+2\beta y^{m-2}z-3\gamma y^{m-3}z^2+\ldots=0.$$

Die Endgleichung ist die Discriminante D. Diese hat aber eine merkwürdige Beziehung zu der Gleichung der quadrirten Differenzen, indem sie proportional ist dem Absolutgliede derselben. Es ist also

$$D_m=\frac{1}{m^m}(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)^2(x_0-x_3)^2\ldots(x_{m-2}-x_{m-1})^2.$$

Verwandelt man nun die Functionsreihe $F(x)$ in eine andere, deren Wurzeln die n^{ten} Potenzen derselben Wurzeln sind, so kann man auch die *Discriminante* Δ_m erhalten als

$$\Delta_m = \frac{1}{m^m}(x_0^n - x_1^n)^2 (x_0^n - x_2^n)^2 (x_0^n - x_3^n)^2 \ldots (x_{m-2}^n - x_{m-1}^n)^2.$$

Dividirt man beide Gleichungen, so erhält man offenbar das interessante Ergebniss

$$\frac{x_0^n - x_1^n}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x_0^n - x_2^n}{x_0 - x_2} \ldots \frac{x_{m-2}^n - x_{m-1}^n}{x_{m-2} - x_{m-1}} = \sqrt{\frac{\Delta_m}{D_m}} = F(\alpha, \beta, \gamma \ldots).$$

Da nun aus dem Obigen hervorgeht, dass $F(\alpha, \beta, \gamma)$ stets eine rationale Form hat, so ergiebt sich hieraus noch das

Theorem: Die Discriminante einer algebraischen Function steht zu der Discriminante einer Function, deren Wurzeln die n^{ten} Potenzen der Wurzeln der ursprünglichen Function sind, immer im quadratischen Verhältniss.

Hieraus folgt noch

$$\frac{x_0^n - x_1^n}{x_0^r - x_1^r} \cdot \frac{x_0^n - x_2^n}{x_0^r - x_2^r} \cdot \frac{x_0^n - x_3^n}{x_0^r - x_3^r} \ldots \frac{x_{m-2}^n - x_{m-1}^n}{x_{m-2}^r - x_{m-1}^r} = \sqrt{\frac{\Delta_m}{\mathfrak{D}_m}} \; (rational).$$

XIII.

Ueber die räumliche Projection (Reliefperspective), insbesondere diejenige der Kugel.

Von

RAFAEL MORSTADT,

Assistent der descriptiven Geometrie am Polytechnikum zu Prag.

(Hierzu Tafel V, Figur 9 bis 13.)

Der Verfasser hat vor mehreren Jahren nach den Principien der räumlichen Darstellungsmethode Modelle einfacher geometrischer Körperformen, sowie ein grösseres architectonisches Relief verfertigt.

Da sich binnen Kurzem diese Arbeiten an mehreren Lehranstalten beifälliger Aufnahme erfreuten und mehrfach die Mittheilung der den Modellen zu Grunde liegenden Constructionen gewünscht wurde, sowie deshalb, dass die Methode der Reliefprojection als die allgemeinste Darstellungsmethode überhaupt in den Lehrbüchern über darstellende Geometrie bisher keinen Platz fand, bereitete der Verfasser eine Abhandlung zum Drucke vor, in welcher diese Methode entwickelt und speciell die den Reliefmodellen als Grundlage dienenden Constructionen mit Bemerkungen über die Modellirung selbst begleitet, erläutert werden.

Der vorliegende Aufsatz ist zum Theil dieser Abhandlung entnommen, insbesondere in denjenigen Parthien, für welche die Bildlichkeit hervorragend wichtig ist.

Jedoch sollen gegenwärtig die Beziehungen der Elementarformen in projectivischen Räumen im Allgemeinen in gedrängter Kürze dargestellt und hierdurch auf die folgenden Constructionen, welche sich auf Flächen zweiten Grades und insbesondere die Kugel beziehen, vorbereitet werden. Die neugeometrischen Beziehungen, namentlich die der Involution von *räumlich collinearen Systemen*, welche bedeutender Erweiterungen fähig,

von besonderem wissenschaftlichen Interesse sind, entlehnt der Verfasser grossentheils den Vorlesungen des Herrn Professor Dr. Fiedler über darstellende und neuere Geometrie und kann nicht umhin, dies zu erwähnen.

---

1) Wenn man von einem festen Centrum Strahlen nach den Punkten einer Raumform gezogen denkt und in diesen zu jedem Originalpunkte den ihm entsprechenden nach einem bestimmten Gesetze ableitet, so erhält man ein neues Gebilde, von welchem man sagt: es sei mit dem Originale in centraler Lage.

Die Art des Ableitungsgesetzes bedingt zwei wesentlich verschiedene Formen des neuen Gebildes, je nachdem den einzelnen Punkten eines Strahles als Originalen ein und derselbe Punkt, oder eine beschränkte Anzahl von Punkten entspricht oder je nachdem zu jedem Punkte eines Strahles ein anderer Punkt desselben Strahles als entsprechender gehört.

Im ersteren Falle ist das Ergebniss der Ableitung die centrale Projection der gegebenen Raumform auf einer ebenen oder krummen Fläche, in letzterem wieder ein räumliches Gebilde, ein Modell im weiteren Sinne. Die gewöhnliche Modellirmethode, welche die Herstellung eines der Originalform ähnlichen Gebildes zum Zwecke hat, ergiebt sich in der That als ein Specialfall der allgemeinen räumlichen Centralcollineation.

2) Die räumliche Darstellung von Raumgrössen setzt den Begriff zweier unendlichen Räume, welche sich durchdringen, voraus.

Diese beiden Räume stehen vorläufig in der Beziehung zu einander, dass auf jedem Strahle, der dem projicirenden Bündel angehört, Originalpunkt und Ableitung liegen; es tritt aber sofort vollständige Bestimmtheit der Beziehungen beider Räume ein, sobald das Ableitungsgesetz festgestellt wird.

Es muss sich auf folgende Bedingungen gründen: Jedem Punkte des einen Raumes soll ein Punkt des anderen Raumes, jeder Geraden wieder eine Gerade und jeder Ebene wieder eine Ebene entsprechen. Dies wird erreicht durch die Annahme eines Systems von zwei parallelen Ebenen, deren eine sich selbst entspricht, d. h. Original und Ableitung zugleich repräsentirt, während die andere der unendlich fernen Ebene des Originalraumes als Ableitung zukommt.

Die erstere soll Collineationsebene, die letztere Fluchtebene heissen und beziehungsweise durch S und F bezeichnet werden. Dass sie parallel sein müssen, folgt daraus, weil im entgegengesetzten Falle ihre Schnittlinie, als der Collineationsebene angehörend, sich selbst und als Gerade der Fluchtebene einer unendlich fernen Geraden gleichzeitig entsprechen müsste, dies steht aber mit den festgesetzten Bedingungen im Widerspruche.

Bezüglich der Lage des Centrums gegen die Collineations- und Fluchtebene tritt bei der allgemeinen Entwickelung der Raumcollineation nur insoweit eine Beschränkung ein, als dasselbe nicht in letzterer liegen darf. Durch Feststellung der drei Grundfactoren: Centrum, Collineations- und Fluchtebene ist die projectivische Beziehung beider Räume vollkommen bestimmt. Legt man durch das Centrum irgend eine Ebene, so schneidet dieselbe die Ebenen des Systems in parallelen Geraden, welche mit dem Centrum ein ebenes collineares System bestimmen, in welchem die Schnittlinie mit der Collineationsebene die Spur, die Schnittlinie mit der Fluchtebene die Fluchtlinie liefern.

3) Die Strahlen, welche durch das Centrum nach den einzelnen Punkten einer Geraden von beliebiger Richtung gezogen werden, bilden ihre projicirende Ebene und diese enthält die Ableitung der Geraden.

Man findet letztere einfach dadurch, dass man die Ableitung des unendlich fernen Punktes der gegebenen Geraden als Schnittpunkt ihres Parallelstrahles in der Fluchtebene bestimmt und den so erhaltenen Fluchtpunkt mit dem Durchgangspunkte in der Collineationsebene verbindet.

Das projicirende Büschel der Originalgeraden schneidet die Ableitung in einer Punktereihe, welche mit der Reihe der Originalpunkte projectivisch und gleichzeitig in perspectivischer Lage ist.

Bestimmen die Originalpunkte gleiche Strecken auf der Geraden, so bilden je drei aufeinanderfolgende Ableitungen mit dem Fluchtpunkte vier harmonische Punkte.

Durch die Darstellung der Geraden ist auch die eines einzelnen Punktes gesichert; denn man hat durch denselben nur irgend eine die Collineationsebene schneidende Gerade zu legen und deren Ableitung mittelst des projicirenden Strahles zu durchschneiden. Hiervon wird Gebrauch gemacht, wenn es sich um die Ableitung einer zur Collineationsebene parallelen Geraden handelt, weil für diesen Fall die Benutzung von Flucht- und Durchgangspunkt nicht angeht. Offenbar ist die Ableitung jetzt dem Originale parallel. Denkt man die in Fig. 9 dargestellte Gerade unbegrenzt und von einem Punkte a vollständig durchlaufen, ferner zur jedesmaligen Lage des beweglichen Punktes die entsprechende in der Ableitung bestimmt, so ergeben sich folgende nützliche Relationen:

a) Der Durchgangspunkt d der Geraden in der Collineationsebene entspricht sich selbst;

b) dem unendlich fernen Punkte u entspricht der Fluchtpunkt f;

c) demjenigen Punkte a, welcher bezüglich des Centrums jenseits der Collineationsebene von dieser eben so weit absteht, als das Centrum von der Fluchtebene, entspricht der Halbirungspunkt a' der Strecke fd;

d) dem Punkte δ, der mit a den gleichen Abstand, aber im ent-

gegengesetztem Sinne von der Collineationsebene hat, entspricht der unendlich ferne Punkt der abgeleiteten Geraden, weil für δ der projicirende Strahl zur letzteren parallel läuft.

Es finden demnach zwischen den Strecken der beiden Geraden G und G' folgende Beziehungen statt:

Der unbegrenzten Strecke du entspricht die begrenzte df,

der begrenzten Strecke $d\delta$ die unbegrenzte $d\delta'$

und

der unbegrenzten du entspricht die unbegrenzte fu.

Wenn man durch die Punkte δ und a Ebenen parallel zur Collineationsebene legt, so kommt jedem Punkte der ersteren Ebene die unter d angeführte Eigenschaft zu, ihre Ableitung liegt also im Unendlichen und aus analogen Gründen fällt die Ableitung der anderen Ebene in die Mitte zwischen Collineations- und Fluchtebene.

Jene beiden Ebenen mögen als erste und zweite Parallebene (P_1 und P_2) bezeichnet werden.

Weil nun der unendlich fernen Ebene des Originalraumes die Fluchtebene und der als Original betrachteten ersten Parallelebene die unendlich ferne Ebene des abgeleiteten Raumes entsprechen, werden die Flucht- und erste Parallelebene auch zweckmässig als Gegenebenen des Systems bezeichnet.

Da einer Schaar von parallelen Geraden ein und derselbe Fluchtpunkt zukommt, so entspricht ihr als Ableitung ein Strahlenbündel und insbesondere eine Parallelenschaar, wenn jene der Collineationsebene parallel ist. Einem Strahlenbündel entspricht stets wieder ein solches, wenn sein Scheitel der ersten Parallelebene nicht angehört, im anderen Falle aber eine Parallelenschaar. Ein jeder Strahl des projicirenden Strahlenbündels entspricht sich selbst, seine einzelnen Punkte aber fallen mit ihren entsprechenden nicht zusammen; die einzige Ausnahme hiervon bilden Centrum und Durchgangspunkt in der Collineationsebene.

Diese beiden Punkte liefern die Doppelpunkte der in dem Strahle vereinigten projectivischen Reihen der Originalpunkte und deren Ableitungen.

Es liegt nun die Frage sehr nahe, ob die beiden projectivischen Reihen in einem Strahle nicht involutorisch werden können und unter welchen Voraussetzungen dies geschehe.

Die Frage entscheidet sich dahin, dass dieser Fall eintritt, wenn die Fluchtebene in die Mitte zwischen Centrum und Collineationsebene gelegt wird; denn alsdann findet ein Zusammenfallen der Gegenebenen des Systems statt und infolge dessen eine Vereinigung der den unendlich fernen Punkten beider Reihen entsprechenden Punkte.

Fig. 10 zeigt diese Beziehung an einem Strahle. Dem Punkte a, als Punkt der Originalreihe, entspricht a' als Ableitung; ebensowohl aber

entspricht dem Punkte a, als zur abgeleiteten Reihe gehörend, der Punkt a' als Original, woraus die Vertauschbarkeit der entsprechenden Elemente beider Reihen klar hervortritt.

Centrum und Durchgangspunkt des betrachteten Strahles in der Collineationsebene bilden die Doppelpunkte und der Schnittpunkt in der Fluchtebene das Centrum der Involution.

Man überzeugt sich ferner leicht, dass bei der in Fig. 10 getroffenen Anordnung des Systems auch Original und Ableitung jeder beliebig gelegenen Geraden diese Vertauschbarkeit besitzen, wie dies an der Geraden G ersichtlich ist, dass man also auch Elemente des einen Raumes mit solchen des anderen Raumes zu neuen Formen combiniren könne, um in den entsprechenden Elementen die Bestimmungsstücke der zugehörigen Formen zu erhalten.

4) Eine gegebene Ebene E (Fig. 11) schneide die Collineationsebene in der Geraden E^s (Spur).

Wenn man in E eine Schaar paralleler Geraden gezogen denkt, so entspricht diesen ein Strahlenbüschel mit dem gemeinsamen Fluchtpunkte jener Schaar als Scheitel und wiederholt man dasselbe für andere Parallelenschaaren, so ergiebt sich als Ort sämmtlicher Fluchtpunkte eine zur Spur E^s parallele Gerade E^f (Fluchtlinie). Sie ist offenbar die Schnittlinie der Fluchtebene mit der durch C gehenden, zur gegebenen parallelen Ebene. Indem nun die Ableitung jeder in E gezogenen Geraden die Spur und Fluchtlinie schneiden muss, bildet die Ebene E' der parallelen Geraden E^s und E^f die Ableitung von E.

Die betrachtete Ebene wird durch das System der vier Ebenen S, F, P_1 und P_2 in Parallelstreifen getheilt, welche ganz analoge Beziehungen zu ihren Ableitungen zeigen, wie solche für die Strecken auf einer Geraden erörtert wurden.

Von besonderen Lagen einer Ebene sei derjenigen erwähnt, wo sie der Collineationsebene parallel ist. In diesem Falle wird die Bestimmung der Ableitung durch Spur und Fluchtlinie unmöglich; gleichwohl aber kann dieselbe durch Angabe eines einzigen Punktes der abgeleiteten Ebene erfolgen, da letztere dem Originale parallel läuft.

Für die Ableitungen von Ebenensystemen hat man unmittelbar folgende Merkmale:

> Einer zur Collineationsebene parallelen Ebenenschaar entspricht wieder eine solche; einer Schaar von parallelen Ebenen aber überhaupt ein Ebenenbüschel mit der gemeinschaftlichen Fluchtlinie als Scheitelkante; endlich einem Ebenenbüschel, dessen Scheitelkante der ersten Parallelebene angehört, eine Schaar paralleler Ebenen.

In der Figur sind von jeder dieser Schaaren drei Ebenen dargestellt.

5) Die Ableitung einer ebenen Figur ergiebt sich als Querschnitt ihres projicirenden Kegels durch die Ableitung ihrer Ebene.

Offenbar besitzen die ursprüngliche und neue Figur nebst der Eigenschaft, dass ihre entsprechenden Punkte auf Strahlen eines Büschels liegen, auch noch die, dass sich entsprechende Gerade auf einer festen Axe schneiden.

Bringt man die Originalebene und ihre Ableitung durch Drehung um ihre Schnittlinie in eine und dieselbe Ebene, so werden die obigen Beziehungen zwischen den in ihnen liegenden Figuren nicht gestört, man erhält homologe oder collineare Figuren in einerlei Ebene.

Dieser Fall tritt auch unmittelbar ein, wenn die Originalebene durch das Centrum geht.

Wäre als Originalfigur z. B. ein Parallelogramm gegeben, so entspricht diesem ein Vierseit, dessen Gegenseiten in der Fluchtlinie der zugehörigen Ebene zusammentreffen und umgekehrt wird einem beliebigen Vierseit als collineare Figur ein Parallelogramm entsprechen, wenn die Schnittpunkte seiner Gegenseiten der ersten Parallelebene angehören. Die collineare Figur einer Curve stimmt bezüglich ihres Grades sowohl, als ihrer Ordnung mit dem Originale überein; den Tangenten am Original entsprechen Tangenten in den zugehörigen Punkten der Ableitung.

Als Collinearverwandte des Kreises ergeben sich alle Kegelschnitte. Die Bedingungen, unter welchen die eine oder die andere Gattung auftritt, sind nachstehende:

> Liegt die Ebene des Originalkreises parallel der Collineationsebene, so wird die collineare Figur stets wieder ein Kreis. Gleichwohl kann aber auch bei schräger Lage der Kreisebene die Ableitung als Kreis erscheinen, nämlich dann, wenn die abgeleitete Ebene den projicirenden Kegel des Originalkreises antiparallel schneidet. Wenn der Originalkreis die erste Parallelebene berührt, so wird eine der Mantellinien des projicirenden Kegels und zwar die nach dem Berührungspunkte gehende der Schnittebene parallel, die Ableitung wird eine Parabel. Durchschneidet endlich der Originalkreis die erste Parallelebene, so muss seine Ableitung eine Hyperbel werden, weil dann die beiden nach den Schnittpunkten laufenden Mantellinien des projicirenden Kegels der Schnittebene parallel werden. Wäre in den angeführten Fällen das Centrum in der Kreisebene selbst gelegen, so änderte dies Nichts an den Merkmalen über die Gattung des entstehenden Kegelschnittes.

6) Eine räumliche Curve wird im abgeleiteten Systeme wieder durch eine solche von derselben Ordnung und Classe repräsentirt.

Die gleichzeitige Betrachtung der entwickelbaren Fläche einer Raumcurve lehrt, dass den Tangenten in den einzelnen Punkten der Original-

curve die Tangenten in den zugehörigen Punkten der Ableitung entsprechen, ferner dass die abgeleitete Fläche die Fluchtebene in einer Curve durchschneidet, welche direct construirt werden kann als Querschnitt des aus dem Centrum beschriebenen Fluchtkegels der Originalfläche mit dieser Ebene.

Selbstverständlich hat die abgeleitete Fläche mit dem Original einerlei Spur in der Collineationsebene.

Eine Kegelfläche wird im abgeleiteten Systeme im Allgemeinen wieder durch eine Kegelfläche vertreten, für deren Bestimmung nebst der Ableitung des Scheitels die Fluchtlinie, Spur, oder die Ableitung einer Leitlinie des Originals benutzt werden können.

Die Ableitung einer Kegelfläche nimmt jedesmal dann eine cylindrische Gestalt an, wenn der Scheitel des Originals in der ersten Parallelebene liegt und enthält der nach ihm gehende Strahl die Richtung der Mantellinien des Cylinders.

Einer Cylinderfläche in allgemeiner Lage entspricht eine Kegelfläche mit dem gemeinschaftlichen Fluchtpunkte der Mantellinien als Scheitel und für den besonderen Fall, wo letztere der Collineationsebene parallel sind, wieder eine Cylinderfläche.

7) Eine windschiefe Regelfläche muss nothwendigerweise durch eine Fläche derselben Gattung im abgeleiteten Systeme vertreten werden; denn ihre Ableitung ist offenbar zunächst eine Regelfläche, weil Geraden wieder Gerade als Ableitungen entsprechen. Die neu erhaltene Fläche muss aber auch windschief sein; denn würden sich aufeinanderfolgende Lagen ihrer Erzeugenden schneiden, so führte dies auf den Widerspruch, dass zwei verschiedenen Punkten des Originalsystems ein und derselbe Punkt im abgeleiteten Systeme entspräche.

Durch die Ableitungen der drei Bestimmungsstücke der Originalfläche ist auch die neue Fläche bestimmt, überdies liefert die Schnittlinie des Fluchtkegels der Fläche mit der Fluchtebene des Systems ein viertes Bestimmungselement und hierdurch Genauigkeitsproben für die Construction.

Wenn die ursprüngliche Fläche eine Richtebene besitzt, so degenerirt ihr Fluchtkegel in die durch das Centrum gehende zur Richtebene parallele Ebene, die Fluchtlinie der Fläche wird daher eine Gerade.

Die Anwendung des eben Gesagten auf die Conoide zweiten Grades führt sofort zu folgenden Resultaten:

Ein hyperbolisches Paraboloid habe als Leitlinien die Geraden M_1, M_2 und als Richtebene R, welche der Collineationsebene nicht parallel sei. Alsdann entsprechen den beiden Leitlinien zwei windschiefe Gerade M'_1, M'_2 und der Stellung der Richtebene, als der dritten unendlich fernen Leitlinie des Paraboloids, die Fluchtlinie Rf im abgeleiteten System.

Offenbar wird nun eine Gerade, welche sich als Transversale längs den drei sich paarweise kreuzenden Leitlinien $M'_1 M'_2 R^f$ fortbewegt, in jeder ihrer Lagen einer Mantellinie des Paraboloids entsprechen und daher als Ableitung des letzteren ein einfaches Hyperboloid erzeugen. Weil dieses aber die Fluchtebene in der Geraden R^f schneidet, muss noch eine zweite seiner Mantellinien derselben Ebene angehören und man erkennt als solche die Fluchtlinie der Richtebene der zweiten Schaar von Mantellinien des Paraboloids.

Die beiden Fluchtlinien vertreten die unendlich fernen Mantellinien des Paraboloids und ihr Schnittpunkt erscheint als Repräsentant des Berührungspunktes dieser Fläche mit der unendlich fernen Ebene.

In dem speciellen Falle, wo eine der Richtebenen der Collineationsebene parallel ist, giebt die Ableitung wieder ein hyperbolisches Paraboloid, dessen eine Schaar von Mantellinien der Collineationsebene parallel läuft, während die andere Schaar die Fluchtebene in einer Geraden, der Fluchtlinie der zweiten Richtebene, durchschneidet.

Wenn als Leitlinien eines einfachen Hyperboloids die Geraden $L_1 L_2 L_3$ gegeben sind, welchen die Geraden $L'_1 L'_2 L'_3$ entsprechen, so ist nach dem Vorhergehenden klar, dass letztere die neuentstehende Fläche bestimmen und dass diese im Allgemeinen wieder ein Hyperboloid sein werde. Die durch das Centrum parallel zu den Mantellinien des gegebenen Hyperboloids gelegten Strahlen bilden den Fluchtkegel der Fläche und bestimmen in der Ebene F einen Kegelschnitt als Fluchtlinie des Hyperboloids und seines Asymptotenkegels zugleich, die Ableitungen der beiden letzteren Flächen werden sich in jenem Kegelschnitte berühren müssen, weil das Gleiche bezüglich ihrer Originale und der unendlich fernen Ebene gilt.

Specialisirt man die Lage des einfachen Hyperboloids in Beziehung auf die Ebenen des Systems, indem man eine der Leitgeraden, etwa L_3 in die erste Parallelebene verlegt, so folgt, da L'_3 jetzt ins Unendliche fällt, d. h. zu einer Stellung wird, dass die Ableitung ein hyperbolisches Paraboloid sein werde, dessen zweite im Unendlichen liegende Mantellinie derjenigen Mantellinie des Hyperboloids entspricht, in welcher dieses noch von der ersten Parallelebene geschnitten wird.

Die Erzeugung der Regelflächen zweiten Grades aus projectivischen Ebenenbüscheln überträgt sich, da durch die Ableitung die Projectivität nicht gestört wird, vollständig in das neue System.

8) Die abgeleiteten Gestalten von Umdrehungsflächen lassen sich durch die Ableitungen ihrer Parallelkreise, Meridiane oder auch von Parallelschnitten zur Collineationsebene allgemein charakterisiren. Die Mittel, deren sich die darstellende Geometrie bei Behandlung von Problemen über Umdrehungsflächen zu bedienen pflegt, finden auch bei Operationen mit räumlich collinearen Systemen ihre Anwendung. So z. B. übertragen sich Berührungsebenen, berührende Kegel- und Cylinder-

flächen in gleicher Eigenschaft aus dem ursprünglichen in das neue System und zwar entsprechen sich ihre bezüglichen Berührungselemente als Original und Ableitung. Aus der grossen Menge von Umdrehungsflächen mag die Kugel als einfachster Repräsentant hervorgehoben und an ihre einige bemerkenswerthe Constructionen gezeigt werden.

Denkt man die Kugelfläche, deren Collinearverwandte bestimmt werden soll, durch eine Ebenenschaar geschnitten, so erhält man als Ableitungen der entstandenen kreisförmigen Schnitte ein System von Kegelschnitten, welches auf einer Fläche zweiten Grades liegen muss; denn offenbar kann jede beliebig geführte schneidende Ebene die neuerzeugte Fläche nur in einer Linie zweiten Grades, als der Collinearverwandten desjenigen Kreises schneiden, welchen das der betrachteten Schnittebene entsprechende Original mit der Kugel erzeugt.

Derjenigen Schaar von Kreisen der Kugel, welche der Collineationsebene parallel sind, entspricht auf der abgeleiteten Fläche wieder eine zur Collineationsebene parallele Schaar von Kreisen, ausserdem aber existirt im Allgemeinen noch ein zweites System von Schnittebenen der Kugel, welchem in der Ableitung Kreise entspringen. Es gehören zu letzterem System nämlich solche Ebenen, deren Ableitungen die Eigenschaft besitzen, dass sie mit den projicirenden Kegelflächen der in jenen gelegenen Kreise antiparallele Schnitte hervorbringen. Wenn man aus jeder dieser beiden Schaaren von Ebenen diejenigen betrachtet, welche die Kugelfläche in Kreisen von unendlich kleinen Halbmessern schneiden, so übergehen ihre Ableitungen in Berührungsebenen der neuen Fläche und zwar in Ebenen von kreisförmiger Berührung.

Im Allgemeinen giebt es deren von jeder Schaar zwei, sie bestimmen die vier Kreispunkte der Fläche zweiten Grades. Die Existenz der Kreispunkte, sowie der Umstand, dass die abgeleitete Fläche einer Kugel unmöglich gerade Linien enthalten kann, da sonst ein Gleiches am Original stattfinden müsste, weisen darauf hin, dass alle Flächen zweiten Grades, die Regelflächen ausgenommen, als Ableitungen der Kugel gewonnen werden können.

Bezüglich der Gattung der abgeleiteten Fläche lässt sich im Vorhinein Folgendes feststellen:

Wenn die gegebene Kugelfläche mit der ersten Parallelebene keinen Punkt gemein hat, ist ihre Ableitung, da sie keine unendlich fernen Punkte besitzen kann, stets ein Ellipsoid; insbesondere gestaltet sie sich zu einem dreiaxigen oder Rotationsellipsoid, wenn der Kugelmittelpunkt beziehungsweise ausserhalb oder in die Normale vom Centrum zur Collineationsebene fällt.

Berührt die gegebene Kugelfläche die erste Parallelebene, so werden die Ableitungen aller durch den Berührungspunkt gehenden Kreise Parabeln, die neue Fläche wird ein elliptisches oder Rotationsparaboloid

und schneidet endlich die Kugelfläche die erste Parallelebene, so erscheint als Ableitung ein getheiltes dreiaxiges oder Rotationshyperboloid.

Unter der Voraussetzung, dass die Collineationsebene die Polarebene des Centrums in Bezug auf die Kugel sei und die Fluchtebene in der Mitte zwischen beiden liege (vergl. Art. 3 und Fig. 10), entspricht die Kugel sich selbst in der Weise, dass die zu beiden Seiten der Collineationsebene gelegenen Theile wechselseitig Original und Ableitung darstellen, sie entsprechen sich involutorisch.

9) Es sei das System der festen Ebenen S und F (Fig. 12) mit dem Centrum C in solcher Lage, dass S zwischen F und C liege; überdies seien diese Ebenen normal zur Zeichnungsebene und das Centrum C, sowie der Mittelpunkt m der darzustellenden Kugel in ihr gelegen, Voraussetzungen, welchen stets durch eine einfache Transformation genügt werden kann.

Beschreibt man aus m den grössten Kreis, in welchem die Kugel die Ebene der Zeichnung durchschneidet, so ergiebt sich nach der vorhergehenden Nummer, dass im vorliegenden Falle die Ableitung ein dreiaxiges Ellipsoid sein werde.

Ueber die Lage seiner Axen gegen die Ebene S giebt folgende Betrachtung Aufschluss:

Die Zeichnungsebene, als Symmetrieebene der Kugel sowohl, als des Ellipsoids, bildet jedenfalls die Ebene eines Hauptschnittes; ihre normale Lage aber gegen die zur Collineationsebene parallele Schaar von Kreisschnitten des Ellipsoids charakterisirt sie vollends als Ebene der grossen und kleinen Axe des letzteren und demgemäss ist die mittlere Axe der Collineationsebene parallel.

Der zu S normale Durchmesser der Kugel liefert in der Ableitung einen Durchmesser des Hauptschnittes, welcher den zu S parallelen Sehnen conjugirt ist.

Man verlängere ab, bis S in d getroffen wird, ziehe $Cf \| ab$, verbinde d mit f und bemerke darin die Punkte $a'\, b'$ mittelst der projicirenden Strahlen aC und bC.

Der zu $a'b'$ conjugirte Durchmesser des Hauptschnittes ergiebt sich entweder dadurch, dass man zum Halbirungspunkte o' der Strecke $a'b'$ den entsprechenden Punkt o aufsucht und die in letzterem zu ab normale Sehne gh nach $g'h'$ $(\| gh)$ projicirt, oder, indem man gh als Polare des Schnittpunktes t von ab mit der ersten Parallelebene P_1 bestimmt und $g'h'$ daraus ableitet*). Aus den beiden conjugirten Durchmessern liessen sich nun sofort die Axen des Hauptschnittes finden, sie würden nach dem Obigen zugleich die grosse und kleine Axe des Ellipsoids liefern und da

*) Da $taob$ vier harmonische Punkte sind und t' ins Unendliche fällt, muss $a'o' = o'b'$ werden.

... Kreise des Ellipsoids darstellt, ist die mittlere Axe ... Grösse nach bekannt. Man bemerkt, dass $a'b'$ ... Kreispunkten des Ellipsoids ist.

... Schaar von Kreisschnitten des Ellipsoids zu ermitteln, ... die Polarebene $\mathfrak{S}$ des Centrums in Beziehung auf die ... die Mitte zwischen $\mathfrak{S}$ und C eine Ebene $\mathfrak{F}$ und bestimme ... mit der ersten Parallelebene P_1.

... entsprechen allen Kreisen auf der Kugel, deren Ebenen ... enthalten, abermals Kreise in der Ableitung; den beiden ... aber von Ebenen dieses Büschels entspricht das zweite ... Kreispunkten des Ellipsoids.

... Construction findet in Nachstehendem ihre Begründung:

... zeigt das System der Ebenen S, F, P_1 mit dem Centrum und ... punkte in derselben gegenseitigen Lage, wie in Fig. 12.

... handelt sich nun darum, eine zur Zeichnungsebene normale Schnitt... der Kugel so zu legen, dass ihre Ableitung E' den projicirenden ... sich ergebenden Schnittkreises vw antiparallel schneidet, d.h. dass ... $Cw'v'$ werde. Besässe die Ebene E in der That diese Eigen... wäre auch sofort die ganze Schaar der Kreisschnittebenen des ... bekannt; denn weil dieselbe E' parallel sein muss, so wäre sie ... Ableitung des Ebenenbüschels, welchem T als Scheitelkante zukommt. (Vergl. Nr. 4.)

Denkt man die Ebene E durch Drehung um T in die Grenzlage E_1 gebracht, in welcher sie die Kugel in dem unendlich kleinen Kreise p schneidet, so zieht sich der zugehörige projicirende Kegel in den Strahl pC zusammen, gleichwohl muss auch dieser noch die Eigenschaft des antiparallelen Schnittes an sich tragen, d. h. $\sphericalangle CpE_1'$ muss $= \sphericalangle Cp'E_1'$ sein. Da aber $\triangle pp'E_1' \sim pCT$, so folgt $pT = CT$.

Gleiches gilt auch für die zweite Grenzlage der Ebene E. Hierdurch wird aber das Problem der Kreisschnitte der projicirenden Kegel auf das einfachere reducirt: an den Kreis vpw eine Tangente so zu legen, dass das Dreieck CpT gleichschenkelig und zwar $TC = Tp$ werde.

Diese Aufgabe findet in folgender Construction ihre directe Lösung:

Man lege an den Kreis eine Tangente $\mathfrak{T}_1$, verbinde ihren Berührungspunkt p_1 mit C, mache $\sphericalangle zp_1C = zCp_1$ und bemerke z_1 als Schnittpunkt von $\mathfrak{T}$ und dem neuerhaltenen Schenkel Cz. Wiederholt man dasselbe für andere Tangenten des Kreises, namentlich für die durch C gehenden, für welche z in die Mitte zwischen p und C fällt, so findet man als Ort des Punktes z eine gerade Linie. Denn fasst man die Figur als centralprojec... Construction auf, in welcher je ein, aus einem Punkte der Polare $\mathfrak{S}$ ... Kreis gehendes Tangentenpaar Original und Bild einer Kreis... darstellt, so erhalten die Geraden Cp, welche offenbar den Tan-

gentenpaaren parallel sind, die Bedeutung von Fluchtstrahlen und müssen als solche mit den zugehörigen Bildern der Tangenten in Punkten einer Geraden, der Fluchtlinie (Gegenaxe) des central-collinearen Systems, zusammentreffen.

Sie ist offenbar der Polare des Punktes C in Bezug auf den Kreis parallel und hälftet den Abstand von Pol und Polare.

Unterlegt man den Linien der Figur ihre eigentliche Bedeutung als Spuren von Normalebenen zur Ebene der Zeichnung, so erkennt man in den Geraden $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{F}$ die Collineations- und Fluchtebene eines involutorischen Systems (Nr. 8 Schlussbemerkung) und lässt sich demgemäss die Gerade T als Schnittlinie der beiden ersten Parallelebenen des involutorischen und ursprünglichen Systems definiren.

Die Construction Fig. 12 giebt nun in p und q diejenigen Punkte der Kugel, welchen das zweite Paar von Kreispunkten des Ellipsoids entspricht und in der Ebene To den Kreis rs als Original des zweiten grössten Kreisschnittes.

Man kennt jetzt zwei Paare conjugirter Durchmesser des Hauptschnittes, welche gegen die Axen desselben symmetrisch liegen und kann nun letztere höchst bequem ihrer Lage und Grösse nach ermitteln. Dem Umstande, dass die Scheitelkante T des Ebenenbüschels, welchem in der Ableitung die zweite Schaar von Kreisschnitten des Ellipsoids entspricht, als die Durchschnittslinie der ersten Parallelebenen des ursprünglichen und involutorischen Systems hervorgeht, entspringt die Eigenthümlichkeit, dass man das ursprüngliche System SF gegen das festgedachte Centrum verschieben, den Abstand der Ebenen S und F von einander oder vom Centrum vergrössern oder verkleinern könne, ohne dass die Ebenen des neuen Büschels aufhörten, ihre zugehörigen projicirenden Kegelflächen in Kreisen zu schneiden.

Specialisirt man auf diese Weise die Lage des Systems $S\ F$ gegen $\mathfrak{S}\ \mathfrak{F}$ und setzt die Ebenen beider Systeme parallel voraus, so hat dies zur Folge, dass jetzt die Schnittlinie T im Unendlichen liegt und daher die beiden Schaaren von Kreisschnitten übereinfallen. Die vom Centrum nach dem Kugelmittelpunkte geführte Gerade wird zur Axe der nun entstehenden Umdrehungsfläche.

Die Darstellung des elliptischen Paraboloids und getheilten Hyperboloids als Ableitungen der Kugel wird durch ganz analoge Operationen erledigt.

10) Wenn man Centrum, Collineations- und Fluchtebene in der angeführten Reihenfolge anordnet und die abgeleiteten Gestalten von Objecten, die in Bezug auf das Centrum jenseits der Collineationsebene situirt sind, wirklich körperlich vorhanden denkt, so müssen diese Formen einem im Centrum befindlichen Auge den Eindruck der Originale ge-

währen, da die projicirenden Strahlenkegel beiden Gruppen von Raumgebilden gemeinschaftlich sind.

In diesem Sinne bildet die Methode der räumlichen Darstellung die allgemeinste Modellirmethode; sie ersetzt die Originalformen durch solche von geringeren Dimensionen und findet als Darstellung *en relief* in den bildenden Künsten praktische Verwerthung.

Bei der Darstellung eines Reliefs aber treten sofort Beschränkungen in der Wahl des Projectionssystems auf, durch welche die früher befolgte Methode des unmittelbaren Projicirens ihre Brauchbarkeit verliert; denn der Maassstab der Darstellung und die Distanz werden fast ausnahmslos eine solche Grösse besitzen, dass die Bestimmungselemente des Reliefs ausserhalb der zu Gebote stehenden Zeichnungsfläche fallen.

Am zweckdienlichsten für die wirkliche Ausführung eines Reliefs erscheinen wohl in den meisten Fällen seine orthogonalen Projectionen auf die Collineationsebene und auf eine das Centrum enthaltende Normalebene zu letzterer, welche, der natürlichen Lage des Systems im Raume entsprechend, als horizontal vorausgesetzt werden darf.

Es lehrt nun eine einfache Betrachtung, dass die erstere Projection erhalten wird, indem man das perspectivische Bild des Originals auf der Collineationsebene (Bildebene) für denjenigen Punkt als Projectionscentrum construirt, in welchem die durch das ursprüngliche Centrum gehende Tafelnormale die erste Parallelebene des räumlichen Systems trifft.

Die andere Projection erscheint als collineare Figur der Orthogonalprojection des Objectes auf der betrachteten Ebene.

Lässt man die Collineationsebene und die zu ihr normale zweite Projectionsebene mit der Aufriss- und Grundrissebene einer Orthogonalprojection zusammenfallen, so hat man, um die Projectionen des Reliefs irgend eines Objectes zu erhalten, nur zwei perspectivische Bilder unter obigen Voraussetzungen zu construiren, wobei man nicht unterlassen wird, durch zweckmässige Benützung des einen derselben Vereinfachungen bei der Construction des anderen zu erzielen und sich der in der Perspectivlehre entwickelten Constructionsbehelfe im ausgedehntesten Maasse zu bedienen.

Anhang.

Schliesslich mögen noch einige im Vorhergehenden begründete Bemerkungen über die Beleuchtungsverhältnisse folgen, sofern sie die Selbst- und Schlagschatten an einem Relief betreffen.

a) Wenn ein Relief durch parallel einfallende Lichtstrahlen, also Sonnenlicht, beleuchtet wird, so entprechen die erscheinenden Schattengrenzen im Allgemeinen einer Centralbeleuchtung des Originals, wobei die Lichtquelle der ersten Parallelebene angehört (Nr. 3). Nur in dem besonderen *Falle*, wo die Lichtstrahlen der Collineationsebene parallel

einfallen, stimmen Relief und Original bezüglich der Schattengrenenz überein.

b) Umgekehrt setzt die Beleuchtung des Reliefs aus einem Punkte der Fluchtebene Parallelbeleuchtung des Originals voraus.

c) Jeder anderen Centralbeleuchtung des Reliefs entspricht wieder Centralbeleuchtung im Original, aber für eine andere Lichtquelle. Ein Zusammenfallen der leuchtenden Punkte, also Uebereinstimmung der Beleuchtung im Relief und Original tritt dann ein, wenn der leuchtende Punkt in der Collineationsebene liegt.

Welche von diesen natürlichen und künstlichen Beleuchtungsarten realisirbar sei, ist der Beschaffenheit eines Reliefs, als eines körperlichen Gebildes, unschwer zu entnehmen.

XIII.

Ueber einen besonderen Fall anomaler Flächenneigung an Apatit.

Von

Director A. PURGOLD in Aussig.

(Hierzu Tafel IV, Figur 14.)

Nachdem die vom Herrn Professor Breithaupt vor bereits länger als dreissig Jahren nachgewiesenen Anomalien der Flächenneigung an tetragonalen und hexagonalen (resp. rhomboedrischen) Krystallformen neuerdings nicht blos um neue Beispiele dieser Art vermehrt, sondern überdies auch noch durch die Beobachtung der gleichzeitig mit ihnen auftretenden Modificationen der optischen Eigenschaften bestätigt und zu allgemeiner physikalischer Bedeutung erhoben wurden, musste sich auch das Interesse an den Krystallaxen, als Argumenten des optischen Charakters der Krystalle, erhöhen. Ich unterzog daher den Einfluss, welchen eine Aenderung der relativen Grösse und Lage der Krystallaxen auf die Neigung der Krystallflächen zunächst im tetragonalen und hexagonalen Systeme ausübt, einer systematischen Untersuchung, deren Ergebnisse ich seiner Zeit zu veröffentlichen hoffe, aus denen ich hier jedoch vorläufig einen besonderen Fall hervorheben möchte, welcher sich bei Anwendung der gefundenen allgemeinen Formel auf gemessene Neigungswinkel des Apatit ergeben hat.

Nach Herrn Professor Breithaupt (Handb. d. Mineralogie II, 277) zeigen am alpinen Apatit (*Pollachites galacticus*) die Flächen der primären Pyramide P dreierlei Neigungen gegen die Hauptaxe, nämlich:

ben einander liegendes Flächenpaar $\left(a = +\frac{P}{3}\right)$ vorn je $= 49^0\ 45'$, ein

neben einander liegendes Flächenpaar $\left(\beta = -\frac{P}{3}\right)$ hinten je $= 49^0\ 41'$ und endlich ein domatisch einander gegenüber liegendes Flächenpaar (γ) je $= 49^0\ 49'$, entsprechend dem auf Taf. IV, Fig. 14 ersichtlichen Grundriss, und daher denn bei unverändert rechtwinkliger Stellung der Hauptaxe zur Ebene der Nebenaxen der Pyramide *P* halbe Mittelkeile

an Flächen $\alpha = 40^0\ 15'$,
an Flächen $\beta = 40^0\ 19'$
an Flächen $\gamma = 40^0\ 11'$.

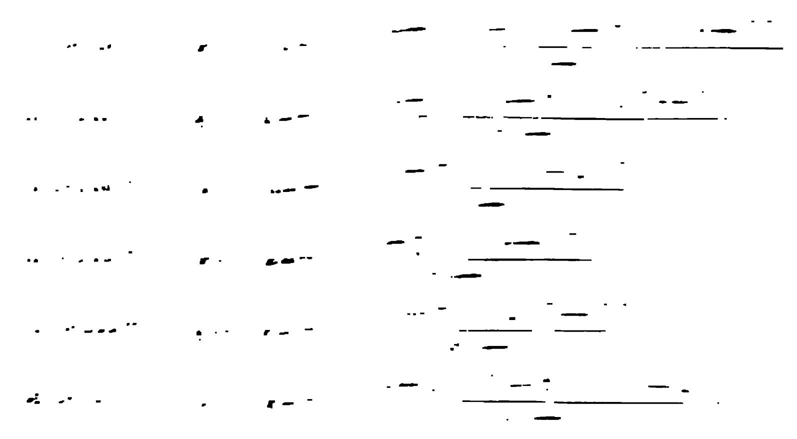
Diese Verschiedenheiten der Neigung der Pyramidenflächen widersprechen einer oder mehreren der normalen Bedingungen der Axen des hexagonalen Systems, d. i. Gleichheit der sechs horizontalen Halbaxen, jede mit den ihr benachbarten den Winkel von 60^0 bildend und rechtwinklig zur Hauptaxe. Die immerhin symmetrische Anordnung der gleichen und ungleichen Mittelkeile aber deutet auf die entsprechende Symmetrie in den Anomalien jener Axenbedingungen. Da inzwischen trotz alledem am Apatit die Symmetriegesetze des hexagonalen Systems in voller Wirksamkeit bleiben, so liegt schliesslich nahe und erscheint am natürlichsten, nach wie vor von der normalen Lage und Grösse hexagonaler Axen ausgehend, die beobachteten Winkelverschiedenheiten als Anomalien von den normalen Bedingungen abzuleiten.

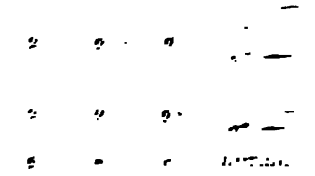
Wird angenommen, dass in einem beliebigen Sextanten, z. B. Sextant I eines hexagonalen Krystalles das Verhältniss $v = \frac{b}{a}$ der Nebenaxen *b* zur Hauptaxe *a* sich an der Nebenaxe zwischen Sextanten I und VI um ∂v ändere und zugleich der Winkel dieser nämlichen Nebenaxe mit der Hauptaxe um ∂V_1 von 90^0 abweiche; dass ferner an der Nebenaxe zwischen Sextanten I und II sich das Axenverhältniss v um ∂v_1 ändere und dieser letzteren Nebenaxe Winkel mit der Hauptaxe um ∂V von 90^0 abweiche; dass endlich der Winkel der beiden genannten Nebenaxen in Sextant I um ∂U von 60^0 abweiche, so muss infolge dieser Anomalien der normalen Vorbedingungen der halbe Mittelkeil $\frac{1}{2}\alpha$ der Pyramidenfläche in genanntem Sextanten I sich ebenfalls ändern, und zwar um

$$\partial\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) = \frac{-\sqrt{3}\,(\partial v + \partial v_1) + v.\partial U - \frac{4}{3}\sqrt{3}\,(\partial V + \partial V_1)}{3v^2 + 4},$$

welche allgemeine Formel selbstverständlich nicht blos für Sextant I gültig ist, sondern auf jeden anderen Sextanten, in dem eine entsprechende Aenderung vor sich geht, übertragen werden kann.

Es ist leicht zu übersehen, dass mit Berücksichtigung der Lage der veränderlichen Stücke zu den übrigen Sextanten sich infolge der angegebenen Veränderlichkeit der Flächenelemente in Sextant I sich die sechs halben Mittelkeile der Pyramide folgendermaassen ergeben:





Ebene der Nebenaxen auch ferner als unveränderlich, mithin $\partial V = \partial V_1 = 0$ und nur eine Abweichung ∂U der gegenseitigen Winkel der Nebenaxen von 60^0 vorausgesetzt. Diese Abweichung ∂U finde im Sextant III, selbstverständlich mithin auch gleicher Weise im Sextant VI statt; ausserdem sei das normale Axenverhältniss $v = \frac{b}{a}$ einer der gegen jene Sextanten III und VI symmetrisch liegenden Halbaxen, also z. B. der Halbaxe zwischen Sextant I und II um ∂v verändert, während alle übrigen Halbaxen unverändert bleiben; aber selbstverständlich die Winkeländerung ∂U sich nicht auf die Sextanten III und VI beschränken kann, sondern auch auf die Winkel der übrigen Sextanten einwirken muss —: so muss, entsprechend der Hauptformel, offenbar werden halber Mittelkeil

in Sextant I $= \frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}\,\partial v + \frac{1}{2} v . \partial U}{3v^2 + 4}$;

in Sextant II $= \frac{1}{2}\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1$;

in Sextant III $= \frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{v\,\partial U}{3v^2 + 4}$;

in Sextant IV $= \frac{1}{2}\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{\frac{1}{2} v\,\partial U}{3v^2 + 4}$;

in Sextant V $= \frac{1}{2}\alpha_5 = \frac{1}{2}\alpha_4$;

in Sextant VI $= \frac{1}{2}\alpha_6 = \frac{1}{2}\alpha_3$,

also was die Vertheilung der gleichen und ungleichen Keile anbelangt, der am Apatit beobachteten durchaus entsprechend; eine nähere Prüfung erst kann ergeben, ob auch die numerischen Ergebnisse der Formeln mit der Beobachtung stimmen.

Ganz allgemein muss sein, da Winkeländerung ∂U immer nur sehr klein ist: halber normaler Mittelkeil $= \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\alpha_3 + 2 . \frac{1}{2}\alpha_4)$, = arithmetisches Mittel der drei halben Mittelkeile in Sextanten III, IV, V.

Normales Axenverhältniss $v = \frac{2}{3}\sqrt{3} . \mathit{cotang}\, \frac{1}{2}\alpha$,

Abweichung des Axenwinkels von 60^0 in Sextanten III und VI

$$= \partial U = \frac{8}{3}\sqrt{3} . \frac{\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_4}{\sin \alpha},$$

Verhältniss der Axenänderung zur normalen Axe

$$= \frac{\partial v}{v} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathit{tang}\,\partial U + (2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathit{tang}\,\partial U) . \sqrt{\frac{\mathit{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha_1}{\mathit{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha} - \frac{3}{4}}} - 1,$$

Winkel des Prisma: zwischen Sextanten I und II $= 2 . k$;
zwischen Sextanten II und III, sowie zwischen I und VI $= 180^0 - k$;

$$\mathit{cotang}\, k = \frac{1}{3} . \frac{\partial v}{v}(2\sqrt{3} + \mathit{tang}\,\partial U) + \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,\mathit{tang}\,\partial U;$$

zwischen Sextanten III und IV, sowie zwischen V und VI $= 120^0 - \frac{1}{2}\partial U$;
endlich zwischen Sextanten IV und V $= 120^0 + \frac{1}{2}\partial U$.

$$\text{in Sextant I} = \tfrac{1}{2}\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}\,(\partial v + \partial v_1) - v.\partial U + \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\,(\partial V + \partial V_1)}{3v^2+4}.$$

$$\text{in Sextant II} = \tfrac{1}{2}\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}.\partial v_1 + \tfrac{1}{2}v.\partial U + \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\,(2.\partial V - \partial V_1)}{3v^2+4},$$

$$\text{in Sextant III} = \tfrac{1}{2}\alpha_3 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\tfrac{1}{2}v.\partial U + \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\,(\partial V - 2.\partial V_1)}{3v^2+4},$$

$$\text{in Sextant IV} = \tfrac{1}{2}\alpha_4 = \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{v.\partial U + \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\,(\partial V + \partial V_1)}{3v^2+4},$$

$$\text{in Sextant V} = \tfrac{1}{2}\alpha_5 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\tfrac{1}{2}v.\partial U - \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\,(2\,\partial V - \partial V_1)}{3v^2+4},$$

$$\text{in Sextant VI} = \tfrac{1}{2}\alpha_6 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}\,\partial v + \tfrac{1}{2}v.\partial U - \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\,(\partial V - 2.\partial V_1)}{3v^2+4}.$$

Die am Apatit nachgewiesene Vertheilung gleich und ungleich geneigter Flächen würde sich demnach darstellen als $\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2$; $\frac{1}{2}\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha_5$; $\frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_6$ und verschiedene Vorgänge sind möglich, durch welche diese besonderen Fälle sich aus vorstehenden Formeln, zunächst ohne Rücksicht auf das Maass der wirklich beobachteten Winkelunterschiede ableiten können.

I. Wird die relative Lage der Axen als unverändert, d. h. $\partial V = \partial V_1 = \partial U = 0$ vorausgesetzt, ferner $\partial v = \partial v_1$ und auch ausserdem noch gleichzeitig die nämliche Aenderung ∂v des Axenverhältnisses der dritten Halbaxe zwischen Sextanten II und III angenommen, so muss offenbar werden

$$\tfrac{1}{2}\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{2.\sqrt{3}}{3v^2+4}.\partial v,$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha_3 = \tfrac{1}{2}\alpha_6 = \tfrac{1}{2}\alpha - - \frac{\sqrt{3}}{3v^2+4}.\partial v,$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha_4 = \tfrac{1}{2}\alpha_5 = \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \text{normal.}$$

Dem Anspruche der Flächenvertheilung würde hierdurch also genügt; zugleich indessen macht sich auch die Voraussetzung nothwendig, dass die domatischen Mittelkeile α_3 und α_6 (γ Breith.) das arithmetische Mittel aus den vorderen ($\alpha_1 = \alpha_2$, α Breith.) und hinteren ($\alpha_4 = \alpha_5$, β Breith.) seien, d. h. $\alpha_3 = \alpha_6 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_4)$. Da die beobachteten Fälle aber durchaus nicht dieser Voraussetzung entsprechen, so ist, bis nicht bestätigende thatsächliche Beobachtungen vorliegen, auch die hier angenommene Ableitung der Anomalien unzulässig. Eine kurze Betrachtung genügt, um einzusehen, dass demnach überhaupt die Ableitung der beobachteten Anomalien aus vorstehenden Formeln ohne Aenderung der relativen Lage der Axen, d. h. ohne Abweichung ihrer gegenseitigen Winkel von der normalen Grösse unmöglich ist.

II. Um jedoch jede überflüssige Alteration der normalen Bedingungen zu vermeiden, werde die rechtwinklige Stellung der Hauptaxe zur

Ebene der Nebenaxen auch ferner als unveränderlich, mithin $\partial V = \partial V_1 = 0$ und nur eine Abweichung ∂U der gegenseitigen Winkel der Nebenaxen von 60^0 vorausgesetzt. Diese Abweichung ∂U finde im Sextant III, selbstverständlich mithin auch gleicher Weise im Sextant VI statt; ausserdem sei das normale Axenverhältniss $v = \frac{b}{a}$ einer der gegen jene Sextanten III und VI symmetrisch liegenden Halbaxen, also z. B. der Halbaxe zwischen Sextant I und II um ∂v verändert, während alle übrigen Halbaxen unverändert bleiben; aber selbstverständlich die Winkeländerung ∂U sich nicht auf die Sextanten III und VI beschränken kann, sondern auch auf die Winkel der übrigen Sextanten einwirken muss —: so muss, entsprechend der Hauptformel, offenbar werden halber Mittelkeil

$$\text{in Sextant I} = \tfrac{1}{2}\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}\,\partial v + \frac{1}{2} v . \partial U}{3v^2 + 4};$$
$$\text{in Sextant II} = \tfrac{1}{2}\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\alpha_1;$$
$$\text{in Sextant III} = \tfrac{1}{2}\alpha_3 = \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{v\,\partial U}{3v^2 + 4};$$
$$\text{in Sextant IV} = \tfrac{1}{2}\alpha_4 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\frac{1}{2} v\,\partial U}{3v^2 + 4};$$
$$\text{in Sextant V} = \tfrac{1}{2}\alpha_5 = \tfrac{1}{2}\alpha_4;$$
$$\text{in Sextant VI} = \tfrac{1}{2}\alpha_6 = \tfrac{1}{2}\alpha_3,$$

also was die Vertheilung der gleichen und ungleichen Keile anbelangt, der am Apatit beobachteten durchaus entsprechend; eine nähere Prüfung erst kann ergeben, ob auch die numerischen Ergebnisse der Formeln mit der Beobachtung stimmen.

Ganz allgemein muss sein, da Winkeländerung ∂U immer nur sehr klein ist: halber normaler Mittelkeil $= \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\alpha_3 + 2 . \frac{1}{2}\alpha_4)$, = arithmetisches Mittel der drei halben Mittelkeile in Sextanten III, IV, V.

Normales Axenverhältniss $v = \frac{2}{3}\sqrt{3} . \text{cotang}\, \frac{1}{2}\alpha$,

Abweichung des Axenwinkels von 60^0 in Sextanten III und VI

$$= \partial U = \tfrac{8}{3}\sqrt{3}. \frac{\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_4}{\sin \alpha},$$

Verhältniss der Axenänderung zur normalen Axe

$$= \frac{\partial v}{v} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\text{tang}\,\partial U + (2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{tang}\,\partial U) . \sqrt{\frac{\text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha_1}{\text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha} - \frac{3}{4}}} - 1,$$

Winkel des Prisma: zwischen Sextanten I und II $= 2. k$;
zwischen Sextanten II und III, sowie zwischen I und VI $= 180^0 - k$;

$$\text{cotang}\, k = \tfrac{1}{3} . \frac{\partial v}{v}(2\sqrt{3} + \text{tang}\,\partial U) + \tfrac{1}{3}\sqrt{3} - \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,\partial U;$$

zwischen Sextanten III und IV, sowie zwischen V und VI $= 120^0 - \frac{1}{2}\partial U$;
endlich zwischen Sextanten IV und V $= 120^0 + \frac{1}{2}\partial U$.

Wird Hülfswinkel $k = 60^0$, d. h. $cotang\ k = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $tang\ \partial U = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\partial r}{r - \partial r}$, so fallen die drei Prismenwinkel zwischen Sextanten I und II, zwischen II und III, und zwischen I und VI jeder normal $= 120^0$ aus.

Handelt es sich nun darum, die gemessenen Winkelwerthe in diese Gleichungen einzuführen, so ergiebt sich sogleich der Zweifel, welches der beiden Flächenpaare, ob das vordere (α Flächen Breith.) oder ob das hintere (β Flächen Breith.) als in den Sextanten I und II und welches von ihnen in den Sextanten IV und V liegend anzunehmen sei, eine Alternative, welche nicht zu umgehen ist, und welche mithin für jede der vorstehenden Gleichungen zweierlei Auflösungen ergiebt, von denen dann diejenigen als die wahrscheinlich richtigen zu gelten haben, aus deren Gesammtheit die mindere Störung der Normalverhältnisse folgt, wofür namentlich die Winkel des Prisma maassgebend sein dürften. Ueber die Lage der domatischen (γ) Flächen in den Sextanten III und VI kann nie ein Zweifel stattfinden.

Erste Auflösung, für α Flächen in Sextanten I und II, β Flächen in IV und V, mithin $\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2 = 40^0\ 15'$; $\frac{1}{2}\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha_5 = 40^0\ 19'$ und $\frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_6 = 40^0\ 11'$.

Demnach:

Normaler Mittelkeil $= \frac{1}{2}\alpha = 40^0\ 16\frac{1}{3}'$; $cotang = 1{,}180319$; $tang = 0{,}847229$; $sin\ \alpha = 0{,}986413$;

Normales Axenverhältniss $= \frac{2}{3}\sqrt{3}.cotang\ \frac{1}{2}\alpha = 1{,}36292$;

Abweichung des Centriwinkels von 60^0 in Sextanten III und VI $= \partial U = -37'\ 27''$; $tang = -0{,}0108942$,

$$\sqrt{\frac{tang^2\ \frac{1}{2}\alpha_1}{tang^2\ \frac{1}{2}\alpha} - \frac{3}{4}} = \sqrt{0{,}24815} = 0{,}4981,$$

$$\frac{\partial v}{r} = \frac{2}{0{,}990566 + 2{,}006290 . 0{,}4981} - 1 = 0{,}0051,$$ d. h. Verlängerung der Halbaxe zwischen Sextanten I und II um 0,0051 ihrer ursprünglichen Länge,

$cotang\ k = 0{,}0051\ (1{,}15470 - 0{,}00363) + 0{,}57735 + 0{,}00363 = 0{,}58696$

$k = 59^0\ 35'\ 10''$

und prismatischer Winkel:

zwischen Sextanten I und II $= 119^0\ 10'\ 20''$,

zwischen Sextanten II und III, $=$ zwischen Sextanten I und VI $= 120^0\ 24'\ 50''$,

zwischen Sextanten III und IV, $=$ zwischen Sextanten V und VI $= 120^0\ 9'\ 22''$,

zwischen Sextanten IV und V $= 119^0\ 41'\ 17''$.

Zweite Auflösung, für β Flächen in Sextanten I und II, α Flächen in IV und V, mithin $\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2 = 40^0\ 19'$, $\frac{1}{2}\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha_5 = 40^0\ 15'$ und $\frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_6 = 40^0\ 11'$.

Normaler Mittelkeil $= \frac{1}{2}\alpha = 40^0\, 13\frac{2}{3}'$; $cotang = 1{,}1821772$,
$tang = 0{,}8458970$, $\sin\alpha = \sin 80^0\, 27\frac{1}{3}' = 0{,}9861573$;

normales Axenverhältniss $= v = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.\, cotang\, \frac{1}{2}\alpha = 1{,}36506$;

Abweichung des Centriwinkels der Axen von 60^0 in Sextanten III und VI $= \partial U = -18'\, 38''$; $tang = -0{,}0053822$,

$$\sqrt{\frac{tang^2\frac{1}{2}\alpha_1}{tang^2\frac{1}{2}\alpha} - \frac{3}{4}} = \sqrt{0{,}256342} = 0{,}5063,$$

$$\frac{\partial v}{v} = \frac{2}{0{,}99534 + 2{,}003107\,.\,0{,}5063} - 1 = -0{,}0047,$$ d. h. Verkürzung der Halbaxe zwischen den Sextanten I und II (β Flächen Breith.) um 0,0047 ihrer ursprünglichen Länge,

$cotang\, k = -0{,}0047\,(1{,}15470 - 0{,}00179) + 0{,}57735 + 0{,}00179 = 0{,}57372$,
$k = 60^0\, 9'\, 42''$;

Winkel des Prisma:
zwischen Sextanten I und II $= 120^0\, 19'\, 24''$;
zwischen Sextanten II und III = zwischen Sextanten I und IV $= 119^0\, 50'\, 18''$;
zwischen Sextanten III und IV = zwischen Sextanten V und VI $= 120^0\, 4'\, 15''$;
zwischen Sextanten IV und V $= 119^0\, 50'\, 41''$.

Werden die Ergebnisse der beiden Auflösungen nun mit einander verglichen, so ergiebt sich sofort, dass die zweite Auflösung die geringere Abweichung von den normalen Bedingungen des hexagonalen Systems voraussetzt und also um so mehr die grössere Wahrscheinlichkeit für sich hat, als sie gleichzeitig eine auffallende Uebereinstimmung der prismatischen Winkel zwischen Sextanten IV und V einerseits, und zwischen Sextanten II und III, sowie I und VI andererseits nachweist, so dass mithin nur dreierlei Prismenwinkel stattfinden würden, während der allgemeinste Fall deren allerdings viererlei giebt. Leider scheinen die Winkel des Prisma in der Voraussetzung ihrer Uebereinstimmung mit dem Normalwerthe von 120^0 nur sehr selten gemessen zu sein. Nur in v. Kokscharow's Vorlesungen pag. 264 findet sich ein Winkel des Prisma am Apatit vom Gotthardt (der also zu *Pollachites galacticus* Breith. gehören dürfte), ausdrücklich als normal 120^0 messend angegeben; freilich ist auch hier nicht die Lage der gemessenen Prismenflächen zu anderen gemessenen Flächen kenntlich. Der Mangel an Uebereinstimmung zwischen den Winkeln des Prisma, wie sie sich durch die vorstehende zweite Auflösung des vorausgesetzten Falles ergeben, und wie sie zufolge der Beobachtung des Herrn v. Kokscharow thatsächlich sind, indem wenigstens einer normal $= 120^0$ sein muss, legt es nun nahe, noch einen dritten Vorgang zu prüfen, durch welchen die allgemeine Formel die am Apatit wirklich stattfindenden Anomalien motiviren kann.

III. Wird nämlich wie bisher zwar in den Sextanten III und VI eine Abweichung des Centriwinkels der Nebenaxen von 60° um ∂U vorausgesetzt; aber nun ferner, dass nicht blos eine einzige Halbaxe ihr Verhältniss zur Hauptaxe um ∂v ändere, sondern dass alle drei Halbaxen einerseits der beiden Sextanten III und VI jede um ∂v vom normalen Axenverhältniss $v = \frac{b}{a}$ abweichen, so gestalten sich die Gleichungen für die sechs halben Mittelkeile:

$$\text{in Sextanten I und II} = \tfrac{1}{2}\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{2\sqrt{3}\,\partial v + \tfrac{1}{2} v\,\partial U}{3v^2+4},$$

$$\text{in Sextanten III und VI} = \tfrac{1}{2}\alpha_3 = \tfrac{1}{2}\alpha_6 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}\,\partial v - v\,\partial U}{3v^2+4},$$

$$\text{in Sextanten IV und V} = \tfrac{1}{2}\alpha_4 = \tfrac{1}{2}\alpha_5 = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\tfrac{1}{2} v\,\partial U}{3v^2+4}.$$

Die allgemeine Vertheilung der gleichen und ungleichen Keile stimmt also wiederum mit der Beobachtung und es findet sich sogar viel einfacher, als in dem vorhergehenden Falle, hieraus

halber normaler Mittelkeil $= \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{6}(2.\tfrac{1}{2}\alpha_3 + 5.\tfrac{1}{2}\alpha_4 - \tfrac{1}{2}\alpha_1)$.

normales Axenverhältniss $v = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\, colang\, \tfrac{1}{2}\alpha$,

Verhältniss der Axenänderung zur ungeänderten Axe $= \frac{\partial v}{v}$

$$= \frac{colang\, \tfrac{1}{2}\alpha_1 - colang\, \tfrac{1}{2}\alpha_4}{colang\, \tfrac{1}{2}\alpha_4};$$

Abweichung des Axenwinkels von 60° in Sextanten III und VI

$$= \partial U = \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\,.\, \frac{2.\tfrac{1}{2}\alpha_3 - (\tfrac{1}{2}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_4)}{\sin\alpha};$$

Winkel des Prisma, dreierlei, nämlich

zwischen Sextanten I und II = zwischen IV und V $= 120^0 + \tfrac{1}{2}\partial U$,

zwischen Sextanten II und III = zwischen I und VI $= 60^0 + \tfrac{1}{4}\partial U + k$,

zwischen Sextanten III und IV = zwischen V und VI $= 180^0 - \tfrac{3}{4}\partial U - k$,

$$colang\, k = \frac{2.\frac{\partial v}{v} + 1 + \sqrt{3}.tang\,\partial U}{\sqrt{3} + tang\,\partial U}.$$

Für $k = 60^0 - \tfrac{1}{4}\partial U$ würden also die zwei Prismenwinkel zwischen II und III und zwischen I und VI normal je $= 120^0$ werden und dann muss sein $\frac{\partial v}{v} = \frac{-1}{2.\sqrt{3}.colang\,\partial U - \tfrac{1}{2}}$; für $k = 60^0 + \tfrac{3}{4}\partial U$ hingegen werden die zwei Prismenwinkel zwischen III und IV und zwischen V und VI normal und für diesen Fall muss sein

$$\frac{\partial v}{v} = tang\,\partial U\,.\,\frac{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{6}\sqrt{3} + 3\,tang\,\partial U}{4 - \sqrt{3}\,tang\,\partial U} = tang\,\partial U\,.\,\frac{0{,}6994 + 1{,}7321.tang\,\partial U}{2{,}3094 - tang\,\partial U}.$$

Auch für diese Gleichungen besteht selbstverständlich die Alternative fort, dass einmal die α Flächen Breith. als in den Sextanten I und II und die β Flächen als in IV und V liegend anzunehmen sind, dann, dass die umgekehrte Lage der genannten Flächenpaare stattfindet; es sind mithin ebenfalls zweierlei Auflösungen der Gleichungen möglich.

Erste Auflösung, für β Flächen in Sextanten I und II, α Flächen in Sextanten IV und V; also $\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2 = 40^0\ 19'$, $colang = 1{,}17846$; $\frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_6 = 40^0\ 11'$; $\frac{1}{2}\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha_5 = 40^0\ 15'$, $colang = 1{,}18125$.

Halber normaler Mittelkeil $= \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{6}(2.40^0\ 11' + 5.40^0\ 15' - 40^0\ 19') = 40'\ 13'$;

normales Axenverhältniss $v = \frac{2}{3}\sqrt{3}.colang\ 40^0\ 13' = 1{,}36560$;

Verhältniss der Axenänderung zur ungeänderten Axe

$\frac{\partial v}{v} = \frac{1.17846 - 1{,}18125}{1{,}18125} = -0{,}00236$, d. h. es findet eine Verkürzung der drei den Mittelkeilen von $40^0\ 19'$ anliegenden Halbaxen jeder um 0,00236 ihrer normalen Länge statt;

Abweichung des Centriwinkels in Sextanten III und VI von 60^0

$$\partial U = \frac{4}{3}\sqrt{3}.\frac{2(40^0\ 11') - (40^0\ 19' + 40^0\ 15')}{sin\ 80^0\ 26'} = -28'\ 6'';$$

$lang = -0{,}0081741$;

$$colang\ k = \frac{-2(0{,}00238) + 1 - \sqrt{3}.(0{,}00817)}{\sqrt{3} - 0{,}00817} = 0{,}56913;$$

$k = 60^0\ 21'\ 44''$;

Winkel des Prisma, mithin

zwischen Sextanten I und II = zwischen Sextanten IV und V $= 119^0\ 45'\ 57''$,

zwischen Sextanten II und III = zwischen Sextanten I und VI $= 120^0\ 14'\ 43''$,

zwischen Sextanten III und IV = zwischen Sextanten V und VI $= 119^0\ 59'\ 20''$,

also um nur -40 Secunden vom Normalwerthe abweichend.

Zweite Auflösung, für α Flächen in Sextanten I und II, β Flächen in Sextanten IV und V, also $\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2 = 40^0\ 15'$, $colang = 1{,}18125$; $\frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_6 = 40^0\ 11'$ und endlich $\frac{1}{2}\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha_5 = 40^0\ 19'$, $colang = 1{,}17846$.

Halber normaler Mittelkeil $= \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{6}(2.40^0\ 11' + 5.40^0\ 19' - 40^0\ 15') = 40^0\ 17'$, $colang\ 40^0\ 17' = 1{,}17986$, $sin\ 80^0\ 34' = 0{,}98648$;

normales Axenverhältniss $v = \frac{2}{3}\sqrt{3}\ colang\ \frac{1}{2}\alpha = 1{,}36238$;

Verhältniss der Axenänderung zur ungeänderten Axe

$\frac{\partial v}{v} = \frac{1.18125 - 1{,}17846}{1{,}17846} = 0{,}00236$, also entsprechend einer

Verlängerung der drei Nebenaxen an den Mittelkeilen von 40° 15′ um je 0,00236 ihrer normalen Länge;
Abweichung des Centriwinkels von 60° wie in der ersten Auflösung = — 28′ 6″, d. h. Centriwinkel in den Sextanten III und VI je = 59° 31′ 44″, in jedem der übrigen vier Sextanten = 60° 14′ 3″

$$cotang\, k = \frac{+2\,(0{,}00236) + 1 - \sqrt{3}\,(0{,}00817)}{\sqrt{3} - 0{,}00817} = 0{,}57462;$$

Hülfswinkel $k = 60^\circ\, 7'\, 3''$

und demnach

die Winkel des Prisma

zwischen Sextanten I und II = zwischen IV und V = 119° 45′ 57″,
zwischen Sextanten I und VI = zwischen II und III = 120° 0′ 1½″,
d. h. normal,
zwischen Sextanten III und IV = zwischen V und VI = 120° 14′ 1″.

Indem also schon die erste Auflösung ein Ergebniss liefert, welches in Bezug auf zwei Winkel des Prisma nur eine so geringe Abweichung (um nur 40 Secunden) vom Normalwinkel 120° zeigt, dass sie innerhalb der Grenzen der zulässigen Beobachtungsfehler bleibt, so entspricht die zweite Auflösung noch viel strengeren Anforderungen der Genauigkeit. — Die der ganzen Berechnung zu Grunde liegenden Anomalien der Pyramidenwinkel des alpinen Apatit lassen sich also durchaus ungezwungen ableiten aus einer Verkleinerung des Centriwinkels der Nebenaxen in den beiden Sextanten mit 40° 11′ Pyramidenwinkel (γ Flächen Breith.) um je 28′ 6″ (Centriwinkel = 59° 31′ 54″), wodurch in den übrigen Sextanten diese Centriwinkel je 60° 14′ 3″ werden, und aus der gleichzeitigen Verlängerung jeder der drei Halbaxen an den zwei Pyramidenwinkeln von 40° 15′ (α Flächen Breith.) um je 0,00236 ihrer normalen Länge. — Diese geringfügigen Abweichungen von der normalen Lage und Grösse der hexagonalen Nebenaxen motiviren nicht blos die beobachteten Winkelunterschiede nun als eine Nothwendigkeit, sondern haben überdies auch noch die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, sich in ihrem Einflusse auf je zwei Winkel des Prisma zu paralysiren, so dass dieselben genau den Normalwerth von 120° bewahren, während von den übrigen ein Paar um je etwa ¼ Grad grösser, das andere Paar um so viel kleiner geworden.

Allerdings muss die Uebereinstimmung dieser letzteren Winkel mit den Ergebnissen der Rechnung erst durch künftige Messung bestätigt werden, indessen erschien es immerhin sehr interessant, an einem bestimmten Beispiele die wirklich beobachteten Anomalien aus den normalen ungestörten Bedingungen, den theoretischen Voraussetzungen der regelrechten Krystallisation durch eine Berechnung abzuleiten, auf welchem *Wege allein es möglich* sein dürfte, ein Maass zu gewinnen für die

Grenzen, innerhalb deren die relative Lage und Grösse der Krystallaxen schwanken kann, ohne die Symmetriegesetze der Flächenvertheilung, d. h. das Krystallsystem selbst zu ändern. Diese Grenze wird bei den verschiedenen Krystallspecien voraussichtlich von sehr verschiedenem Umfange ausfallen, indem der Grad der Empfindlichkeit der Flächenvertheilung gegen Axen- (resp. Winkel-) Verschiedenheiten sehr verschiedenartig ist, so dass z. B. die Flächen des krystallisirten Kupferkieses den Symmetriegesetzen des tetragonalen Systems folgen, während der Winkel seines Octaeders um noch nicht einen halben Grad von dem des regulären Octaeders abweicht, und andererseits wieder z. B. die verschiedenen Specien der Feldspathfamilie bei aller Verschiedenheit der numerischen Grundlagen ihrer Krystallgestalten die auffallendste Analogie in der Flächenvertheilung zeigen.

Kleinere Mittheilungen.

XVI. Bemerkung über die dekadischen Werthe der Potenzen ganzer Zahlen. Die Zahl 81 ist die einzige Quadratzahl von der Eigenschaft, dass ihre Quersumme zugleich ihre Wurzel ist; unter den Cubikzahlen, den Biquadraten u. s. w. finden sich dagegen mehrere solche Zahlen, z. B.

$$\sqrt[3]{512}=8,\quad \sqrt[3]{5832}=18,\quad \sqrt[3]{17576}=26,\quad \sqrt[3]{19683}=27;$$
$$\sqrt[4]{2401}=7,\quad \sqrt[4]{234256}=22,\quad \sqrt[4]{390625}=25,\quad \sqrt[4]{614656}=28;$$
$$\sqrt[5]{17210368}=28,\quad \sqrt[5]{52521875}=35,\quad \sqrt[5]{60466176}=36;$$
$$\sqrt[7]{27512614111}=31, \sqrt[7]{52523350144}=34, \sqrt[7]{271818611107}=43, \sqrt[7]{1174711139837}=53;$$
$$\sqrt[9]{45848500718449031}=71.$$

Es entsteht nun die Frage, wie derartige Zahlen ohne mechanisches Probiren zu entdecken sind.

Schlömilch.

XVII. Den Winkel zweier Ebenen auszudrücken durch ihre Parameter auf drei schiefwinkligen Axen. Von Dr. Gustav Junghann. Auf drei schiefwinkligen Axen seien die Parameter

$OA=u,\quad OB=p,\quad OC=q$ einer Ebene E und
$OA'=u',\quad OB'=p',\quad OC'=q'$ einer zweiten Ebene E'

gegeben, sowie auch die Winkel der Axen.

Damit sind auch die Dreiecksflächen

$$BOC=\tfrac{1}{2}pq\sin(pq)=\Delta_1 \qquad B'OC'=\tfrac{1}{2}p'q'\sin(pq)=\Delta'_1$$
$$AOC=\tfrac{1}{2}uq\sin(uq)=\Delta_2 \qquad A'OC'=\tfrac{1}{2}u'q'\sin(uq)=\Delta'_2$$
$$AOB=\tfrac{1}{2}up\sin(up)=\Delta_3 \qquad A'OB'=\tfrac{1}{2}u'p'\sin(up)=\Delta'_3$$

als gegeben anzusehen, sowie auch die Flächenwinkel der Ecke O:

$$\Delta_2\Delta_3=\alpha,\quad \Delta_1\Delta_3=\beta,\quad \Delta_1\Delta_2=\gamma,$$

welche nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie aus (pq), (uq), (up) zu berechnen sind.

Bezeichnen wir nun die in den Ebenen E, E' durch die Axenebenen bestimmten Dreiecke:

$$ABC = \Delta_0, \quad A'B'C' = \Delta'_0$$

und die Flächenwinkel, welche dieselben mit den Axenebenen, und zwar im Innern der beiden Tetraeder $OABC$, $OA'B'C'$ bilden:

$$\Delta_0\,\Delta_1 = \delta, \quad \Delta_0\,\Delta_2 = \varepsilon, \quad \Delta_0\Delta_3 = \zeta,$$
$$\Delta'_0\Delta'_1 = \delta', \quad \Delta'_0\Delta'_2 = \varepsilon', \quad \Delta_0\Delta_3 = \zeta',$$

so ergiebt sich leicht aus der Betrachtung der Projectionen von Δ_1, Δ_2, Δ_3 auf Δ_0, von Δ_0, Δ_2, Δ_3 auf Δ_1, von Δ_0, Δ_1, Δ_3 auf Δ_2, von Δ_0, Δ_1, Δ_2 auf Δ_3:

$$1)\quad \begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta_1 \cos\delta + \Delta_2 \cos\varepsilon + \Delta_3 \cos\zeta \\ \Delta_0 \cos\delta &= \Delta_1 - \Delta_2 \cos\gamma - \Delta_3 \cos\beta \\ \Delta_0 \cos\varepsilon &= -\Delta_1 \cos\gamma + \Delta_2 - \Delta_3 \cos\alpha \\ \Delta_0 \cos\zeta &= -\Delta_1 \cos\beta - \Delta_2 \cos\alpha + \Delta_3. \end{aligned}$$

Addiren wir diese Gleichungen, nachdem wir sie der Reihe nach mit Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3 multiplicirt haben, so erhalten wir den zuerst von Tinsot mitgetheilten Satz:

$$2)\quad \Delta_0^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 2\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha - 2\Delta_1\Delta_3 \cos\beta - 2\Delta_1\Delta_2 \cos\gamma.$$

Ebenso erhalten wir $\Delta_0'^2$ ausgedrückt durch Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, α, β, γ, wonach also nun auch Δ_0, Δ'_0 als bekannte Grössen eingeführt werden können.

Nun ist nach einem von dem Verfasser 1862 mitgetheilten Lehrsatze der Tetraedrometrie*) für denjenigen Winkel der Ebenen E und E', welcher dem Punkte O zugekehrt ist:

$$3)\quad -\Delta_0 \cos EE' = \Delta_1 \cos\delta' + \Delta_2 \cos\varepsilon' + \Delta_3 \cos\zeta' \quad \text{oder auch}$$
$$-\Delta'_0 \cos EE' = \Delta'_1 \cos\delta + \Delta'_2 \cos\varepsilon + \Delta'_3 \cos\zeta.$$

Wählen wir von diesen beiden Gleichungen die zweite, so ist nach den Gleichungen 1):

$$\cos\delta = \frac{\Delta_1 - \Delta_2 \cos\gamma - \Delta_3 \cos\beta}{\Delta_0}$$
$$\cos\varepsilon = \frac{-\Delta_1 \cos\gamma + \Delta_2 - \Delta_3 \cos\alpha}{\Delta_0}.$$
$$\cos\zeta = \frac{-\Delta_1 \cos\beta - \Delta_2 \cos\alpha + \Delta_3}{\Delta_0}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung 3), so ergiebt sich:

---

*) Siehe „Tetraedrometrie von Dr. Gustav Junghann" (2 Theile 1862/63. Gotha bei Thienemann) I, pag. 94, Gleichung 50b. — Der Satz ist dort nicht für die Dreieckflächen der beiden Tetraeder $OABC$, $OA'B'C'$, sondern für die Π-sinus der ihnen gegenüberliegenden Ecken ausgesprochen und bewiesen. Der hier gebrauchte Satz ergiebt sich aber aus jenen Gleichungen 50b, wenn man dieselben mit

$$\frac{\Delta_0}{\Pi_0} = \frac{\Delta_1}{\Pi_1} = \frac{\Delta_2}{\Pi_2} = \frac{\Delta_3}{\Pi_3}$$

(siehe Tetraedrometrie II, pag. 47, Gleichung 169) multiplicirt.

$$4)\quad \begin{aligned} -\Delta_0\Delta'_0 \cos EE' = \Delta_1\Delta'_1 &- (\Delta_2\Delta'_3+\Delta'_2\Delta_3)\cos\alpha \\ +\Delta_2\Delta'_2 &- (\Delta_1\Delta'_3+\Delta'_1\Delta_3)\cos\beta \\ +\Delta_3\Delta'_3 &- (\Delta_1\Delta'_2+\Delta'_1\Delta_2)\cos\gamma. \end{aligned}$$

Für rechtwinklige Axen ist

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 0$$

und

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}pq,\quad \Delta_2 = \tfrac{1}{2}uq,\quad \Delta_3 = \tfrac{1}{2}up,\quad \Delta_0 = \sqrt{p^2q^2+u^2q^2+u^2p^2},$$

also

$$-\cos EE' = \frac{pq\,p'q' + uq\,u'q' + up\,u'p'}{\sqrt{p^2q^2+u^2q^2+u^2p^2}\,\sqrt{p'^2q'^2+u'^2q'^2+u'^2p'^2}}.$$

$$= \frac{\dfrac{1}{uu'}+\dfrac{1}{pp'}+\dfrac{1}{qq'}}{\sqrt{\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}}\,\sqrt{\dfrac{1}{u'^2}+\dfrac{1}{p'^2}+\dfrac{1}{q'^2}}},$$

was mit der aus der analytischen Geometrie bekannten Formel übereinstimmt.

XVIII. Einige allgemeine Sätze über algebraische Curven. In mehreren, im 9. und 10. Bande dieser Zeitschrift veröffentlichten Aufsätzen habe ich Betrachtungen angestellt über einen interessanten, für alle algebraischen Curven giltigen Satz, welcher lautet:

> Die Summe aus den Cotangenten der Winkel, unter welchen eine gerade Linie einer Curve n^{ten} Grades begegnet, ist ebenso gross, als die Summe aus den Cotangenten der Winkel, welche sie mit den n Asymptoten einschliesst.

Mit Hülfe dieses Satzes gelangt man sehr leicht zu folgendem ebenfalls allgemein giltigen interessanten Lehrsatz:

> Die Summe aus den Cotangenten der Winkel, unter welchen eine beliebige algebraische Curve von einem Kreise geschnitten wird, ist Null.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme man in dem gegebenen Kreise einen beliebigen Punkt an und transformire den Kreis und die Curve nach der Methode der reciproken Radien-vectoren. Alsdann entspricht dem Kreise eine gerade Linie und der Curve n^{ten} Grades eine solche $2n^{ten}$ Grades. Nun gilt aber für die nach jener Methode transformirten Gebilde der bekannte Satz: Wenn zwei Curven sich in einem Punkte schneiden, so schliessen die entsprechenden Curven im entsprechenden Punkte denselben Winkel ein. Also kann man auch die Summe aus den Cotangenten der $2n$ Winkel, unter welchen sich der Kreis und die Curve n^{ten} Grades schneiden, ersetzen durch die Summe aus den Cotangenten der Winkel, unter welchen die entsprechende gerade Linie der entsprechenden Curve $2n^{ten}$ *Grades* begegnet. Diese Summe ist aber ebenso gross, als die

Summe aus den Cotangenten der Winkel, unter welchen die Linie die $2n$ Asymptoten trifft. Nun ist aus der Gleichung der Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades leicht zu erkennen, dass der Pol und die beiden imaginären unendlich fernen Kreispunkte $n$fache Punkte derselben sind. Daher laufen von den $2n$ Asymptoten dieser Curve n parallel der Linie $x + iy = 0$, die übrigen und n parallel zu $x - iy = 0$. Da aber jede beliebige Linie die Linien $x + iy = 0$ und $x - iy = 0$ unter Winkeln schneidet, deren Cotangenten resp. $-i$ und $+i$ sind, so muss auch jene Summe der Cotangenten gleich $ni - ni$ sein, also verschwinden. Der Satz ist also bewiesen.

In diesem Beweise ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass der Kreis der Curve wirklich in $2n$ Punkten begegnet. Dies tritt aber nur dann ein, wenn die imaginären unendlich fernen Kreispunkte der Curve nicht angehören. Sobald dieser Ausnahmefall statt hat, so vermindert sich jene Anzahl um 2, sobald jene beiden Punkte einfache Punkte, und um $2p$, sobald sie $p$fache Punkte der Curve sind. Es ist nun die Frage, ob unser Satz auch noch Giltigkeit hat für die übrig bleibenden $2n - 2$, resp. $2n - 2p$ Winkel. Man überzeugt sich leicht, dass dies wirklich der Fall ist. Denn jetzt entspricht der gegebenen Curve eine andere Curve $(2n-2)^{\text{ten}}$, resp. $(2n-2p)^{\text{ten}}$ Grades, welche die unendlich fernen imaginären Kreispunkte zu $(n-1)$fachen, resp. $(n-p)$fachen Punkten hat, und die Schlüsse, welche oben mit der Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades gemacht worden sind, behalten auch hier völlig ihre Giltigkeit.

Es braucht wohl nicht besonders hinzugefügt zu werden, dass man nicht allein die reellen, sondern auch die imaginären Schnittwinkel der Curven zu berücksichtigen hat.

Ein specieller Fall unseres Satzes ist der folgende:

> Wenn eine Curve mit einem Doppelpunkt 3ten Grades durch die beiden imaginären unendlich fernen Kreispunkte geht, so schneidet jeder Kreis, welcher eine Halbirungslinie des von den Doppelpunktstangenten gebildeten Winkels im Doppelpunkte berührt, die Curve noch in zwei Punkten und zwar unter gleichen Winkeln.

Es musste sehr wahrscheinlich sein, dass die beiden Sätze für die Winkel, unter welchen eine Curve durch eine gerade Linie und durch einen Kreis geschnitten werden, eine gemeinschaftliche Quelle haben, und es ist mir auch wirklich gelungen, eine solche aufzufinden. Diese besteht in folgendem höchst interessanten Satz:

> Die Summe aus den Cotangenten der sämmtlichen Winkel, unter welchen sich zwei algebraische Curven schneiden, ist ebenso gross, als die Summe aus den Cotangenten der Winkel, unter welchen sich ihre Asymptoten treffen.

Ich will diesen Satz möglichst kurz zu beweisen versuchen.

Sind die Gleichungen beider Curven $\varphi(x,y)=0$ und $\varphi_1(x,y)=0$, so ist die Cotangente des Winkels, welchen die Tangenten der beiden Curven im gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt $(x_p y_p)$ bilden, gleich:

$$\frac{\varphi'(x_p)\,\varphi'_1(x_p)+\varphi'(y_p)\,\varphi'_1(y_p)}{\varphi'(x_p)\,\varphi'_1(y_p)-\varphi'(y_p)\,\varphi'_1(x_p)},$$

wobei der Kürze halber der Werth von

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}$$

für $x=_p$, $y=y_p$ gleich $\varphi'(x_p)$ gesetzt worden u. s. w. Man hat nun die Summe jener Cotangenten zu bilden und auszudehnen über alle mn Durchschnittspunkte, d. h. man hat zu finden:

$$\Sigma\frac{\varphi'(x_p)\,\varphi'_1(x_p)+\varphi'(y_p)\,\varphi'_1(y_p)}{\varphi'(x_p)\,\varphi'_1(y_p)-\varphi'(y_p)\,\varphi'_1(x_p)}.$$

Der Nenner sowohl, als der Zähler sind Functionen $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grades der Werthe x_p und y_p. Es ist aber bekanntlich, sobald $F(x,y)$ eine Function $(2n-3)^{\text{ten}}$ Grades von x und y ist,

$$\Sigma\frac{F(x_p,y_p)}{\varphi'(x_p)\,\varphi'_1(y_p)-\varphi'(y_p)\,\varphi'_1(x_p)}=0.$$

Ist dagegen $F(x,y)$ vom $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grade, so ist diese Summe nur abhängig von den Coefficienten der höchsten Potenzen der Variablen in F. Also ist auch die Summe, welche in unserem Falle vorkommt, nur abhängig von den Coefficienten der höchsten Potenzen der Variablen in den Gleichungen der beiden Curven. Sie ist somit constant, so lange diese Coefficienten ihren Werth beibehalten, mögen auch die übrigen Coefficienten sich ändern. Dies bedeutet aber geometrisch so viel, als dass jene Summe gleich bleibt, wenn nur die Asymptoten der beiden Curven dieselben bleiben. Da man aber die Gesammtheit der Asymptoten einer Curve ansehen kann als eine Curve, welche mit derselben gleiche Asymptoten besitzt, so ist unser Satz erwiesen.

Chemnitz. FR. EM. ECKARDT.

XIX. Geometrischer Satz. Schneidet man von den nöthigenfalls über A verlängerten Seiten BA und CA eines Dreiecks ABC die Stücke BC_a und $CB_a=BC$ ab, und zieht von A über den Schnittpunkt von BB_a und CC_a eine Gerade, welche BC in A_a trifft, verschafft sich ferner durch das entsprechende Verfahren (cyklische Vertauschung von $A\ B\ C$ und von $a\ b\ c$) auf CA und AB die Punkte B_b und C_c, so liegen die drei Punkte A_a, B_b, C_c auf einer Geraden, welche nichts Anderes ist, als die gemeinschaftliche Tangente der zwei einander berührenden Kreise, von denen der eine in das Dreieck, der andere durch die Mitten der drei Seiten beschrieben wird. (Inkreis und Mittenkreis.)

Stuttgart. C. W. BAUR.

XX. Angenäherte Quadratur. Zieht man an einen Curvenbogen AB, dessen Länge als Grösse der ersten Ordnung gilt, drei Tangenten: zwei, welche sich in C schneiden sollen, in den Endpunkten A und B, die dritte, deren Berührungspunkt D heisse, parallel zur Sehne $AB = c$, so sind:

$$\tfrac{4}{3} \triangle ADB \quad \text{und} \quad \tfrac{2}{3} \triangle ACB$$

oder, wenn die Höhen dieser Dreiecke mit h und H bezeichnet werden:

$$\tfrac{2}{3} ch \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{3} cH$$

Näherungswerthe der vierten Ordnung einschliesslich für den Abschnitt ADB. Combinirt man dieselben aber zu:

$$\tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{2}{3} ch + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{3} cH = c \cdot \frac{8h + H}{15},$$

so erhält man einen Näherungswerth der sechsten Ordnung.

Lambert hat in seiner Abhandlung über Quadratur und Rectification krummer Linien (Beiträge II. Theil, Seite 271, §. 25) infolge eines Rechnungsfehlers den Näherungswerth $\frac{1}{3} cH$ als einen nur der dritten Ordnung angegeben.

Stuttgart. C. W. Baur.

XXI. Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Paschen mit sechs Würfeln. Ein Wurf mit drei Würfeln heisst bekanntlich ein Pasch, wenn wenigstens zwei Würfel gleiche Augzahlen geben, und es kommt der Wurf mit der Summe der drei Augzahlen in Rechnung. Weil nun häufig andere Würfe als Päsche fallen, welche als ungiltig ein wiederholtes Werfen erfordern, so hat man zur Zeitersparniss das Auskunftsmittel ersonnen, sechs Würfel in der Weise anzuwenden, dass immer der höchste im ganzen Wurf enthaltene dreiwürfelige Pasch in Rechnung kommt. Die Zweckmässigkeit dieses Auskunftsmittels leuchtet aus einer bekannten Rechnung ein, wonach die Wahrscheinlichkeit eines ungiltigen Wurfs mit drei Würfeln zu $\frac{6.5.4}{6^3} = \frac{5}{9}$, mit sechsen aber zu $\frac{6.5.4.3.2.1}{6^6} = \frac{5}{324}$ erhoben wird.

Eine andere Frage ist die nach dem mittleren giltigen Wurf, für welchen eine einfache Betrachtung auf Grund der bekannten Eigenschaft der Würfel, dass die Augzahlen auf je zwei gegenüberstehenden Flächen sich zur Summe 7 ergänzen, bei drei Würfeln den Werth $10\frac{1}{2}$ liefert.

Bei sechs Würfeln, welche in oben angegebener Weise angewendet werden, lässt sich diese Betrachtung nicht anwenden, weil die höchsten dreiwürfeligen Päsche, welche in zwei complementären Würfen enthalten sind, nicht selbst complementär sein müssen. Man hat vielmehr für jede Summe von 3 bis 18 die Anzahl der möglichen Fälle, in denen sie auftreten kann, zu ermitteln.

Man findet für die Summe

I) $3a$ als Anzahl der möglichen Fälle: $1+6(a-1)+15(a-1)^2+20(a-1)^3$

II) $2a+b$, wenn $a>b$, $15\{1+4(b-1)+6(b-1)^2+4(b-1)^3\}$

III) . . . . $a+1=b$, $6\{1+5(a-1)+10(a-1)^2+10(a-1)^3\}$

IV) . . . . $a+2=b$, $6\{6+25(a-1)+40(a-1)^2+10(a-1)^3\}$

V) . . . . $a+3=b$, $6\{31+105(a-1)+70(a-1)^2+10(a-1)^3\}$

VI) . . . . $a+4=b$, $6\{136+245(a-1)+100(a-1)^2+10(a-1)^3\}$

VII) . . . . $a+5=b$, $6.381=2286$.

Demgemäss ist z. B. die Anzahl der möglichen Fälle für die Summe 15 zu berechnen nach I) mit $a=5$ und nach II) mit $a=6$, $b=3$; für die Summe 14: nach II) mit $a=6$, $b=2$ und $a=5$, $b=4$; ferner nach IV) mit $a=4$, $b=6$.

Ich will dem Leser das Vergnügen überlassen, die Anzahl der Fälle zu jeder Summe von 3 bis 18 selbst zu berechnen und füge nur noch einige Folgerungen bei:

Man kann fast 1 gegen 6 auf nicht mehr und nicht weniger, als die Summe 16 und mit Vortheil 1 gegen 7 auf 14 wetten. Man kann mit Vortheil 1 gegen 1 auf wenigstens 14 und fast 2 gegen 1 auf eine gerade Summe wetten. Der mittlere Wurf, nicht als Durchschnittszahl, sondern in dem hier allein zutreffenden Sinne, dass er eben so oft gut als schlecht ist, liegt zwischen 14 und 15. Die Wahrscheinlichkeiten, dass mehr, dass nicht mehr und nicht weniger, und dass weniger, als 14 geworfen wird, sind 0,403... ; 0,155....; 0,442....

Stuttgart, April 1867. C. W. Baur.

XXII. Ueber eine neue Methode, die Widerstände galvanischer Ketten zu messen. Von Prof. Dr. A. von Waltenhofen. Während man zur Bestimmung der elektro-motorischen Kräfte und zur Messung der Widerstände metallischer Leiter Methoden besitzt, welche einen sehr hohen Grad von Präcision und Sicherheit erreichen lassen, sind die bisherigen Methoden zur Messung der Widerstände galvanischer Ketten noch sehr mangelhaft. Sie gewähren selbst unter den günstigsten Umständen keine exacte Genauigkeit und sind in vielen Fällen geradezu unbrauchbar. Letzteres gilt namentlich von den inconstanten Ketten, von welchen Poggendorff nachgewiesen hat, dass dabei die Anwendung der Ohm-schen Methode in der Regel zu desto grösseren Werthen für den inneren Widerstand führt, je grösser die äusseren Widerstände genommen wurden, wodurch bei solchen Ketten das ganze Verfahren illusorisch wird.

Man hat bisher angenommen, dass dieses eigenthümliche Verhalten der *inconstanten* Ketten in der Polarisation seinen Grund habe, insofern die-

selbe der elektro-motorischen Kraft der Kette von einem Versuche zum anderen — nach Maassgabe der verschiedenen Stromintensitäten — in ungleichem Maasse entgegenwirkt. Der Verfasser hat jedoch durch Rechnung nachgewiesen, dass diese Annahme zur Erklärung der besagten Erscheinung unzureichend ist, indem die Polarisation, soweit man bisher deren Abhängigkeit von der Stromstärke kennt, bei constantem Kettenwiderstande ein ganz anderes Verhalten bedingen müsste. Der Verfasser folgert hieraus, dass die fraglichen Widerstandsänderungen, welche sich bei Anwendung der Ohm'schen Methode zeigen, keine scheinbaren — infolge der Polarisation — sondern durch eine thatsächliche Abhängigkeit des Kettenwiderstandes von der Stromstärke bedingt sein müssen, was denn auch, mit Rücksicht auf die offenbare Abhängigkeit der sogenannten Uebergangswiderstände von der Stromstärke, eine ganz natürliche Erklärung findet.

Ist diese Annahme richtig, dann muss es ebensowohl Ketten geben, deren innerer Widerstand bei zunehmendem äusseren Widerstande (d. h. bei abnehmender Stromstärke) kleiner wird, als auch solche, bei welchen das Gegentheil stattfindet, je nachdem nämlich die Uebergangswiderstände — nach Maassgabe der chemischen Beschaffenheit und Anordnung der Kettenbestandtheile — das eine oder das andere Verhalten bedingen.

Ohne hierauf in diesem Auszuge näher einzugehen, sei nur bemerkt, dass experimentelle Untersuchungen über diese und ähnliche für die Theorie der Ketten wichtige Fragen die Möglichkeit voraussetzen, die Widerstände galvanischer Ketten möglichst unabhängig von dem Einflusse der Polarisation zu messen, was natürlich nur bei sehr geringen Stromstärken möglich ist. — Wollte man jedoch diese sehr geringen Stromstärken durch Anwendung entsprechend grosser äusserer Widerstände hervorbringen und dabei die Ohm'sche Methode zur Ermittelung der verhältnissmässig sehr kleinen inneren Widerstände benutzen, so würden — wie eine einfache Rechnung zeigt — die unvermeidlichen Beobachtungsfehler bei weitem nicht mehr die erforderliche Sicherheit der Resultate erlauben.

Die Absicht, solche Untersuchungen zu ermöglichen, hat den Verfasser veranlasst, eine den angedeuteten Anforderungen entsprechende Methode zur Bestimmung der Kettenwiderstände ausfindig zu machen, nämlich eine Methode, welche die Anwendung sehr kleiner Stromstärken ohne die Anwendung grosser Schliessungswiderstände gestattet. Dieselbe beruht auf folgenden Principien.

Wenn man die zu untersuchende Kette mit einer anderen, von grösserer elektro-motorischer Kraft, in entgegengesetztem Sinne verbindet und an dieser Combination eine Nebenschliessung anbringt, so erhält man

ein System von drei Strombahnen zwischen zwei Knotenpunkten, von derselben Anordnung, wie bei der Poggendorff'schen Compensationsmethode. Bezeichnet man die Widerstände in den Strombahnen der stärkeren Kette, der schwächeren Kette und der Nebenschliessung der Reihe nach mit α, β und γ und die in den genannten Strombahnen stattfindenden Stromstärken mit A, B und C, und denkt man sich, bei beliebigem Verhältnisse der Widerstände α, β und γ, wobei also B im Allgemeinen von Null verschieden sein wird, durch eine sehr kleine Aenderung von α eine entsprechende Aenderung der vorhandenen Stromintensitäten bewirkt, so gelangt man mit Rücksicht auf die Principien des Ohm'schen Gesetzes unmittelbar zur Gleichung:

$$\beta dB = \gamma dC$$

oder wenn man die mit A gleichlaufenden Ströme als positiv und somit C als negativ gelten lässt, zur Gleichung:

$$\beta dB = -\gamma dC.$$

Die Integration führt, wenn man den Werth, welchen C für $B=0$ annimmt, mit C_0 bezeichnet, zur Relation:

$$\beta B = \gamma (C_0 - C).$$

Hat man vorerst durch Compensation der untersuchten Kette $B=0$ und somit $C=C_0$ gemacht, und hierauf durch eine sehr kleine Aenderung von α das Gleichgewicht der Compensation gestört, so stellen $C_0 - C$ und B die Stromesänderungen in den Strombahnen γ und β vor, und die obige Relation spricht in der Form:

$$\beta = \gamma \frac{C_0 - C}{B}$$

den Lehrsatz aus: dass der Quotient der nach Aufhebung der Compensation in γ und β beobachteten Stromesänderungen, mit dem Widerstande γ der Nebenschliessung multiplicirt, sofort den Widerstand β und somit auch den gesuchten Kettenwiderstand angiebt.

Diese Methode unterscheidet sich also wesentlich von allen bisherigen und namentlich von der Ohm'schen Methode, indem sie den Widerstand der untersuchten Kette in der Nähe ihres Compensationspunktes ermitteln lässt und die Anwendung äusserst geringer Stromstärken ohne die Anwendung grosser Schliessungswiderstände gestattet. Sie entspricht dadurch zugleich der Anforderung, den inneren Widerstand einer Kette möglichst unabhängig von dem störenden Einflusse der Polarisation, nämlich unter Umständen zu untersuchen, bei welchen die Polarisation auf ein Minimum reducirt ist.

Zur Messung von B kann ein nach der Poggendorff'schen Methode graduirter Multiplicator dienen; zur Messung von $C_0 - C$ eine Gangain-

sche Tangentenbussole. Der genau gemessene Widerstand γ der Nebenschliessung bleibt ungeändert. Zur Veränderung des Widerstandes α dient ein Rheochord.

Näheres über die experimentelle Ausführung dieser Methode und Mittheilungen über die mittelst derselben bereits erzielten Resultate enthält eine ausführlichere Abhandlung, deren Veröffentlichung der Verfasser sich vorbehält, sowie auch seiner Untersuchungen über die elektromotorische Kraft der Daniell'schen Kette nach absolutem Maasse, worüber er einstweilen im „Dingler'schen polytechnischen Journal" (Bd. 183) einige für praktische Zwecke bemerkenswerthe Mittheilungen gemacht hat. (Wiener Akad.)

XXIII. Erklärung in Betreff einer Bemerkung des Hrn. Bauschinger. Im zweiten diesjährigen Hefte dieser Zeitschrift, S. 180, befindet sich ein Aufsatz des Herrn Bauschinger, welcher eine Entgegnung auf einen von mir geschriebenen Artikel (Bd. XI, S. 455) ist, und dessen Schlusssatz folgendermaassen lautet:

> „Ich halte damit diese im Grunde sehr einfache Sache für abgethan, und zwar um so lieber, als ich nach einigen Stellen in der letzten Antwort des Herrn Clausius befürchten muss, dass von seiner Seite die Discussion nicht in der Weise fortgeführt werden dürfte, wie es einem wissenschaftlichen Streite angemessen ist."

Da dieser Satz für mich persönlich beleidigend ist und bei Lesern, welche meinen Artikel nicht kennen oder nicht im Gedächtnisse haben, einen durchaus falschen Begriff von der Art, wie er geschrieben ist, hervorrufen muss, so sehe ich mich, so ungern ich auf Auseinandersetzungen dieser Art eingehe, zu einer kurzen Erklärung genöthigt.

Es ist mein Grundsatz — und ich lege ein besonderes Gewicht darauf —, in wissenschaftlicher Polemik zwar meine Ansicht offen und ohne Rückhalt auszusprechen; aber mich dabei stets in den Grenzen der rein wissenschaftlichen Discussion und fern von Persönlichkeiten zu halten. Diesem Grundsatze gemäss ist auch der hier in Rede stehende Artikel abgefasst, und ich glaube mich auf das Urtheil jedes unbefangenen Lesers berufen zu dürfen, wenn ich behaupte, dass auch nicht ein Wort darin vorkommt, was einem wissenschaftlichen Streite nicht angemessen wäre und zu einer solchen Bemerkung, wie Herr Bauschinger sie sich erlaubt, Veranlassung geben könnte.

Was den übrigen, wissenschaftlichen Theil des Aufsatzes des Herrn Bauschinger anbetrifft, so halte ich es nach Dem, was ich über die Sache schon geschrieben habe, nicht für nöthig, noch weiter darauf einzugehen,

und gebe daher die Entscheidung über die Richtigkeit der einen oder anderen Ansicht einfach dem wissenschaftlichen Publikum anheim.

Zürich, den 14. Mai 1867. R. CLAUSIUS.

Berichtigung. Seite 462, am Schlusse des Aufsatzes von R. Clausius statt: „muss man daher statt des Wortes „„Radius““ das Wort „„Durchmesser““ setzen“, ist zu lesen: „muss man daher diesen Unterschied, dass der Durchmesser einer solchen Kugel gleich dem Radius jener Wirkungssphäre ist, berücksichtigen.“

XV.

Einige Sätze aus der Analysis situs Riemann'scher Flächen.

Von

Dr. J. THOMAE,

Docent an der Universität Halle.

(Hierzu Tafel V, Figur 1 bis 3.)

In seiner Theorie der Abel'schen Functionen hat Riemann die Sätze der Analysis situs, welche für Untersuchungen algebraischer Functionen und deren Integrale wichtig sind, gegeben. Wir wollen hier, um diese Theorie zugänglicher zu machen, jene Sätze etwas umständlicher herleiten, die Relation zwischen den Querschnitten und Verzweigungspunkten, welche Riemann mit Anwendung des Dirichlet'schen Princips findet, geometrisch nachweisen und daran Untersuchungen über die möglichen Lagen kanonischer Querschnittnetze knüpfen.

Bei der Betrachtung der Functionen einer reellen Veränderlichen stösst man in Bezug auf ihren Verlauf auf Eigenschaften, durch welche sehr einfache Functionen, die man für einander verwandt halten muss, weit von einander getrennt werden. So giebt es für eine ganze Function n^{ten} Grades zuweilen n, zuweilen weniger Werthe der Veränderlichen, für welche die Function Null wird. Diese Trennung zu vermeiden, hat man in das Zahlengebiet ideale Grössen eingeführt, welche eben Das leisten, jene ganzen Functionen unter einem Gesichtspunkte zu vereinigen. Historisch sind die Functionen zweiten Grades der Anlass hierzu gewesen; aber es ist in der Folge gezeigt worden, dass diese idealen Gebilde, die man complexe Zahlen genannt hat, nicht blos hinreichen, die angeführten Eigenschaften ganzer Functionen auszugleichen, sondern auch noch viel weiter hinaus befriedigende Aufschlüsse über den Verlauf der Functionen zu geben.

Die Untersuchungen über den Verlauf der Functionen einer complexen Variabeln werden am meisten unterstützt durch die graphische Darstellung der complexen Zahlen, welche Gauss erfunden hat. Wegen der zweifachen Mannichfaltigkeit benutzt er räumliche Gebilde von eben so vielfacher Mannichfaltigkeit, von zwei Dimensionen, nämlich die Ebene. Wir denken uns nach Gauss's Vorgange in einer Ebene in jedem Punkte die Maasszahlen der Entfernungen von einem rechtwinkligen Axenpaare aufgetragen und lassen die Entfernung von der einen (der x-Axe) den imaginären, von der anderen (der y-Axe) den reellen Theil einer Zahl $z=x+yi$ bilden. Der Punkt als Träger einer Zahl ist nach und nach so mit derselben verwachsen, dass Punkt und Zahl im Sprachgebrauche mit einander verwechselt werden. Diese Anschauung schafft gleichzeitig eine bequeme, fassliche Terminologie. Die Lage der Punkte als Träger der Zahlen spielt eine wesentliche Rolle in der Analysis; durch sie muss z. B. der Begriff grösser oder kleiner ersetzt werden, der für complexe Zahlen keine eigentliche Bedeutung hat. Für solche Beziehungen hat man eine besondere Disciplin, die Analysis situs erfunden, in welcher Sätze anschaulich und einfach erwiesen werden, welche rein analytisch oft fernliegende transcendente Hülfsmittel erfordern.

Eine Function von $z=x+yi$, welche in einem bestimmten Grössengebiete betrachtet wird, kann so eine Function eines Flächenstücks heissen. Wenn die Function für jeden Punkt des betrachteten Stückes nur einen Werth hat, so heisst sie dort einwerthig, im anderen Falle mehrwerthig. Denkt man sich die Werthe einer solchen Function, welche selbst complexe Zahlen sind, in einer anderen Ebene aufgetragen, so erhält man eine Abbildung, oder Abbildungen der ersten Ebene, und zwar, wie Gauss gezeigt hat, solche, dass die entsprechenden Figuren in den kleinsten Theilen einander ähnlich sind, ausgenommen in einzelnen Punkten.

Cauchy verdanken wir den wichtigen Satz, dass das Integral einer Function von $x+yi$ auch eine complexe Function der oberen Grenze $x+yi$ sei. Dies würde nicht der Fall sein, wenn ein Integral auf jedem anderen Integrationswege zwischen zwei Punkten einen anderen Werth erlangte. Es ist aber die Integration eine Hauptquelle zur Erlangung neuer Functionen, und es war daher nöthig, diesen wichtigen Satz zu finden. Cauchy zeigte, dass das Integral einer Function von $x+yi$ genommen über eine geschlossene Curve der Ebene Null sei, wenn innerhalb derselben die Function endlich und einwerthig ist. Das heisst, das Stück darf keinen (singulären) Punkt enthalten, um welchen herum die Function neue Werthe erlangt, wenn die Variable auf einem geschlossenen Wege um ihn geführt wird. Enthält das Stück keinen solchen singulären Punkt, so ist sie dort einwerthig, wie man auch die Variable darin herumführen mag.

Bei der Untersuchung der Integrale complexer Functionen gelangt man ordnungsmässig von denen der rationalen, welche nur eine neue Trans-

cendente, den Logarithmos, liefern, zu denen, welche Wurzeln algebraischer Gleichungen unter dem Integralzeichen enthalten. Bei diesen bilde gerade die Mehrwerthigkeit einen wesentlichen Bestandtheil und ein Hinderniss in der Behandlung. Dem hat Riemann dadurch abgeholfen, dass er für algebraische Functionen eine neue Vorstellung schuf, indem er sie auf Flächengebilde bezieht, in welchen sie als einwerthige betrachtet werden können. Die Ebene, welche der Träger der Zahlen $z = x + yi$ ist, heisse die z-Ebene, s sei die Wurzel einer algebraischen Gleichung zwischen s und z. Dann giebt es für jeden Werth von z, ausgenommen in einzelnen Punkten, gleichviele Werthe von s, etwa n an Zahl. Wir nehmen nun mit Riemann an, dass zu jedem dieser Werthe von s ein anderer über der z-Ebene gelegener Punkt gehöre, deren orthogonale Projectionen zusammenfallen. Indem wir dies für jeden Punkt ausführen, gelangen wir zu n überall über der z-Ebene ausgebreiteten Blättern. Diese n Blätter sind eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung der Ebene, auf welcher die Werthe von s aufgetragen sind. Jedem Punkt des Systems entspricht ein und nur ein Punkt der s-Ebene.

Wir stellen uns nun die Ebene als eine geschlossene Fläche vor, etwa als Kugel mit unendlich grossem Radius, so dass sie einen unendlich fernen Punkt enthält. Ein System von n Blättern wird dann vorgestellt werden müssen als n unendlich grosse in einander liegende Kugeln mit n unendlich fernen Punkten.

Es kann das System zunächst der Art sein, dass die Blätter ohne jedweden Zusammenhang sind, so dass ein Punkt, welcher sich in einem der Blätter beliebig bewegt, stets in demselben bleibt. Solche Systeme jedoch, welche entweder ganz oder theilweise unverbunden sind, werden als von geringer Bedeutung hier ausgeschlossen. Wir nehmen daher an, dass ein Punkt, der sich um einen gewissen Punkt, einen Verzweigungspunkt herum bewegt, aus einem Blatt in ein anderes gelange. Die algebraische n werthige Function s gelangt, wie Puisseux ausführlich gezeigt hat, wenn man die Variable z um einen solchen Punkt bewegt, den wir früher in der Ebene einen singulären Punkt nannten, zu einem anderen Werthe, wenn die Variable ihren ursprünglichen wieder hat. Ebenso muss auch der Punkt zu einem anderen Punkte des Systems gelangen, weil wir annahmen, dass jedem anderen Werthe von s ein anderer des Systems entspräche. Wenn die algebraische Function bei einem zweiten Umgange der Variabeln um den Verzweigungspunkt denselben Werth wieder annimmt, so muss auch der Punkt im System seine erste Lage wieder erhalten. In diesem Falle heisst der Punkt ein einfacher Verzweigungspunkt. Befindet sich im zweiten Blatte ein eben solcher Verzweigungspunkt, der dieses mit einem dritten verbindet, so kann durch Umgehung eines Systemstückes, dessen Projection in der z-Ebene beide Punkte enthält, ein Punkt bei einem ersten Umgange in ein zweites, beim folgenden in ein drittes Blatt und dann erst

zurück gelangen. Nähert man die beiden Punkte einander, bis sie zusammenfallen, so enthält die Projection eines Flächenstücks beide Punkte, wenn sie einen enthält, und man muss nun der Reihe nach in drei Blätter, oder wenn mehr solche Punkte in ähnlicher Weise zusammfallen, durch Umgänge um denselben in mehr Blätter gelangen. Ein solcher Punkt heisst ein mehrfacher Verzweigungspunkt und er leistet genau dasselbe, was mehrere einfache Verzweigungspunkte leisten. Ebenso können algebraische Functionen um gewisse Punkte herum erst nach mehreren Umgängen der Variabeln ihren ersten Werth wieder erlangen, z. B. $\sqrt[m]{z}$ im Punkte $z=0$. Wenn aber zwei Verzweigungspunkte zusammenfallen, welche dieselben Blätter verbinden, so führt uns ein Umgang um beide immer zum Ursprunge zurück, die beiden Verzweigungspunkte haben sich aufgehoben. Ein sich Aufheben kann offenbar immer nur zwischen einer geraden Anzahl von Verzweigungspunkten stattfinden. Wir führen nun von allen wirklichen Verzweigungspunkten Linien nach n übereinander liegenden, sich deckenden Punkten des Systems, und nehmen an, dass längs einer solchen Linie ein Blatt mit einem anderen zusammenhänge, d. h. dass man durch Ueberschreitung einer derselben aus einem Blatte in ein anderes gelange. Führt man nämlich einen Punkt einmal über die Linie, und ein andermal um den zugehörenden Punkt herum nach einem festen Punkte, so bilden beide Wege zusammen einen Umgang um den Verzweigungspunkt, und müssen daher zu verschiedenen Punkten des Systems führen. Zu jedem unserer Verzweigungspunkte kann man in der Nähe des Endpunkts und auf der zugehörigen Linie einen gleichartigen annehmen; lässt man dann alle jene Punkte in einem Punkte (Knotenpunkt) zusammenfallen, so wird das System in Nichts geändert; da wir nun den Knotenpunkt willkürlich wählten, so kann man ihn so bestimmen, dass dort keine Verzweigung (um ihn herum) stattfindet. In diesem Falle müssen alle jene Verzweigungspunkte sich aufheben. Hieraus folgt, dass in einer geschlossenen (begrenzungslosen) Fläche die Anzahl aller Verzweigungspunkte gerade sein muss, wenn man die mehrfachen so vielen einfachen gleichsetzt, als solche dasselbe leisten.

Die von uns angegebene Art, Linien zu ziehen, ist immer ausführbar und gewährt ein festes Bild. Was die Vorstellung anbetrifft, so nimmt Riemann eben an, dass längs der Linien Verzweigung stattfinde, dass die Blätter in einander und durch einander hindurch verwachsen seien. Die Verzweigungspunkte erscheinen dann als Schrauben mit in sich zurücklaufenden Windungen. Wir können aber auch die Linien als blose Grenzmarken oder Brücken ansehen, über welche wir nur vermittels des Willens in ein anderes Blatt gelangen. Die Verzweigungspunkte sind dann Nichts, als die Endpunkte jener Brücken.

Zuerst sind die algebraischen Functionen wirklich der Grund dieser

Flächenbildung gewesen; hernach hat jedoch Riemann die Flächen früher construirt, und dann nachgewiessen, dass zu jedem Systeme eine Classe algebraischer Functionen gehöre, die einwerthig in ihr sind.

Für die Ebene gilt nun die für den Cauchy'schen Satz wichtige Beziehung, dass jede geschlossene Curve ein Stück vollständig aus ihr heraus schneidet. Wenn daher jener Satz verlangt, dass die behandelte Function innerhalb der geschlossenen Curve endlich und einwerthig sein soll, so entsteht kaum ein Zweifel über den Sinn des Innerhalb. Es bleibt zwar noch zu wählen zwischen dem Theile, der den unendlich fernen Punkt enthält und dem, welcher ihn ausschliesst; aber das Wort ist bezeichnend genug, um den zweiten Sinn darin finden zu lassen.

Diese Eigenschaft haben die algebraischen Flächen keineswegs, und es hat Riemann diejenigen Flächen einfach zusammenhängend genannt, welche die Eigenschaft der Ebene haben, von jeder geschlossenen Curve zerstückelt zu werden. Mehrfach zusammenhängende aber nennt er solche, in welchen, wie etwa auf der Oberfläche eines Ringes, Querschnitte gezogen werden können, welche die Fläche nicht zerstückeln. Unter einem Querschnitte aber verstehen wir eine Linie, welche zwei Punkte der Begrenzung verbindet, oder, wenn die Fläche eine geschlossene ist, eine in sich zurücklaufende, sich selbst aber oder die Begrenzung niemals schneidende Linie. Die algebraischen Flächen sind nun freilich anderer Natur, als die Oberfläche eines Ringes; aber die Sätze über den Zusammenhang gelten ganz allgemein.

Die erste Forderung an eine einfach zusammenhängende Fläche ist die, dass sie wirklich zusammenhänge, nicht aus getrennten Stücken bestehe, wie etwa das erwähnte System von n Blättern ohne Verzweigungspunkte, und eine erste Folgerung ist die, dass die Begrenzung derselben aus einem Stück bestehe. Im anderen Falle können wir zwei Punkte der verschiedenen Begrenzungsstücke mit einander durch einen Querschnitt verbinden und dieser wird die Fläche nicht zerstückeln. Denn man kann nun von einem zum anderen Ufer des Querschnittes dadurch gelangen, dass man sich längs der Begrenzung fortbewegt, weil die einzelnen Begrenzungsstücke in sich zusammenhängen.

Stossen zwei einfach zusammenhängende Flächen so an einander, dass sie entweder die ganze Begrenzung oder einen continuirlichen Theil derselben gemein haben, so bilden sie zusammen nach Aufhebung der gemeinsamen Begrenzung eine einfach zusammenhängende Fläche.

Wird die Fläche T durch einen Querschnitt α in eine einfach zusammenhängende T' verwandelt, so heisst sie zweifach zusammenhängend, und sie wird durch jeden möglichen Querschnitt a, der T nicht zerstückelt, in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Denn der Querschnitt a zerstückelt T' in mehrere einfach zusammenhängende Stücke; hebt man α auf, so stossen solche Stücke längs eines continuirlichen Theils ihrer Be-

grenzung an einander, die entstehende Fläche T'' ist einfach zusammenhängend.

Giebt es in einer mehrfach zusammenhängenden Fläche irgend einen nicht zerstückelnden Querschnitt, welcher zwei Punkte der Begrenzungen G und G_1 (die auch dieselben sein können) mit einander verbindet, so kann man auch einen eben solchen Querschnitt von einem beliebigen Punkt von G nach einem beliebigen von G_1 führen; denn man kann einmal den Theil von G zwischen dem Anfangspunkte des Querschnitts und dem gegebenen Punkte zum Querschnitt hinzunehmen, oder man kann auch, anstatt den Querschnitt in G einmünden zu lassen, ihn in endlicher Entfernung etwa parallel mit G bis zu jenem Punkte hinführen und dort erst auslaufen lassen, wobei die Parallele so zu ziehen ist, dass zwischen ihr und G ein einfach zusammenhängender Flächenstreifen liegt.

Wird eine Fläche T durch einen Querschnitt α in eine n-fach zusammenhängende T' verwandelt, so heisst sie $\overline{n+1}$-fach zusammenhängend und sie wird durch jeden in ihr möglichen, T nicht zerstückelnden Querschnitt a in eine n-fach zusammenhängende T'' verwandelt. Um den Schluss von n auf $n+1$ anzuwenden, setzen wir voraus, der Satz sei für eine n-fach zusammenhängende Fläche völlig erwiesen.

Wenn die Querschnitte α und a keinen Punkt mit einander gemein haben, so können wir sie durch einen Querschnitt c verbinden, was immer als geschehen angenommen wird, wenn sie nicht schon durch die Begrenzung von T mit einander verbunden sind; es ist dann $a+c$ ein nicht zerstückelnder Querschnit in T' und $\alpha+c$ ein eben solcher Querschnitt in T'', weil eine Linie c, die getrennte Begrenzungsstücke verbindet, nach dem Früheren eine Fläche nicht zerstückelt. Wenn a und α (und c) kein Stück der Fläche völlig begrenzen, so wird die n-fach zusammenhängende Fläche T' durch a in eine $\overline{n-1}$-fach zusammenhängende P zerschnitten. Da T'' durch α in P zerlegt wird, so ist T'' n-fach zusammenhängend w. s. e. w. Wenn a (und c) T' zerstückelt, so kann es einen Querschnitt β geben, der weder T' noch T'' zerstückelt. Dann kann erst β den Querschnitt α, darauf a den Querschnitt β ersetzen. Einen solchen Querschnitt β giebt es aber jedesmal, so lange eins der Stücke mehrfach zusammenhängend ist. Wenn aber keins der Stücke mehrfach zusammenhängend ist, so können wir von α diejenigen Stücke tilgen, zu deren beiden Ufern **verschiedene** einfach zusammenhängende Stücke der Fläche sich ausbreiten. Der Rest von a und der Querschnitt α zerschneiden dann T in eine einfach zusammenhängende Fläche Q. Die einzelnen Stücke von a bilden daher $n-1$ Querschnitte, weil T' durch jedwede $\overline{n-1}$ Querschnitte, aber auch nur durch so viel, in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegt wird. Tilgen wir aber nun statt jener Stücke von a diejenigen von α, welche mit ihnen Stücke der Fläche völlig begrenzen, so werden von der einfach zusammenhängenden

Fläche Q hier einfach zusammenhängende Stücke abgeschnitten und dort längs eines continuirlichen Theiles ihrer Begrenzung angefügt. Die Reste von α bilden aber (weil sie mit den Resten von a in Q gleichviel Anfangs- und Endpunkte und gleichviel Punkte auf der Begrenzung von T haben $n-1$ Querschnitte. Es wird also T' durch $n-1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt und ist daher n-fach zusammenhängend, w. z. e. w.

Flächen, welche längs einer Linie sich spalten, können unberücksichtigt bleiben, weil sie einen unendlich grossen Zusammenhang haben. Z. B. wenn auf einer Ebene irgendwo ein Halbkegel aufsitzt, so sind alle grössten Kreise durch einen Punkt, wenn man sie in der Ebene durch Gerade, welche durch einen Punkt gehen, verbindet, nicht zerstückelnde Querschnitte.

Ausser diesem Falle gehört aber zu jeder Fläche eine ganz bestimmte Anzahl von Querschnitten. Für eine geschlossene (begrenzungslose) Fläche ist diese Anzahl gerade, was wir nur für eine bestimmte Art von Querschnitten beweisen, da es wegen der Unveränderlichkeit dieser Zahl dann für alle Arten gilt.

Ein einzelner Querschnitt, der in unserem Fall in sich zurückläuft, kann eine geschlossene Fläche nicht in eine einfach zusammenhängende verwandeln, weil seine beiden Ufer zwei getrennte Begrenzungsstücke bilden. Eine Verbindungslinie der beiden Ufer bringt die ganze Begrenzung in einen einzigen Zusammenhang. Die Fläche kann nun einfach zusammenhängend sein. Einen dritten Querschnitt, wenn noch einer möglich ist, kann man so ziehen, dass er von einem Punkte des früheren ausgeht und in sich zurückläuft. Dadurch wird die Begrenzung irgendwo geöffnet, das eine Ufer des neuen Querschnitts eingeschaltet, das andere bildet ein getrenntes Begrenzungsstück; es ist daher noch ein vierter Querschnitt möglich u. s. f.

Es findet nun, wie Riemann angiebt, bei einer einfach zusammenhängenden, über einen endlichen Theil der z-Ebene ausgebreiteten Fläche zwischen der Anzahl ihrer einfachen Verzweigungspunkte und der Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung ihrer Begrenzungslinie macht, die Relation statt, dass die letztere um eine Einheit grösser ist, als die ertere, und aus dieser ergiebt sich für eine mehrfach zusammenhängende Fläche eine Relation zwischen diesen Anzahlen und der Anzahl der Querschnitte, welche sie in eine einfach zusammenhängende verwandelt.

Den letzten Theil dieses Satzes, den wir geometrisch nachweisen, hat Riemann mit Hülfe einer logarithmischen Transcendenten erwiesen.

Von dem vertikalen Abstande der Blätter einer über die z-Ebene ausgebreiteten Fläche können wir absehen, wir stellen uns dieselben als einander sehr nahe vor, müssen jedoch in Betracht ziehen, dass eine Verzweigung der Blätter auch um Löcher herum stattfinden kann.

Wenn Jemand auf der Begrenzung eines Flächenstückes fortschreitet, das Gesicht in der Bewegungsrichtung, so sagt man, er durchlaufe die Begrenzung in positiver Richtung, wenn die anstossende Fläche immer zur Linken bleibt; und wenn Jemand um einen Kreis herumgegangen ist, so sagen wir, er habe eine ganze positive Umdrehung seiner Richtung ausgeführt.

Das betrachtete Flächenstück besteht nun aus mehreren Blättern, jedes vielleicht mit anderen Grenzen. Diese Blätter setzen sich um die Verzweigungspunkte oder Löcher herum in einander fort. Dass Blätter am Rande dieser Löcher oder der Grenzen, wie etwa die platt gedrückte Oberfläche eines Ringes, zusammenhängen, wollen wir der Einfachheit wegen vermeiden.

Betrachten wir nun ein einzelnes Blatt der Fläche, so hat es etwa folgende Gestalt: Um die Verzweigungspunkte herum ziehen wir Kreise k und verbinden einen Punkt derselben mit der Begrenzung, was auf mehrere Arten geschehen kann. Die Linie l (Taf. V, Fig. 1), welche anzeigt, dass das Blatt sich längs derselben in ein anderes fortsetzt, welche aber hier nur einen Theil der Begrenzung bildet, kann entweder an die äussere Begrenzung s wie l_1 oder zu einem Loche wie l_2 geführt werden, oder es kann eine frühere Linie l als Begrenzung angesehen werden, so dass l_4 in l_3 einläuft und den Schnittpunkt eine Linie λ mit der übrigen Begrenzung verbindet. Ebenso lassen sich Löcher durch Linien mit der übrigen Begrenzung verbinden (welche Verbindungslinien ebenfalls einen Ort der Verzweigung angeben können); endlich kann eine Linie, wie in der Figur ε, gleichsam als eine Spitze der äusseren Begrenzung ins Innere hineinragen. Alle jene Linien aber sollen sich unter sich oder mit der vorhandenen Begrenzung nicht schneiden, und alle zusammen als die Begrenzung des Flächenstücks S angesehen werden. Wie man sieht, ist dann in S jeder Querschnitt ein zerstückelnder, also S einfach zusammenhängend.

Die Umdrehung, welche die Richtung der äusseren Grenze s macht, ist offenbar eine ganze positive. Eine beliebig in S liegende Linie, die beiderseits begrenzt ist, ändert ihre Richtung so, dass sich die Aenderungen auf beiden Ufern gegenseitig aufheben; aber in ihren Endpunkten macht die Richtung zusammen eine ganze negative Umdrehung, weil sie von links nach rechts vor sich geht, wenn die Linie l in positiver Richtung durchlaufen wird. Hieran wird Nichts geändert, wenn wir an einem Endpunkte einen Kreis oder ein Loch anfügen, weil von der Linie zum Kreise und vom Kreise zur Linie genau eine halbe positive, auf dem Kreise oder Loche aber eine ganze negative Umdrehung gemacht wird. Von der Begrenzung zu einer Linie ε oder λ, von dieser zur Begrenzung s wird in Summa eine halbe positive Umdrehung gemacht, so dass der gesammte Einfluss einer Linie ε, oder einer Linie λ oder l mit einem Kreise oder

Loche in Bezug auf die Anzahl der Umdrehungen Null ist, und irgend ein solcher Theil der Begrenzung schadlos aufgehoben werden kann. Da S keinen Verzweigungspunkt enthält und die Richtung von s eine ganze Umdrehung macht, so ist die letztere Zahl wirklich um Eins grösser, als die der Verzweigungspunkte.

Fügen wir hieran ein zweites Blatt, so müssen in diesem die Linien l, längs welcher es mit dem ersten zusammenhängt, sich decken, soweit überhaupt sich die Blätter decken; sonst kann eine Linie in dem einen Blatte wohl über das andere Blatt hinausgehen. Um nun einen Zusammenhang zwischen den beiden Blättern herzustellen, tilgen wir das eine Ufer einer Linie in S und das andere der entsprechenden Linie in S_1. Der dort liegende Verzweigungspunkt bleibt durch die Kreise, welche zusammen eine Schraubenlinie bilden, welche durch die beiden anderen Ufer von l mit der äusseren Begrenzung verbunden ist, ausgeschlossen. Die Summe der Umdrehungen der Richtung, welche die Begrenzung von S und S_1 macht, war 2; aber in den Endpunkten der zerstörten Ufer macht die Richtung zusammen genommen genau eine ganze. Diese wurde zerstört, es bleibt also eine Umdrehung. Wenn jener Verzweigungspunkt ein einfacher ist, so wird durch Aufhebung der beiden anderen Ufer und der Kreise die Fläche in sich zurück fortgesetzt und ein Verzweigungspunkt eingeschaltet. Die Umdrehungen werden um eine vermehrt (zwei negative an den Kreisen und eine positive an den Ufern werden aufgehoben), also ist noch die letztere Zahl um Eins grösser, als die erstere. Jede geschlossene Curve zerstückelt die Fläche, sie ist daher einfach zusammenhängend.

So können wir ein drittes und viertes Blatt hinzufügen. Wir nehmen nun an, der Riemann'sche Satz sei bewiesen für eine Fläche von k Blättern, die auf die beschriebene Weise an einander gefügt wurden, wir zeigen, dass er dann noch gilt, wenn wir ein $\overline{k+1}^{\text{tes}}$ Blatt hinzufügen.

Wir fügen zunächst das Blatt so an, dass kein Verzweigungspunkt in die Fläche eingeschaltet wird. Sei es nun, dass der Zusammenhang dadurch hergestellt wird, dass zwei entsprechende Ufer von Linien l aufgehoben werden als Begrenzung, welche von einem Punkte oder Loche ausgehen, um das herum sich die Fläche zweimal windet, sei es von einem solchen, um welches sich die Fläche mehrmals windet, es stossen immer zwei einfach zusammenhängende Flächenstücke längs eines continuirlichen Theils ihrer Begrenzung an einander, und es wird die hinzugekommene Umdrehung des neuen Blattes durch die wegfallende an den Ufern von l aufgehoben, so dass der Satz von Riemann gilt.

Wenn aber l von einem α-fachen Verzweigungspunkte ausging, und wenn dort schon α Blätter zusammenhängen, so können wir nun auch die beiden letzten noch übrig gebliebenen Ufer von l aufheben sammt den $\alpha + 1$ Kreisen, die sich um jenen Verzweigungspunkt winden. Es werden

dadurch genau α Umdrehungen ($\alpha + 1$ aus den Kreisen und eine negative von l) hinzugefügt und genau α Verzweigungspunkte eingeschaltet. Eine Linie, welche vorher zwei benachbarte Punkte der Ufer von l verband, zerstückelte die Fläche. Jetzt ist sie als geschlossene Curve anzusehen, und da weder auf der einen, noch auf der anderen Seite von l ein Weg von ihrem Inneren nach dem Aeusseren führt, so zerstückelt sie die Fläche noch, oder jene ist einfach zusammenhängend und es gilt der Satz Riemann's. Es sind jedoch, wenn die Fläche aus n Blättern besteht, nicht mehr, als $n - 1$ Verzweigungspunkte in die Fläche hinein gekommen und ein Loch können wir überhaupt nicht einfügen, weil, wenn dies nicht mit der äusseren Begrenzung verbunden ist, die Fläche mehrfach zusammenhängend ist. Wir wollen nun noch die übrigen Verzweigungspunkte in die Fläche hineinbringen und annehmen, dass Löcher in der Fläche nicht enthalten seien, indem wir deren Begrenzung als äussere Begrenzung mit betrachten.

Zerstören wir einen Kreis um einen Verzweigungspunkt, einen Kreis in einem Blatte, so fliesst sofort ein einfach zusammenhängendes Flächenstück in die Fläche ein längs einer continuirlichen Begrenzung. Die Fläche bleibt also einfach zusammenhängend. Die inneren Ufer der an diesen sich anhängenden Kreise um den Verzweigungspunkt, deren genau noch so viel sind, als der Verzweigungspunkt vielfach ist, werden so der Begrenzung hinzugefügt und sind durch die Linie l des ersten Blattes mit der übrigen Begrenzung verbunden, deren ein Ufer sich an einen solchen Kreis, deren anderes an den letzten Kreis sich anschliesst. Hierdurch werden α Umdrehungen von den inneren Kreisen und ein α-facher Verzweigungspunkt hinzugefügt, und sonst wird Nichts geändert. Fügen wir so nach und nach alle Verzweigungspunkte in die Fläche ein, so können wir noch die Kreise zu anderen Curven ausdehnen, die Linien l zusammenziehen, immer gilt der Riemann'sche Satz. Um nun den zweiten Theil desselben, von den mehrfach zusammenhängenden Flächen und der Querschnittzahl nachzuweisen, nehmen wir an, dass alle Verzweigungspunkte durch Linien l mit einem im Inneren liegenden Punkte verbunden seien und von dort aus in jedem Blatte nur eine einzige keine Verzweigung anzeigende Linie λ nach der äusseren Begrenzung führe. Wenn wir diese äussere Begrenzung nach und nach erweitern, so können wir diese endlich in einen Punkt, den unendlich fernen, zusammenziehen und dann die Linie λ bis ins Endliche verkürzen. Während nun vorher an die Endpunkte der Linien λ sich die äusseren Begrenzungsstücke anschlossen und mit diesen $n + \frac{n}{2}$ positive Umdrehungen zusammen dort stattfanden, so finden jetzt $\frac{n}{2}$ negative statt. Der Zusammenhang ist hierbei nirgend geändert. Ist nun w die Anzahl der Verzweigungspunkte, so war vorher $w + 1$, und ist jetzt $w + 1 - 2n$ die

genaue Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung der ganzen Begrenzung macht. Die Linien λ können sodann noch, wie wir wissen, ohne Schaden weggelassen werden.

Wird nun die Fläche T durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt, so ist die Umdrehung der Richtung auf dem einen Ufer immer die entgegengesetzte, als auf dem anderen, diese Umdrehungen heben sich auf; aber wo zwei Querschnitte an einander stossen, was $4p-2$ mal geschieht, wird je eine halbe positive Umdrehung gemacht. Daher ist die Anzahl der Umdrehungen $2(p-1)$, woraus die von Riemann schon algebraisch bewiesene Gleichung folgt: $w-2n=2(p-1)$.

Wir nennen nun ein kanonisches Querschnittsystem in einer Fläche T ein solches, in welchem der Querschnitt b_1 zwei benachbarte Punkte der beiden Ufer des Querschnitts a_1 verbindet und a_2 aus einer Linie c_1, welche von einem Punkte von b_1 ausläuft und aus einem in sich zurücklaufenden Schnitte a_2 besteht. Ein vierter Querschnitt b_2 führt von einem Ufer von a_2 zu dem benachbarten Punkte auf dem anderen Ufer etc. So besteht das ganze Netz aus Systemen $a_\mu\, b_\mu$, denen eine Linie $c_{\mu-1}$ vorauf geht und eine c_μ folgt.

Es giebt unendlich viele solcher kanonischer Netze. Bildet man alle so zerschnittenen Flächen, etwa $T', T'', T'''\ldots.$ durch ein überall endliches Integral in T ab, welches in einem endlichen Theile von T jedesmal dasselbe ist, so bestehen zwischen den Ortsverschiedenheiten der parallelen Begrenzungsstücke (Periodicitätsmoduln) aller dieser Abbildungen lineare, ganzzahlige Relationen, welche die Abel'schen Transformationsrelationen genannt werden und welche aus der Theorie der ϑ-Functionen bekannt sind.

Hat u in T' die Periodicitätsmoduln $A'_1, A'_2\ldots.A'_p$, bei $a_1, a_2,\ldots.a_p$; $B'_1, B'_2, \ldots B'_p$ bei $b_1, b_2,\ldots b_p$, und in T'' an $a''_1, a''_2,\ldots a''_p$ die $A''_1, A''_2,\ldots A''_p$, an $b''_1, b''_2,\ldots b''_p$ die $B''_1, B''_2,\ldots B''_p$, so besteht die Relation:

$$A''_\mu=\sum_1^p{}_\varepsilon(A'_\varepsilon\alpha_{\mu\varepsilon}+B'_\varepsilon\beta_{\mu\varepsilon}),\quad B''_\mu=\sum_1^p{}_\varepsilon(A'_\varepsilon\gamma_{\mu\varepsilon}+B'_\varepsilon\delta_{\mu\varepsilon}),\quad \mu=1,2,\ldots p,$$

worin $\alpha\beta\gamma\delta$ ganze Zahlen sind. Alle Abbildungen durch u, also auch die, zu welchen A'_μ und A''_μ gehören, müssen denselben Flächeninhalt haben, und bildet man A'_μ, A''_μ durch p von einander unabhängige Functionen ab, so müssen für jede Abbildung durch irgend ein u dieselben Relationen bestehen, und da zwischen den Periodicitätsmoduln verschiedener u bestimmte, von Riemann (Abel'sche Functionen Theil 4, §. 20) gegebene Beziehungen stattfinden, so müssen jene ganzen Zahlen folgenden Bedingungen Genüge leisten:

$$\sum_1^p{}_\varepsilon(\alpha_{\varepsilon\mu}\,\gamma_{\varepsilon\mu'}-\alpha_{\varepsilon\mu'}\,\gamma_{\varepsilon\mu})=0,\qquad \sum_1^p{}_\varepsilon(\beta_{\varepsilon\mu}\,\delta_{\varepsilon\mu'}-\beta_{\varepsilon\mu'}\,\delta_{\varepsilon\mu})=0,$$

$$\sum_1^p{}_\varepsilon(\alpha_{\varepsilon\mu}\,\delta_{\varepsilon\mu}-\beta_{\varepsilon\mu}\,\gamma_{\varepsilon\mu})=1,\qquad \sum_1^p{}_\varepsilon(\alpha_{\varepsilon\mu}\,\delta_{\varepsilon\mu'}-\beta_{\varepsilon\mu'}\,\gamma_{\varepsilon\mu})=0 \text{ für } \mu\gtrless\mu'.$$

woraus noch folgt:

$$\sum_{1}^{p}{}_{\varepsilon}(\alpha_{\mu\varepsilon}\,\beta_{\mu'\varepsilon}-\alpha_{\mu'\varepsilon}\,\beta_{\mu\varepsilon})=0, \qquad \sum_{1}^{p}{}_{\varepsilon}(\gamma_{\mu\varepsilon}\,\delta_{\mu'\varepsilon}-\gamma_{\mu'\varepsilon}\,\delta_{\mu\varepsilon})=0,$$

$$\sum_{1}^{p}{}_{\varepsilon}(\alpha_{\mu\varepsilon}\,\delta_{\mu\varepsilon}-\beta_{\mu\varepsilon}\,\gamma_{\mu\varepsilon})=1, \qquad \sum_{1}^{p}{}_{\varepsilon}(\alpha_{\mu\varepsilon}\,\delta_{\mu'\varepsilon}-\beta_{\mu'\varepsilon}\,\gamma_{\mu\varepsilon})=0 \quad \mu \gtrless \mu'.$$

Diese nothwendigen Bedingungen können wir als bekannt voraussetzen; wir begnügen uns hier damit, nachzuweisen, dass sie auch hinreichende sind, d. h. dass zu jedem System solcher Zahlen ein kanonisches Querschnittnetz existirt. Welches Ufer eines Querschnitts positiv oder negativ genannt werde, ist an sich gleichgültig; aber im kanonischen System muss eine bestimmte Ordnung getroffen werden, so dass man beim Durchlaufen des Querschnittsystems in ganz bestimmter Reihenfolge die positiven und negativen Ufer durchläuft.

I) Wir wählen nun zuerst T' und T'' so, dass sie ganz übereinstimmen, bis auf die Linien $c'_{\varepsilon-1}$ und $c''_{\varepsilon-1}$, so dass sie zwar einen gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt haben, letztere aber auf dem entgegengesetzten Ufer von a_ε liegen, und bis auf die Linien c'_ε und c''_ε, deren Anfangspunkte auf entgegengesetzten Ufern liegen sollen. Es findet dann in $a'_\varepsilon\, b'_\varepsilon$ und $a''_\varepsilon\, b''_\varepsilon$ die entgegengesetzte Uferordnung statt, so dass $A'_\varepsilon = -A''_\varepsilon$, $B'_\varepsilon = -B''_\varepsilon$, sonst aber $A'_\nu = A''_\nu$, $B'_\nu = B''_\nu$ ist. Demnach ist $\alpha_{\mu\mu}=1$, $\delta_{\mu\mu}=1$, nur $\delta_{\varepsilon\varepsilon}=-1$, $\alpha_{\varepsilon\varepsilon}=-1$ und alle übrigen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ sind Null.

II) Es sollen ferner T' und T'' übereinstimmen, es soll nur $c''_{\varepsilon-1}$ zu dem Endpunkte von $c'_{\varepsilon'-1}$ führen, und $c''_{\varepsilon'-1}$ zu dem Endpunkte von $c'_{\varepsilon-1}$, dann muss an die Stelle von $a'_{\varepsilon'}\, b'_{\varepsilon'}$, $a''_\varepsilon b''_\varepsilon$, an Stelle von $a'_\varepsilon\, b'_\varepsilon$, $a''_{\varepsilon'}\, b''_{\varepsilon'}$ gesetzt werden und es ist demnach $A''_\varepsilon = A'_{\varepsilon'}$, $B''_\varepsilon = B'_{\varepsilon'}$, $A''_{\varepsilon'} = A'_\varepsilon$, $B''_{\varepsilon'} = B'_\varepsilon$, oder $\alpha_{\mu\mu}=1$ ausser $\alpha_{\varepsilon\varepsilon}$, $\alpha_{\varepsilon'\varepsilon'}$, welche Null sind, $\alpha_{\varepsilon\varepsilon'}=\alpha_{\varepsilon'\varepsilon}=1$; ebenso $\delta_{\mu\mu}=1$ ausser $\delta_{\varepsilon\varepsilon}$, $\delta_{\varepsilon'\varepsilon'}$, welche Null sind, und $\delta_{\varepsilon\varepsilon'}=\delta_{\varepsilon'\varepsilon}=1$, alle übrigen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ sind Null.

III) Nun sei T' von T'' dadurch verschieden, dass $c''_{\varepsilon-1}$ von $b'_{\varepsilon-1}$ nach b'_ε führe, welcher Querschnitt dann a''_ε heissen wird, und dass c''_ε von a'_ε $(=b''_\varepsilon)$ nach $a'_{\varepsilon+1}$ führe. Hierbei vollzieht sich entweder eine Umordnung des Ufervorzeichens an b'_ε oder an a'_ε. Man hat daher $A''_\varepsilon = \pm B'_\varepsilon$, $B''_\varepsilon = \mp A'_\varepsilon$, oder es ist: $\alpha_{\mu\mu}=1$ ausser $\alpha_{\varepsilon\varepsilon}=0$, $\beta_{\varepsilon\varepsilon}=\pm 1$, $\delta_{\mu\mu}=1$ ausser $\delta_{\varepsilon\varepsilon}=0$, $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}=\mp 1$ und alle übrigen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ sind Null.

IV) Ferner sollen die Netze T' und T'' zusammenfallen, nur b''_ε nicht mit b'_ε. Es soll b''_ε mit b'_ε von a_ε anfangen, wie in Fig. 2, über die Linien $k_3\, k_4$, aus einem Flächenast in einen anderen gehen; dort aber soll b''_ε sich n Mal um $k_3\, k_4$ rechts oder links herum winden, also im zweiten Flächenast b'_ε $n-1$ Mal schneiden und beim n^{ten} Zusammentreffen wieder mit b'_ε auf das andere Ufer von a'_ε zurückgehen. Es ist dann $A''_\varepsilon = A'_\varepsilon \pm n\, B'_\varepsilon$, je nach der Richtung der Umläufe von b''_ε oder es ist $\alpha_{\mu\mu}=\delta_{\mu\mu}=1$,

$\mu = 1, 2, \ldots p$, $\beta_{\varepsilon\varepsilon} = \pm n$ und sonst sind alle $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ Null. Es ist nicht immer möglich, die Windungen blos um $k_3\,k_4$ herum zu machen; aber es ist stets möglich mit Hinzuziehung noch anderer Verzweigungspunkte.

Eine ganz analoge Operation kann man auch auf a'_ε anwenden, wodurch man erhält $\alpha_{\mu\mu} = \delta_{\mu\mu} = 1$, $\gamma_{\varepsilon\varepsilon} = \pm n$ und sonst $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta = 0$.

V) Endlich mögen sich T' und T'' dadurch unterscheiden, dass b''_ε etwa eben da, wo b'_ε oder in der Nähe auf a'_ε anfange und durch das Innere von T' nach $b'_{\varepsilon'}$ hinlaufe und überschreite, wie es in Fig. 3 angedeutet ist. Es sei hierbei $\varepsilon' = \varepsilon + 1$. Von dort aus kann man dann, weil die Fläche einfach zusammenhängend, also jedenfalls zusammenhängend ist, ohne irgend einen Querschnitt zu schneiden, und ohne einen früheren Punkt der Linie zu treffen, die Linie b''_ε zu dem dem Anfangspunkte auf dem anderen Ufer gegenüberliegenden Punkte führen. Von irgend einem Punkte von $a'_{\varepsilon'}$ ziehen wir $b''_{\varepsilon'}$ nach b'_ε und überschreiten diese Linie und führen $b''_{\varepsilon'}$, ohne irgend eine der schon gezogenen Linien zu schneiden, die Querschnitte als Wegweiser benutzend, zu dem dem Anfangspunkte auf dem entgegengesetzten Ufer von $a'_{\varepsilon'}$ gegenüberliegenden Punkte zurück. Dann verbinden wir b''_ε mit $a''_{\varepsilon'}$ (oder $a'_{\varepsilon'}$) durch c''_ε. Man zeigt leicht, dass T'' einfach zusammenhängend ist. Dann ist $A''_\varepsilon = A'_\varepsilon - B'_{\varepsilon'}$, $A''_{\varepsilon'} = A'_{\varepsilon'} - B'_\varepsilon$ oder $\alpha_{\mu\mu} = \delta_{\mu\mu} = 1$, $\mu = 1, 2, \ldots p$, $\beta_{\varepsilon\varepsilon'} = \beta_{\varepsilon'\varepsilon} = \mp 1$. Das untere Zeichen wird durch Ueberschreitung in entgegengesetztem Sinne erhalten. Ein selbiges Verfahren auf a_ε und $a_{\varepsilon'}$ angewendet, liefert das verwandte System, in welchem statt $\beta_{\varepsilon\varepsilon'} = \beta_{\varepsilon'\varepsilon} = \pm 1$, $\gamma_{\varepsilon\varepsilon'} = \gamma_{\varepsilon'\varepsilon} = \pm 1$ zu setzen ist.

Wenn man das angewandte Verfahren wiederholt, so gelangt man zu einem System, in dem $\beta_{\varepsilon\varepsilon'} = \beta_{\varepsilon'\varepsilon} = \pm n$, oder $\gamma_{\varepsilon\varepsilon'} = \gamma_{\varepsilon'\varepsilon} = \pm n$ ist, und wegen II) können wir noch ε', welches gleich $\varepsilon + 1$ war, willkürlich wählen.

Betrachten wir T'' als erstes System und T' als abgeleitetes, so fliessen hieraus ebenso viele Zahlensysteme, denen wirkliche Transformationen eines Schnittnetzes entsprechen. Beide Arten von Transformationen können beliebig oft wiederholt und in beliebiger Reihenfolge angewandt werden, so dass man aus T' T'' und hieraus T''' etc. erhält, weil wir ja das erste System ganz willkürlich, nur von kanonischer Form annahmen, von welcher die folgenden auch sind.

Schreiben wir das Zahlensystem $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ in der Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1p}, \beta_{11}, \ldots \beta_{1p} \\ \cdots\cdot \\ \gamma_{11}, \ldots\ldots \gamma_{1p}, \delta_{11}, \ldots \delta_{1p} \\ \cdots\cdot \\ \gamma_{p1}, \ldots\ldots \gamma_{pp}, \delta_{p1}, \ldots \delta_{pp} \end{vmatrix}$$

so bewirken zwei aufeinander folgende Transformationen ein System, welches aus dem System, das $T^{(n)}$ angehört und dem System der Transformation der Art zusammengesetzt ist, wie sich Determinantenproducte zusammensetzen. Wendet man diese Transformationen (I bis V) auf ein vorliegendes System $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ an, so findet man folgende Regeln:

Man kann die Zahlen einer der p ersten Horizontalreihen oder Vertikalreihen ihr Zeichen wechseln lassen, wenn man dasselbe gleichzeitig mit denen der entsprechenden Reihe aus den p letzten Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihen thut.

Man kann zwei beliebige der p ersten Horizontal- oder Vertikalreihen und die entsprechenden der p letzten Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihen mit einander vertauschen.

Man kann eine der p ersten Horizontal- oder Vertikalreihen mit der entsprechenden der p letzten Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihen vertauschen und muss gleichzeitig das Vorzeichen einer derselben ändern.

Man kann eine der p ersten Horizontal- oder Vertikalreihen, mit einem ganzen positiven oder negativen Factor multiplicirt, zu der entsprechenden der p letzten Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihen addiren und umgekehrt.

Man kann die ν^{te} Horizontal- oder Vertikalreihe mit einem beliebigen ganzen positiven oder negativen Factor multiplicirt, zur $p+\nu^{\text{ten}}$ Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihe addiren, wenn man gleichzeitig die ν'^{te} mit demselben Factor zur $p+\nu'^{\text{ten}}$ addirt und umgekehrt.

Hierbei sind die Abel'schen Transformationsrelationen Invarianten. Wendet man also diese Transformationen auf ein vorliegendes System an, so oft und in der Art, dass so viel als möglich Glieder des entstehenden Systems Null werden, so findet man, dass jedwedes, den Abel'schen Transformationsrelationen genügendes System auf das einfache $\alpha_{\mu\mu}=\delta_{\mu\mu}=1$ $\mu=1\;2\ldots p$, sonst $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ gleich Null gebracht werden kann. Wir brauchen diese Rechnung nicht auszuführen, da ihre Art hinlänglich bekannt ist.

Umgekehrt kann man durch eine Reihe von Transformationen zu jedwedem möglichen, d. h. den Abel'schen Transformationsrelationen genügenden System von Zahlen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, oder von einer Zerschneidung T' zu einer diesem Systeme entsprechenden Zerschneidung T'' gelangen, und man erhält so alle möglichen Zerschneidungen der Fläche T in eine einfach zusammenhängende durch ein kanonisches Querschnittnetz.

XVI.

Ueber scheinbare Unstetigkeit geometrischer Constructionen, welche durch imaginäre Elemente derselben verursacht wird.

Von

Dr. CHRISTIAN WIENER,
Professor an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

(Hierzu Tafel V, Figur 4 bis 8.)

1) Es geschieht häufig, dass geometrische Constructionen von Curven an einer gewissen Stelle keine Punkte mehr liefern, während andere Erzeugungsweisen der Curve zeigen, dass dieselbe an jener Stelle nicht begrenzt ist. Diese Unterbrechung der Stetigkeit der geometrischen Construction rührt daher, dass Constructionselemente imaginär werden, ohne dass dies auch für die Constructionsergebnisse stattfindet. Es kommt in diesen Fällen darauf an, die Construction von den Elementen frei zu machen, welche imaginär werden, und dadurch ihre Stetigkeit herzustellen.

Wir wollen einige Beispiele untersuchen, in welchen die zwischenliegenden imaginären Elemente in verschiedener Weise im Endergebnisse verschwinden.

2) I. Der Mittelpunkt zwischen zwei conjugirten imaginären Punkten ist reell.

Geometrisch erklärt man zwei conjugirte Punkte als die reellen oder imaginären Doppelpunkte einer Involution, welche auf einer Geraden durch zwei projectivische Punktreihen gebildet wird. Sind die Doppelpunkte reell, so ergiebt sich bekanntlich, dass ihr Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Involution zusammenfällt, d. h. mit demjenigen Punkte

jeder Reihe, welcher dem unendlich fernen Punkte der anderen Reihe entspricht. Der Begriff des Mittelpunktes eines Paares conjugirter imaginärer Punkte ist von vornherein nicht gegeben. Er muss durch Ausdehnung des Begriffes und aller Eigenschaften des Mittelpunktes für conjugirte reelle auf imaginäre Punkte gewonnen werden. Einige dieser Eigenschaften können imaginäre Elemente enthalten, andere nicht. Die verallgemeinerte Eigenschaft, dass der Mittelpunkt der Doppelpunkte mit dem Mittelpunkte der Involution zusammenfällt und dass dieser letztere auch für imaginäre Doppelpunkte reell ist, zeigt die Realität des Mittelpunktes conjugirter imaginärer Punkte.

Analytisch werden die Coordinaten eines imaginären Punktes, wenn $i=\sqrt{-1}$ und a, b, c, d reelle Strecken bedeuten, durch

$$x_1 = a + bi, \quad y_1 = c + di$$

ausgedrückt. Conjugirt zu diesem Punkte nennt man denjenigen, dessen Coordinaten

$$x_2 = a - bi, \quad y_2 = c - di$$

sind. Dehnt man wieder den Begriff und alle Eigenschaften des Mittelpunktes zwischen zwei reellen Punkten auf den zwischen zwei conjugirten imaginären aus, so erhält man die Coordinaten desselben, in unserem Falle

$$x = a, \quad y = c,$$

wodurch dessen Realität nachgewiesen ist.

3) Aufgabe. Den geometrischen Ort l der Mittelpunkte D der Sehnen zu bestimmen, welche aus einem Punkte A zu einem Kegelschnitte k gezogen werden.

Auflösung. Die Punkte D (Fig. 4) auf den Strahlen aus A, welche k in zwei reellen Punkten H, J schneiden, lassen sich durch Halbiren der reellen Strecke HJ in D unmittelbar finden. Sobald aber A in der äusseren Fläche des Kegelschnitts k liegt und die Schnittpunkte H und J imaginär werden, versagt dieses Verfahren.

Damit die geometrische Stetigkeit nicht unterbrochen werde, muss der Begriff der gemeinsamen Punkte einer Geraden und eines Kegelschnitts von ihrer reellen Beschaffenheit auf die imaginäre ausgedehnt werden. Nennt man auf einer Geraden a zwei Punkte A und A' in Bezug auf den Kegelschnitt k conjugirt, wenn der eine auf der Polaren des anderen liegt, so sind bekanntlich die Punktreihen der A und A' projectivisch und befinden sich in Involution. Da nun die Doppelpunkte dieser Involution, wenn sie reell sind, die Durchschnittspunkte der a und k darstellen, so können die letzteren, indem wir den Begriff der gemeinsamen Punkte der a und k auf ihre imaginäre Beschaffenheit ausdehnen, auch durch imaginäre Doppelpunkte jener Involution dargestellt werden. Der Mittelpunkt zwischen beiden Doppelpunkten ist stets der Mittelpunkt D der Involution. Dieser wird aber auf a unabhängig von den (reellen oder imaginären)

Doppelpunkten als Durchschnitt D mit dem zur Richtung a conjugirten Durchmesser MD des Kegelschnitts k gefunden, und dies ist die in Fig. 4 angewendete Construction.

4) Analytische Auflösung. Nimmt man A (Fig. 4) zum Ursprung eines recht- oder schiefwinkligen Coordinatensystems, so ist die Gleichung eines Strahles a

$$y = mx, \tag{1}$$

und die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts k

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{2}$$

Eliminirt man y aus beiden Gleichungen, so erhält man

$$x^2(A + Bm + Cm^2) + x(D + Em) + F = 0,$$

oder, wenn man

$$A + Bm + Cm^2 = G, \quad D + Em = H$$

setzt,

$$Gx^2 + Hx + F = 0,$$

woraus

$$x = \frac{-H \pm \sqrt{H^2 - 4GF}}{2G}$$

als die Abscissen der beiden Durchschnittspunkte der a und k folgen. Die Abscisse des Mittelpunktes der Sehne auf a ergiebt sich als das arithmetische Mittel beider letzteren Werthe:

$$x' = -\frac{H}{G} = -\frac{D + Em}{A + Bm + Cm^2}. \tag{3}$$

Dieser Werth ist stets reell, wenn auch jene Schnittpunkte imaginär werden, was für $H^2 < 4GF$ eintritt.

Um noch die Gleichung des Ortes l der Sehnenmittelpunkte zu erhalten, eliminire man m aus 3) und der aus 1) folgenden $y' = mx'$, so erhält man als Gleichung von l

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' = 0. \tag{4}$$

5) Die durch die Punkte D gebildete Curve l ist bekanntlich ein mit k ähnlicher und ähnlich liegender, durch A gehender Kegelschnitt. Dies zeigt zunächst die Vergleichung der Gleichungen 4) und 2) der vorigen Nummer. Man kann aber auch diesen Satz als einen besonderen Fall des folgenden allgemeineren Satzes betrachten:

> Wenn man in der Ebene eines Kegelschnitts k (Fig. 5) eine beliebige Gerade d und ein Strahlenbüschel A annimmt und auf jedem Strahle a zu seinem Schnittpunkte D' mit d den conjugirten Punkt D in Bezug auf k sucht, so bilden die D einen Kegelschnitt l, welcher durch A, durch den Pol P der Geraden d in Bezug auf k, durch die Punkte B und C geht, in denen die Tangenten aus A den k berühren und welcher in A die

Gerade AE und in P die Gerade PE berührt, die durch den Schnittpunkt E der d mit der BC gehen.

Beweis. D wird durch a und durch die Polare p von D' bestimmt. Alle a bilden einen mit der Punktreihe der D' projectivischen Strahlenbüschel A, alle p bilden einen mit der Punktreihe der D' projectivischen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Pol P der Geraden d ist. Die Durchschnitte entsprechender Strahlen der demnach unter einander projectivischen Strahlenbüschel A und P bilden die Curve l, welche daher ein Kegelschnitt ist und durch A und P geht. Da in den Tangenten AB und AC an k jedem Punkte der Berührungspunkt conjugirt ist, so liegen B und C auf l. Da ferner der Pol der Geraden AP der Schnittpunkt E der Polaren BC zu A und der Polaren d zu P ist, so entspricht dem Strahle AP aus A der Strahl PE und dem Strahle PA aus P der Strahl AE. Daher sind PE und AE Tangenten an l.

6) Besonderer Fall: Rückt d ins Unendliche, so wird l mit k ähnlich und ähnlich liegend.

Oder: Die Mittelpunkte D der aus einem Punkte A in der Ebene eines Kegelschnitts k zu diesem gezogenen Sehnen bilden einen mit k ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitt l, welcher die Strecke AM, worin M der Mittelpunkt von k ist, zum Durchmesser hat.

Beweis. Rückt d und rücken daher auch die Punkte D' ins Unendliche, so sind D die Mittelpunkte der auf den Strahlen a liegenden Sehnen von k (Fig. 4). Der Pol der d wird dann der Mittelpunkt M von k. Der Punkt E auf BC rückt dann ebenfalls ins Unendliche und die Tangenten AE und ME werden parallel, daher AM ein Durchmesser von l. Die entsprechenden Strahlen a und p sind nach 3) conjugirte Richtungen in k.

Schneidet nun AM den k in reellen Punkten R und S, den Endpunkten eines reellen Durchmessers, und legt man in R ein mit A und in S ein mit M gleiches und paralleles Strahlenbüschel, so sind entsprechende Strahlen aus R und S conjugirte Sehnen, schneiden sich daher in einem Punkte von k. Daher werden k und l ähnlich, und entsprechende Längenmaasse verhalten sich wie $RS : AM$. — Schneidet dagegen der Durchmesser AM den k nicht in reellen Punkten, was nur eintreten kann, wenn k eine Hyperbel, so lege durch M irgend einen reellen Durchmesser von k mit den Endpunkten T, U, lege in T ein mit A und in U ein mit M gleiches und paralleles Strahlenbüschel, so schneiden sich wieder entsprechende Strahlen in Punkten von k. Da nun die beiden gleichen und parallelen Paare von Strahlenbüscheln A, M und T, U dieselben Richtungen entsprechender Paare paralleler Strahlen haben müssen, so bestimmen diese die Richtungen paralleler Asymptoten und l und k sind ähnliche und ähnlich liegende Hyperbeln. AM ist ein Durchmesser von l, weil die entsprechenden Strahlen der Büschel A und M conjugirte Richtungen für k

und daher auch für den mit k ähnlichen Kegelschnitt l sind. Das Verhältniss entsprechender Längenmaasse ist in diesem Falle ein imaginäres.

Ist k ein Kreis mit dem Mittelpunkte M, so ist l ebenfalls ein Kreis mit dem Durchmesser AM und die zu den Strahlen a aus A conjugirten Durchmesser von k stehen auf den $\acute{a}$ senkrecht.

7) II. Der Träger zweier conjugirter imaginärer Punkte ist eine reelle Gerade.

Der geometrische Begriff zweier conjugirter Punkte bringt es mit sich, wie wir unter 2) gesehen haben, dass dieselben auf einer reellen Geraden liegen, mögen die Punkte nun reell oder imaginär sein.

Analytisch sind zwei conjugirte imaginäre Punkte bestimmt durch

$$x_1 = a + bi, \quad y_1 = c + di,$$
$$x_2 = a - bi, \quad y_2 = c - di.$$

Die Gleichung der durch beide Punkte gelegten Geraden ist

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

oder, wenn man die obigen Werthe einführt,

$$y \frac{b}{bc - ad} - x \frac{d}{bc - ad} = 1.$$

Weil hierin i nicht mehr vorkommt, ist die Gerade reell; sie geht durch den reellen Mittelpunkt ($x = a$, $y = c$) zwischen den beiden imaginären Punkten und hat dieselbe Neigung α gegen die Abscissenaxe, wie wenn i ein reeller Factor wäre; die Neigung ist bestimmt durch

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{d}{b}.$$

Es soll zunächst die bekannte Aufgabe über die Chordale gelöst werden, sowohl weil sich die folgende Aufgabe auf dieselbe stützt, als auch weil hier eine neue, dem ursprünglichen Sinne sich am engsten anschliessende Auflösung gegeben werden soll.

8) Aufgabe. Von zweien in einer Ebene liegenden Kreisen die gemeinschaftliche Sehne, d. h. ihre Chordale oder Potenzlinie zu construiren.

Sobald beide Kreise zwei reelle Punkte gemein haben, ist deren Verbindungsgerade die gemeinsame Sehne. Andernfalls aber versagt dieses Verfahren.

Erste Auflösung. Auf jeder in der Ebene der Kreise liegenden Geraden befindet sich nach 3) eine Involution, deren Punktepaare in Bezug auf den Kreis k_1, dessen Mittelpunkt M_1 sei, conjugirt sind, und eine solche in Bezug auf den Kreis k_2, dessen Mittelpunkt M_2. Die beiden Paare reeller oder imaginärer Doppelpunkte dieser Involutionen sind die Punktepaare, welche die Gerade mit den Kreisen gemein hat. Unsere Aufgabe verlangt, diejenige Gerade zu suchen, auf welcher beide Paare von Doppelpunkten in

einander fallen. Eine Involution ist bekanntlich durch zwei Paare conjugirter Elemente bestimmt. Wenn wir daher eine Gerade finden, auf welcher irgend zwei Paare von Punkten sowohl in Bezug auf den Kreis k_1, als in Bezug auf k_2 einander conjugirt sind, so fallen auch die Doppelpunkte zusammen und jene Gerade ist die Chordale.

Da dem unendlich fernen Punkte einer Geraden der Mittelpunkt der Involution conjugirt ist, welcher auf dem zur Geraden senkrechten Durchmesser liegt, so fallen zunächst die unendlich fernen Punkte und die damit conjugirten Mittelpunkte der Involutionen nur auf den zu der Centrallinie $M_1 M_2$ senkrechten Geraden zusammen; daher muss die Chordale senkrecht auf $M_1 M_2$ stehen.

9) Um ein zweites Paar conjugirter Punkte zur Deckung zu bringen, lege man eine Gerade g (Fig. 6) in der Ebene der Kreise, die wir der Einfachheit halber parallel zur Centrallinie $M_1 M_2$ und berührend an den Kreis k annehmen wollen. Eine zu $M_1 M_2$ senkrechte und sonst beliebige Gerade a schneidet g im Punkte A, zu dem wir den conjugirten Punkt auf a in Bezug auf den Kreis k_1 finden, indem wir a mit der Polaren von A, welche durch den Pol von g geht, schneiden. Entsprechend ergiebt sich der zu A conjugirte Punkt A_2 in Bezug auf den Kreis k_2. Fallen A_1 und A_2 zusammen, so ist a die Chordale.

Der geometrische Ort der A_1 ist aber eine Parabel p_1. Denn die a bilden einen auf g senkrechten, mit der Reihe der A projectivischen Parallelstrahlenbüschel. Die Polaren der A bilden einen mit der Reihe der A projectivischen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Pol P_1 der g in Bezug auf den Kreis k_1, d. h. deren Berührungspunkt mit demselben ist. Der Parallelstrahlenbüschel der a und der Büschel der Polaren sind daher projectivisch, und die Durchschnitte entsprechender Strahlen, welche den geometrischen Ort der A_1 bilden, erzeugen einen Kegelschnitt. Derselbe hat nur einen Punkt im Unendlichen, bestimmt durch die unendlich ferne Gerade a und den derselben entsprechenden Strahl $P_1 M_1$; er ist daher eine Parabel. P_1 ist ihr Scheitel, weil g, der dem $P_1 M_1$ entsprechende Strahl, die Curve in P_1 berührt und senkrecht auf $P_1 M_1$ steht. $P_1 M_1$ ist demnach die Hauptaxe. — Ebenso ist der geometrische Ort der A_2 eine Parabel p_2, deren Scheitel P_2, der Pol der g in Bezug auf den Kreis k_2, und deren Hauptaxe $P_2 M_2$.

Beide Parabeln p_1 und p_2 sind congruent und parallel. Denn ziehe von P_1 und P_2 die beiden parallelen Strahlen $P_1 A_1$ und $P_2 A'_2$, bestimme zu ihnen die Pole A und A' auf g durch die beiden auf den Strahlen senkrechten Halbmesser $M_1 A$ und $M_2 A'$, so ergiebt sich $P_1 A = P'_2 A'$, wobei P'_2 der Schnitt von g mit $P_2 M_2$. Daraus folgt $P_1 A_1 = P_2 A'_2$ und daraus die Congruenz und der Parrallelismus von p_1 und p_2.

10) In einem Schnittpunkte B von p_1 und p_2 fallen zwei demselben A conjugirte Punkte A_1 und A_2 zusammen, und die durch B gehende Senk-

rechte zu $M_1 M_2$ ist eine Chordale. Zwei congruente parallele Parabeln, wie p_1 und p_2, haben aber drei Punkte im Unendlichen und einen vierten Punkt, der im Allgemeinen im Endlichen liegt, gemein. Daher haben zwei in einer Ebene liegende Kreise zwei Chordalen, die unendlich ferne Gerade und eine im Allgemeinen im Endlichen befindliche zu der Centrallinie senkrechte Gerade.

Werden beide Kreise concentrisch, so wird die Centrallinie unbestimmt; welche Richtung man aber auch der Geraden g geben mag, es werden die congruenten Parabeln p_1 und p_2 eine gemeinschaftliche Hauptaxe besitzen, und daher wird der vierte gemeinsame Punkt B ebenfalls ins Unendliche rücken, so dass die beiden Chordalen zweier concentrischen Kreise in der unendlich fernen Geraden zusammenfallen.

11) Diese Betrachtungen führen zu einer, so viel ich weiss, neuen Construction der Chordalen. Um den Schnittpunkt B der congruenten parallelen Parabeln p_1 und p_2, deren Scheitel P_1 und P_2 sind, zu finden, lege man in eine derselben, z. B. in p_1, eine Sehne CB gleich und gleich gerichtet mit $P_1 P_2$; der dem Punkte P_2 entsprechende Endpunkt ist der Schnittpunkt B, wie eine Parallelverschiebung der p_1 in p_2 zeigt. Um die der unbekannten Sehne CB conjugirte Axe zu finden, lege die damit parallele Sehne $P_1 P_2$, deren zweiten mit p_1 gemeinsamen Punkt A''_1 man erhält, wenn man $M_1 A'' \perp P_1 P_2$ mit g in A'' schneidet und $A''A''_1 \perp g$ zieht. Der Mittelpunkt D von $P_1 A''$ liegt auf der Axe, welche CB conjugirt ist. Nimmt man dann B' in der Mitte von $A''P'_2$, so ist $DB' = \frac{1}{2} P_1 P'_2$, und B liegt auf der durch B' senkrecht zu g gelegten Geraden. B' bestimmt daher die Chordale.

Die Construction der Chordale zweier Kreise k_1, k_2 ist daher folgende: Lege an den Kreis k_1 eine Tangente g parallel der Centrallinie $M_1 M_2$, bestimme den Berührungspunkt P_1, fälle von M_2 die Gerade $M_2 P'_2 \perp g$ mit dem Fusspunkte P'_2, bestimme auf $M_2 P'_2$ den Pol P_2 der g in Bezug auf k_2, ziehe $P_1 P_2$, fälle $M_1 A'' \perp P_1 P_2$, welche g in A'' schneidet, halbire $A'' P'_2$ in B', ziehe $B'B \perp M_1 M_2$, so ist $B'B$ die Chordale.

12) Anmerkung. Legt man die Gerade g beliebig in der Ebene der beiden Kreise, so werden, wie in Nr. 20 und 21 gezeigt wird, die geometrischen Orte p_1 und p_2 der Punkte A_1 und A_2 ähnliche Hyperbeln, welche durch den Pol P_1, bezüglich P_2 der g gehen und die durch den Schnittpunkt H von g und $M_1 M_2$ senkrecht zu $M_1 M_2$ gelegte Gerade zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, während die beiden anderen Asymptoten senkrecht auf g stehen und die g in Punkten L_1 und L_2 schneiden, deren Abstände $L_1 H$ und $L_2 H$ von H durch die auf g senkrechten Durchmesser der Kreise k_1 und k_2 halbirt werden. Auch diese Hyperbeln haben stets drei Punkte im Unendlichen gemein, während der vierte B im Allgemeinen im Endlichen liegt. Werden die Kreise concentrisch, so fallen auch die zweiten

Asymptoten zusammen und der vierte Punkt sammt der Chordalen gehen ebenfalls ins Unendliche.

13) Zweite Auflösung. Sie ist eine bekannte und beruht auf einer abgeleiteten Eigenschaft der Chordale. Da nämlich für alle durch einen Punkt A gehenden Sekanten eines Kreises das Product der auf jedem durch den Kreis gebildeten Abschnitte AB und AC dasselbe ist, so hat die Chordale die Eigenschaft, dass die Producte der bezeichneten, von einem Punkte der Chordale ausgehenden Sekantenabschnitte in beiden Kreisen dieselben sind, weil dies auf der Chordale, auf der die Schnittpunkte übereinstimmen, stattfindet; dass demnach auch die von einem Punkte der Chordale an die beiden Kreise gelegten Tangenten unter einander gleich sind. Daraus folgt, dass die drei Chordalen je zweier von drei gegebenen Kreisen durch denselben Punkt gehen und hieraus ergiebt sich die bekannte einfachste Construction der Chordale zweier Kreise k_1, k_2, welche keine reellen Punkte gemein haben. Man lege einen dritten Kreis k_3, welcher die beiden ersten in reellen Punkten schneidet, so bestimmen die gemeinschaftlichen Sehnen von k_1 und k_3 und von k_2 und k_3 einen Punkt der Chordale von k_1 und k_2. In gleicher Weise kann man noch einen zweiten Punkt suchen oder beachten, dass die Chordale senkrecht auf der Centrallinie steht.

14) Die analytische Auflösung ergiebt sich folgendermaassen: Seien r_1 und r_2 die Halbmesser der Kreise k_1 und k_2 und legt man den Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten in den Mittelpunkt des Kreises K_1, während a und b die Coordinaten des Mittelpunktes des Kreises k_2 sind, so ergeben sich die Gleichungen der Kreise

$$x^2 + y^2 = r_1^2,$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r_2^2.$$

Daraus folgt durch Subtraction

$$1) \qquad 2ax + 2by = a^2 + b^2 + r_1^2 - r_2^2,$$

welche Gleichung die Abhängigkeit der beiden Coordinaten jedes der beiden Schnittpunkte von einander ausdrückt und daher auch die Gleichung ihrer Verbindungslinie, d. h. der Chordale ist. Dasselbe Ergebniss werden wir erhalten, wenn wir zuerst die Coordinaten der Schnittpunkte bestimmen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$a^2 + b^2 = d^2 \quad \text{und} \quad a^2 + b^2 + r_1^2 - r_2^2 = c^2,$$

so ist d der Abstand der beiden Mittelpunkte und es folgt aus 1)

$$2) \qquad 2ax + 2by = c^2.$$

Eliminiren wir aus den beiden Kreisgleichungen y, so erhalten wir

$$x = \frac{ac^2 \pm b\sqrt{4d^2r_1^2 - c^4}}{2d^2},$$

$$3) \quad x = \frac{ac^2 \pm b\sqrt{(d + r_1 + r_2)(d + r_1 - r_2)(d - r_1 + r_2)(-d + r_1 + r_2)}}{2d^2}.$$

Hieraus folgt, dass die Abscissen der Schnittpunkte beider Kreise und diese selbst imaginär sind, wenn einer der drei Fälle eintritt:

$$d > r_1 + r_2, \quad r_1 > d + r_2, \quad r_2 > d + r_1,$$

d. h. wenn der eine Kreis keinen Punkt des anderen, oder wenn k_1 den k_2 oder k_2 den k_1 ganz einschliesst.

Bezeichnen wir die beiden Schnittpunkte der Kreise mit x_1, y_1 und x_2, y_2 und setzen

$$(d+r_1+r_2)(d+r_1-r_2)(d-r_1+r_2)(-d+r_1+r_2)=e^4,$$

so erhalten wir aus 3) und 2)

$$x_1 = \frac{ac^2+be^2}{2d^2}, \quad y_1 = \frac{bc^2-ae^2}{2d^2},$$

$$x_2 = \frac{ac^2-be^2}{2d^2}, \quad y_2 = \frac{bc^2+ae^2}{2d^2}.$$

Für imaginäre Schnittpunkte ist e^2 imaginär; x_1 und x_2, sowie y_1 und y_2 sind dann conjugirte imaginäre Grössen oder die imaginären Punkte sind conjugirt. Die Gleichung der durch dieselben gehenden Geraden oder der Chordale ist nach 7 und übereinstimmend mit 1)

$$y\frac{2b}{c^2} + x\frac{2a}{c^2} = 1.$$

Die Chordale ist also stets reell. Da ihr Winkel α mit der positiven Richtung der Abscissenaxe durch

$$tang\,\alpha = -\frac{a}{b},$$

der Winkel α' der Centrallinie mit der Abscissenaxe aber durch

$$tang\,\alpha' = \frac{b}{a}$$

ausgedrückt ist, so ergiebt sich

$$tang\,\alpha\,.\,tang\,\alpha' = -1,$$

d. h. die Chordale steht senkrecht auf der Centrallinie.

15) Aufgabe. Ziehe in einem Kreise l, dessen Mittelpunkt M ist (Fig. 7), einen Durchmesser AMB, lege $\perp AB$ eine Gerade c, welche l in den Punkten C_1, C_2 und AB in D schneidet, mache auf c $DD_1 = DD_2 = AC_1 = AC_2$, so sind D_1 und D_2 offenbare Punkte einer Parabel, welche A zum Scheitel und AB zur Hauptaxe hat. Rückt D auf der dem A entgegengesetzten Seite ausserhalb des Kreises nach D', so werden die Punkte C_1, C_2 imaginär und die Construction scheint ihre Stetigkeit verloren zu haben. Es ergiebt sich daraus die Aufgabe, die Stetigkeit jener Construction nachzuweisen.

Auflösung. Um zuerst das Uebertragen von AC_1 nach DD_1 in eine Construction zu bringen, ziehe $AF_1 \perp AB$, lege aus A als Mittelpunkt einen Kreis k durch C_1 und C_2, schneide ihn mit AF_1 in F_1 und F_2, ziehe F_1D_1 und $F_2D_2 \# AB$ und schneide sie mit c in D_1 und D_2. Oder: F_1 und F_2

liegen auf einem Kreise k, der A zum Mittelpunkte und c zur gemeinschaftlichen Sehne mit dem Kreise l hat.

In dieser Fassung derselben Construction ist aber vermittelst der Chordale die gesuchte Stetigkeit hergestellt. Rückt D ausserhalb des Kreises l nach D', so findet man den Kreis k', welcher c' zur Chordale mit dem Kreise l hat, indem man einen, diese Kreise l und k' in reellen Punkten schneidenden, sonst beliebigen Hülfskreis l_1 aus einem Mittelpunkte M_1 schneidet, die gemeinschaftliche Sehne der Kreise l und l_1, als welche der Einfachheit halber AB gewählt ist, zieht, deren gemeinschaftlichen Punkt D' mit c' bestimmt, von D' eine Senkrechte auf AM_1 fällt, diese mit dem Kreise l_1 in G_1 und G_2 schneidet und von A als Mittelpunkt den Kreis k' durch G_1 und G_2 legt. Durch k' werden dann F'_1 und F'_2, sowie D'_1 und D'_2 bestimmt. Die Chordale von k' und l geht nun wirklich durch D', weil die Chordale von l_1 und k' und die von l_1 und l in D' zusammentreffen.

Rückt D auf die dem B entgegengesetzte Seite von A, so werden die Punkte G_1 und G_2 imaginär, und damit auch der Kreis k, die Punkte F_1 und F_2 und die Punkte D_1 und D_2, wie dies der Parabel entspricht.

16) Aufgabe. Die Durchschnittslinie zweier Flächen zweiter Ordnung, welche von der vierten Ordnung ist, projicirt sich bekanntlich auf eine gemeinschaftliche Hauptebene beider Flächen, wenn diese eine solche besitzen, als das Ganze oder als Stücke einer Curve zweiter Ordnung. Tritt der letztere Fall ein, so ergeben sich durch die gebräuchlichen Constructionsmethoden die fehlenden Stücke nicht, weil sie nicht die Projectionen reeller Punkte der Durchschnittscurve sind. Insofern diese Methoden auch Constructionen von Curven zweiter Ordnung sind, bietet sich die Aufgabe dar, dieselben so zu verallgemeinern, dass durch sie alle Punkte geliefert werden, und zu erklären, wie es kommt, dass reelle Punkte jener Curve zweiter Ordnung die Projection von imaginären Punkten der Raumcurve vierter Ordnung sind.

17) Erstes Beispiel. Die Projection des Durchschnitts zweier Kegelflächen zweiter Ordnung mit gemeinschaftlicher Hauptebene auf die letztere zu construiren, und zwar insbesondere diejenigen reellen Punkte jener Curve, welche nicht mehr die Projectionen reeller Punkte der Durchschnittscurve sind.

Sei eine zur Hauptebene senkrechte Ebene die erste Projectionsebene, die Hauptebene selbst die zweite, seien in Fig. 8 K', K'' und E', E'' die ersten und zweiten Projectionen der in der Hauptebene liegenden Spitzen K, E beider Kegel $\varkappa$, ε, seien k', k'' und e', e'' die Projectionen der Schnitte K, e der Kegel mit der ersten Projectionsebene, d. i. der ersten

Spuren der Kegel, welche der Voraussetzung gemäss Kegelschnitte sein müssen, von denen die eine Hauptaxe in der Hauptebene liegt, die andere darauf senkrecht steht.

18) Erste Auflösung. Man legt bekanntlich Hülfsebenen durch die die Spitzen verbindende Gerade KE, schneidet mit einer solchen die Kegel in je zwei Erzeugenden, deren vier Schnittpunkte die vier in der Hülfsebene liegenden Punkte der Schnittcurve c sind. Geht man demgemäss von einer durch die zweite Projection $E''E''_2$ gegebenen Erzeugenden des Kegels ε aus, so ist deren erste Spur einer der beiden Schnittpunkte der zur Hauptebene senkrechten Geraden $E''_2E'_2$ und des Kegelschnitts e'; einer derselben ist mit E'_2 bezeichnet. Durch jeden dieser Punkte und durch die erste Spur H' der KE legt man die ersten Spuren der anzuwendenden Hülfsebenen, deren eine e' noch in E'_1, k' in K'_1 und K'_2 schneidet. Die Erzeugenden KK_1, KK_2 und EE_1, EE_2 liefern dann in beiden Projectionen die vier Punkte G_1, G_2, G_3, G_4 der Curve. Die andere Hülfsebene würde vier zu diesen in Bezug auf die Hauptebene symmetrische Punkte liefern.

Geht man von einem Strahle $E''F''$ aus, der nicht mehr die Projection einer Erzeugenden des Kegels E ist, so schneidet die durch ihre erste Spur senkrecht zur Hauptebene gelegte Gerade $F''F'$ den Kegelschnitt e' nicht in reellen Punkten. Daher enthält EF keine reellen Punkte von c. Da aber $E''F''$ dennoch reelle Punkte von c'' enthalten kann, so muss das erste Verfahren so erweitert werden können, dass diese reellen Punkte sich ergeben.

19) Betrachten wir daher die Eigenthümlichkeit des Reellen und Imaginären als Zufälligkeit und suchen die Construction davon unabhängig zu machen, so bemerken wir, dass die vier zur Hauptebene senkrechten Geraden $E'_1E''_1$, $E'_2E''_2$, $K'_1K''_1$, $K'_2K''_2$ die Eigenthümlichkeit haben, dass die Doppelpunkte der auf ihnen befindlichen Involutionen — auf den beiden ersteren in Bezug auf e', auf den beiden letzteren in Bezug auf k' — sich von H' aus auf einander projiciren. Dies findet aber, infolge der Nr. 8, unabhängig von der Realität der Doppelpunkte dann statt, wenn zwei Paare conjugirter Punkte von H' aus perspectivisch liegen. Für ein Paar ist dies auf allen zur Hauptebene senkrechten Geraden der Fall, nämlich für den in der Hauptebene gelegenen und den damit conjugirten unendlich fernen Punkt; es erübrigt daher, die Bedingung noch für ein zweites Paar zu erfüllen.

Zu dem Ende schlagen wir denselben Weg wie in 9 ein und zwar in der in 12 angedeuteten verallgemeinerten Weise. Wir legen aus H' einen beliebigen Strahl $H'F'$, denken uns durch jeden Punkt F' desselben eine Senkrechte f' zur Hauptebene gezogen und auf ihr den Punkt A' bestimmt,

welcher in Bezug auf e' dem F' conjugirt ist, und den Punkt B', der in Bezug auf k' dem F' conjugirt ist. Alle Punkte A' bilden eine Curve a', alle B' eine Curve b', die wir zunächst untersuchen wollen.

20) A' ist bestimmt durch den Strahl f' aus F' und die Polare von F' in Bezug auf e', welche durch den Pol P' der $H'F'$ geht. Alle Strahlen f' bilden einen mit der Punktreihe der F' projectivischen Parallelstrahlenbüschel, alle Polaren der F' einen mit der Punktreihe der F' projectivischen Strahlenbüschel P'. Beide Strahlenbüschel sind daher unter einander projectivisch und bestimmen durch die Durchschnitte A' entsprechender Strahlen einen Kegelschnitt a'. Derselbe geht durch die Punkte R' und S', in welcher e' die Hauptebene schneidet, weil hier die Strahlen f' die e' berühren und der Berührungspunkt jedem anderen Punkte der Tangente, also auch dem zugehörigen F', conjugirt ist. Ebenso geht a' durch die Schnittpunkte U' und V' der $H'F'$ mit e', weil hier die Strahlen f' Doppelpunkte besitzen, in denen conjugirte Punkte zur Deckung gelangen. Endlich geht a' durch den Mittelpunkt P' des einen ihn erzeugenden Strahlenbüschels und wird hier von $P'H'$ berührt, weil $P'H'$ der Strahl aus P' ist, welcher dem durch P' gehenden Strahle f', der H' zum Pole hat, entspricht.

21) Der Kegelschnitt a' ist eine Hyperbel, von der die Richtungen der Asymptoten durch diejenigen Strahlen des Büschels P' bestimmt sind, welche ihre entsprechenden Strahlen f' im Unendlichen treffen. Der eine davon ist der mit den f' parallele Strahl, der andere der dem unendlich fernen f' entsprechende Strahl, also der Durchmesser $P'M'$ von e'.

Die Asymptoten selbst findet man, indem man die Hyperbel aus dem Strahlenbüschel P' und je einem solchen parallel einer Asymptote entstehen lässt. Diejenigen Strahlen der Parallelbüschel, welche den mit ihnen parallelen Strahlen aus P' entsprechen, sind die Asymptoten. Da nun dem mit f' parallelen Strahl aus P' der durch H' gehende Strahl f' entspricht, indem H' der Pol jenes Strahles aus P' ist, so bildet der durch H' gehende Strahl f' die eine Asymptote von a'.

Andererseits entsprechen den mit der zweiten Asymptotenrichtung $P'M'$ parallelen Strahlen durch U', V', P' die Strahlen $P'U'$, $P'V'$, $P'H'$, und es soll der dem Strahle $P'M'$ aus P' entsprechende Strahl des Parallelstrahlenbüschels gefunden werden. Beide Büschel bestimmen auf $H'F'$ zwei projectivische Punktreihen $U'V'S'$ und $U'V'H'$, wobei S' der Schnittpunkt von $P'M'$ mit $H'F'$; der vierte Strahl $P'M'$ aus P' bestimmt den Punkt S', der entsprechende Parallelstrahl den unbekannten Punkt L'. Es muss aber werden

$$(U'V'H'S') = (U'V'S'L')$$

Daraus folgt, da man zwei willkürliche Punktepaare jeder Reihe vertauschen darf,

$$(U'V'H'S') = (V'U'L'S').$$

Legt man beide Punktreihen auf einander, so dass V' und U' der zweiten Reihe mit U' und V' der ersten zur Deckung kommen, so fällt auch S' der zweiten auf S' der ersten, weil $U'S' = V'S'$. Dann sind aber drei Paare entsprechender Punkte zur Deckung gelangt, deswegen muss dies auch für das vierte Paar L' und H' eintreten; oder es ist $S'H' = S'L'$, d. h. die mit dem Durchmesser $P'M'$ parallele Asymptote von a' geht durch denjenigen Punkt L' der $H'F'$, dessen Abstand von H' durch $P'M'$ halbirt wird.

In übereinstimmender Weise findet man die Hyperbel b' als geometrischen Ort des Punktes B', welcher auf einem Strahle f' dem Schnittpunkte F' desselben mit der Geraden $H'F'$ in Bezug auf den Kegelschnitt k' conjugirt ist.

22) Diese Hyperbeln schneiden sich in vier Punkten, wovon zwei im unendlich fernen Punkte der gemeinschaftlichen Asymptote, welche durch H' geht, liegen, zwei die Punkte T'_1 und T'_2 sind. Auf den durch T'_1 und T'_2 gehenden zur Hauptebene senkrechten Geraden fallen nun die beiden auf e' und k' bezogenen Involutionen ganz ineinander, also auch deren Doppelpunkte auf e' und k', oder die Geraden gehen durch die reellen oder imaginären Schnittpunkte von e' und k'. Diese Construction liefert daher die gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte, bei denen zwei Hauptaxen in eine Gerade fallen, ebenso wie sie die Chordale zweier Kreise lieferte.

23) Schneidet man einen Strahl f', etwa $F''F'$, mit a', was immer, da f' mit einer Asymptote von a' parallel, in zwei reellen Punkten geschieht, von denen der eine unendlich fern, der andere der im Allgemeinen in endlicher Entfernung liegende Punkt A'_1 ist, legt die Gerade $H'A'_1$, welche a' in den beiden Punkten A'_1, A'_2 und b' in B'_1, B'_2 trifft, so sind die durch diese Punkte A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 gehenden Geraden f' solche, deren Involutionen in Bezug auf e', bezüglich k' sich aus H' auf einander projiciren, weil einerseits der in der Hauptebene liegende und der darauf senkrechte Strahl und andererseits die Strahlen $H'F'$ und $H'A'$ zwei conjugirte Punktepaare auf denselben bestimmen. Daher projiciren sich auch die auf diesen vier Strahlen f' liegenden, in unserem Falle imaginären Doppelpunkte aus H' aufeinander. Die zweiten Projectionen der vier Strahlen, nämlich A''_1, A''_2 und B''_1, B''_2 liefern die Strahlen aus E'' und K'', welche die vier gesuchten Punkte N''_1, N''_2, N''_3, N''_4 der Curve c'' bestimmen.

Man bemerkt, dass c'' auch die zweite Projection des Durchschnittes der Kegel Ea' und Kb' ist, welche die Mittelpunkte E, K und die Leitlinien a', b' besitzen, mit dem einzigen Unterschiede, dass die erstere Curve

theilweise Projectionen imaginärer Punkte, letztere nur die von reellen enthält.

Es ist selbstverständlich, dass zur Bestimmung der Durchschnittspunkte A'_1, A'_2 der Geraden $H'A'$ mit der Hyperbel a' die letztere leicht durch einen Kreis ersetzt werden kann, sowie die Hyperbel b' zur Bestimmung der Punkte B'_1, B'_2. Ebenso können die Kegelschnitte e' und k' zur Bestimmung ihrer Durchschnittspunkte E'_1, E'_2 und K'_1, K'_2 mit der Geraden $H'E'_1$ durch Kreise ersetzt werden.

24) Die Erklärung der Erscheinung, dass die Projection imaginärer Punkte der Schnittcurve c auf die Hauptebene reelle Punkte des Kegelschnitts c'' sind, auf dem sich auch die Projectionen der reellen Punkte befinden, liegt darin, dass jeder Punkt von c'' die Projection zweier Punkte von c ist, welche die gemeinsamen Doppelpunkte der auf den projicirenden Geraden befindlichen beiden Involutionen sind, die durch die conjugirten Punkte in Bezug auf die Kegel ε und $\varkappa$ gebildet werden. Werden diese Doppelpunkte imaginär, so sind sie als Doppelpunkte conjugirte imaginäre Punkte, welche auf einer reellen Geraden liegen. Die Punkte N sind aber die Punktprojectionen dieser reellen Geraden, also selbst reell.

25) Die Asymptoten von c'' sind nicht immer die Projectionen reeller Asymptoten von c. Sind sie es, so findet man sie bekanntlich als Durchschnitte der Tangentialebenen an die Kegel ε und $\varkappa$, welche nach solchen Erzeugenden berühren, die unter einander parallel sind. Diese Erzeugende findet man aber, indem man den einen Kegel parallel mit sich selbst so verschiebt, dass er mit dem anderen concentrisch wird. Haben dann diese Kegel vier, zwei oder keine reelle Erzeugende gemein, so hat c vier, zwei oder keine reelle Asymptoten. In unserem Falle besitzt c deren zwei, welche sich als eine Asymptote von c'' projiciren, während die zweite von c'' wieder die Projection eines Paares conjugirter imaginärer Asymptoten von c ist. Um diese zu finden, bedenke, dass die zweite Projection des Schnittes der Kegel Ea' und Kb' mit c'' übereinstimmt, und suche die Asymptote dieses Schnittes in der bezeichneten Weise, wie es in Fig. 8 ausgeführt ist.

26) Zweite Auflösung der Aufgabe in Nr. 17. Wenn man die beiden Kegel ε und $\varkappa$ mit gemeinschaftlicher Hauptebene, deren Durchschnittslinie c gesucht wird, dahin ändert, dass an den Leitlinien e' und k' die beiden auf der Hauptebene senkrechten Axen, die wir die zweiten nennen wollen, sich in gleichem Verhältnisse verändern, während die ersten ungeändert bleiben, so bemerkt man, dass die zur Hauptebene senkrechten Sehnen von c sich in demselben Verhältnisse ändern, während die zweite oder die Projection auf die Hauptebene, nämlich c'', ungeändert bleibt. Führt man diese Aenderung so weit, dass die zweiten Axen von e' und k' unendlich gross werden, so gehen die Kegelflächen in zwei Paare zur

Hauptebene senkrechter Ebenen über, welche die bisherigen Umrisse der zweiten Projection derselben projiciren, und c wird zu den vier auf der Hauptebene senkrechten Geraden, welche die vier Schnittpunkte dieser Umrisse projiciren.

Führt man die Aenderung der beiden zur Hauptebene senkrechten Axen von e' und k' noch weiter, so werden dieselben imaginär; denn die Scheitel der fraglichen Axen sind Doppelpunkte einer Involution. Lässt man einen Punkt Z derselben fest und den conjugirten Z' sich von dem Mittelpunkte der Involution und des Kegelschnitts aus durch Z ins Unendliche gehen, so sind die beiden, die Involution bildenden Punktreihen entgegengesetzt und die Doppelpunkte stets reell. Die in dieselben fallenden Scheitel der zweiten Axe des Kegelschnitts bewegen sich dabei mit ihnen vom Mittelpunkte bis ins Unendliche. Von hier an geht aber Z' auf die andere Seite des Mittelpunktes über, die Punktreihen werden gleich gerichtet und die Doppelpunkte und Scheitel imaginär. Die Ellipse geht dabei in eine Hyperbel über. Nennt man nun die ideelle Axe einer Hyperbel die Strecke zwischen denjenigen conjugirten Punkten auf der imaginären Axe, welche gleich weit von dem Mittelpunkte entfernt sind — und nennen wir diese Punkte auch die ideellen Doppelpunkte der auf derselben Geraden befindlichen Involution —, so nimmt die ideelle Axe bei der weiteren Bewegung des Z' von unendlich gross an ab, bis sie zu Null geworden ist. Die Veränderung der auf der Hauptebene senkrechten Axen der Kegelschnitte e' und k' ist eine verhältnissmässige, wenn das Verhältniss der ideellen Axen der Hyperbeln dasselbe, wie das der ursprünglichen Ellipsen bleibt.

27) Es leuchtet nun ein, dass auch der Schnitt der beiden Kegelflächen, welche zu Leitlinien Hyperbeln haben, die durch verhältnissmässige Aenderung der zweiten Axen der ursprünglichen elliptischen Leitlinien entstanden sind, eine Durchschnittslinie bilden, welche mit der Durchschnittslinie der ursprünglichen Kegel ε und $\varkappa$ dieselbe Projection c'' auf die Hauptebene besitzt, mit dem einzigen Unterschiede, dass bei der ersteren diejenigen Theile die Projectionen conjugirter reeller Punkte sind, welche bei letzteren Projectionen conjugirter imaginärer Punkte darstellen, und umgekehrt.

Um dies aber über jeden Zweifel zu erheben, nehme man die ideellen Axen der Hyperbeln gleich den in ihre Richtung fallenden reellen der Ellipsen und beachte, dass dann auf einer ausserhalb der reellen Axe $R'S'$ liegenden zur Hauptebene senkrechten Geraden f' die reellen Doppelpunkte der Involution in Bezug auf die Hyperbel mit den ideellen derselben in Bezug auf die Ellipse zusammenfallen. Erstere sind die reellen Schnittpunkte mit der Hyperbel und können auch erhalten werden als die Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen, welche zwei die Curve er-

zeugende Strahlenbüschel auf der Geraden bilden. Scheitel dieser Büschel sind zwei Punkte der Hyperbel, als welche wir die reellen Scheitel R', S' derselben wählen wollen. Die drei entsprechenden Strahlenpaare seien aus R' die Parallelen mit den Asymptoten und die Tangente in R', aus S' daher ebenfalls die Parallelen mit den Asymptoten und $S'R'$. Die mit den Asymptoten parallelen Strahlen gehen aber durch je einen Scheitel der zweiten Axe der Ellipse e'. Jene Punktreihen auf f' haben wegen ihrer entgegengesetzten Richtung zwei Doppelpunkte, die wegen der Symmetrie jeder durch drei Punkte bestimmten Reihe in Bezug auf die Hauptebene gleich weit von derselben abstehen. Dieselben sind auch die Doppelpunkte der Involution auf f' in Bezug auf die Hyperbel.

Da R' und S' auch Scheitel der Ellipse e', so bestimme man auch e' durch Strahlenbüschel aus R' und S'. Ist S' derselbe Büschel wie der eben betrachtete, so sind die Strahlen aus R' diejenigen nach den Scheiteln der zweiten Axe und die Tangente in R'. Man erhält ihn aus dem früheren aus R' durch Umdrehung desselben um die in der Hauptebene gelegene Hauptaxe. Dadurch dreht sich auch die eine der Punktreihen in f' um, während die andere bleibt. Die Punktreihen werden dadurch gleichgerichtet und die in den reellen Doppelpunkten vereint gewesenen Punkte werden zu den ideellen Doppelpunkten der in f' befindlichen Involution.

28) Construirt man nun die Hyperbel e'_1, welche die erste Axe mit der Ellipse e' gemein hat und deren ideelle Axe mit der zweiten von e' zusammenfällt, und construirt die Hyperbel k'_1, welche in derselben Weise von der Ellipse k' abhängt (Fig. 8), so ergiebt sich leicht, dass der Durchschnitt der Kegel Ee_1 und Kk_1 den Kegelschnitt c'' zur zweiten Projection hat. Denn wenn die auf einer Geraden f befindliche Involution in Bezug auf die Hyperbel e'_1 aus H' perspectivisch ist mit der auf einer anderen Geraden f' befindlichen Involution in Bezug auf k'_1, so ist auch die auf der ersteren f' befindliche Involution in Bezug auf e' aus H' perspectivisch mit der auf der zweiten f' befindlichen Involution in Bezug auf k'. Ist nämlich das Erstere der Fall, so projiciren sich die reellen Doppelpunkte auf beiden f', d. h. ihre reellen Schnittpunkte mit e_1', bezüglich k'_1 aus H' auf einander; mit diesen reellen Punkten fallen aber die ideellen Doppelpunkte der beiden Involutionen in Bezug auf e', bezüglich k' zusammen; dieselben liegen daher ebenfalls perspectivisch aus H'. Und ist letzteres der Fall, so projiciren sich zwei Paare conjugirter Punkte — die ideellen Punkte, sowie Mittelpunkt und unendlich ferner Punkt —, also auch die ganzen Involutionen aus H' auf einander. Die beiden Geraden f' sind also derart, wie sie die Auflösung verlangt (23).

Daher liefert jeder Strahl aus H' in seinen Schnittpunkten mit e'_1 zwei Punkte C'_1, C'_2, und in seinen Schnittpunkten mit k'_1 zwei solche D'_1, D'_2, welche auf die Hauptebene nach A''_1, A''_2 und B''_1, B''_2 projicirt, zwei

Strahlenpaare aus E'' und K'' bestimmen, deren Durchschnitte vier Punkte N'' von c'' sind.

Zugleich bestimmen die beiden reellen Schnittpunkte J'_1, J'_2 von e'_1 und k'_1 die den beiden Ellipsen e' und k' gemeinsame, keine reellen Punkte derselben enthaltende Sehne.

Aendert man die ideellen Axen der Hyperbeln e'_1 und K'_1 verhältnissmässig, so ändert sich c'' nicht.

Wäre eine der Leitlinien e, k eine Ellipse, die andere eine Hyperbel, so würde die durch proportionale Aenderung der zweiten Axen daraus gebildete Hyperbel und Ellipse die Punkte von c'' liefern, welche die ursprünglichen Kegel nicht unmittelbar ergeben.

29) Zweites Beispiel der Aufgabe in Nr. 16. Die Projection des Durchschnitts zweier Flächen zweiter Ordnung mit gemeinschaftlicher Hauptebene auf die letztere zu construiren, und zwar insbesondere diejenigen reellen Punkte jener Curve, welche nicht mehr die Projectionen reeller Punkte der Durchschnittscurve sind.

Erste Auflösung. Jede zur Hauptebene senkrechte Hülfsebene schneidet die beiden gegebenen Flächen in Kegelschnitten, welche vier Punkte gemein haben, von denen je zwei zu der Hauptebene symmetrische sich auf diese in einen Punkte projiciren. Sind von den beiden gemeinsamen Punktepaaren beider Kegelschnitte eines oder beide imaginär, so findet man die eine oder die beiden Geraden, welche diese conjugirten imaginären Punktepaare tragen, bestimmt durch die beiden Schnittpunkte der Hülfshyperbeln, welche wie die a' und b' in 20 construirt werden.

Zweite Auflösung. Diese eine oder beide Geraden können auch gefunden werden, indem man nach 28 zu den beiden Kegelschnitten diejenigen sucht, welche mit ihnen die Axen in der Hauptebene gemein haben, während die darauf senkrechten Axen der Grösse und Lage nach mit denen jener Kegelschnitte übereinstimmen, aber den Charakter von reell in ideell oder umgekehrt umtauschen. Die reellen Schnittpunktpaare der letzteren Kegelschnitte bestimmen dann die gesuchten Geraden.

Carlsruhe, 9. Mai 1867.

XVII.

Beiträge zur Geschichte der Fortschritte in der elektrischen Telegraphie.

Von

Professor Dr. Eduard Zetzsche.

V. Die unterseeische Telegraphie.

(Erste Abtheilung.)

Nach einem Jahrzehent rastloser Anstrengungen und unter Aufwendung der höchsten wissenschaftlichen und technischen Leistungen, sowie sehr beträchtlicher Geldmittel ist im verflossenen Jahre ein Werk glücklich vollendet worden, welches in seinem Verlauf einen neuen Beleg dafür bietet, dass selbst wiederholte Misserfolge die Ausdauer und erfinderische Thatkraft des menschlichen Geistes nicht zu lähmen vermögen, und welches ebensowohl als einer der herrlichsten Erfolge des menschlichen Fleisses, wie wegen der vielseitigen und bedeutungsvollen Folgen, die sich an seine Vollendung knüpfen, mit markiger Schrift in das Jahrbuch glänzender Schöpfungen eingetragen zu werden verdient. Für die Männer, welche mit beharrlicher und ausgiebiger Erfindungsgabe schlüsslich alle Schwierigkeiten, so unüberwindlich und erdrückend dieselben auch erscheinen mochten, glücklich zu besiegen wussten, bleibt der zur telegraphischen Verbindung der alten und neuen Welt durch den atlantischen Ocean gelegte Draht (selbst wenn er vielleicht nach wenigen Jahren durch einen neuen ersetzt werden müsste) für alle Zeiten ein rühmliches Denkmal; ermüdend aber und dazu überflüssig wäre es, den Nutzen aufzuzählen, welcher dem geistigen Verkehre und der Wissenschaft nicht minder, als dem Geschäftsleben aus der Ermöglichung eines bezüglich des Zeitaufwandes fast unmittelbaren Gedankenaustausches zwischen Europa und Amerika *nothwendig* erwachsen muss. Hielten sich doch beide Häuser des nord-

amerikanischen Congresses für verpflichtet, Cyrus W. Field in New-York, dem Hauptförderer des grossen Unternehmens, die höchste Ehre, eine Dankmedaille zuzuerkennen.

Die telegraphische Ueberbrückung des atlantischen Weltmeeres bildet zugleich gewissermaassen den Schlussstein in der Entwickelungsgeschichte der unterseeischen Telegraphie. Wenn es daher jetzt an der Zeit ist, in den nächstfolgenden Blättern einen Blick auf die Geschichte dieses Zweiges der elektrischen Telegraphie zu werfen, so mögen nach einem allgemeinen geschichtlichen Ueberblick zunächst die unterseeische Leitung, ihre Herstellung und Versenkung, darauf die bei unterseeischen Linien angewandten Apparate ausführlicher besprochen werden und zum Schluss die Vorgänge bei der Legung des atlantischen Telegraphenseils eingehender geschildert werden.

I. Geschichtlicher Ueberblick.

Beim Bau von Telegraphenlinien musste sich je nach der Oertlichkeit früher oder später von selbst die Nothwendigkeit einstellen, mit einer Telegraphenleitung einen Fluss, einen See oder ein Meer zu überschreiten, und in der That scheinen die ersten Versuche zur Ueberschreitung eines Flusses bereits in eine Zeit zu fallen, wo auch die Landleitungen noch keineswegs eine nennenswerthe Ausdehnung erlangt hatten, und diess ist um so weniger zu verwundern, weil an den betreffenden Oertlichkeiten eben nur mit Ueberschreitung grösserer Flüsse Telegraphenleitungen angelegt werden konnten. Die durch fliessende oder stehende Gewässer verursachten Schwierigkeiten im Bau von Telegraphenlinien hat man durch verschiedene Mittel zu überwinden gesucht.

Obschon man das Wasser als einen Leiter der Elektricität kannte, wurden doch in England, Amerika und Indien Versuche angestellt, mit nicht isolirten, in das Wasser eingelegten Drähten durch das Wasser hindurch zu telegraphiren. In England versenkten Edward Highton und sein Bruder blose Drähte in Canäle, um das Gesetz für den Verlust der Elektricität bei nicht isolirten Leitern zu erforschen (*Higthon, the electric telegraph:* London 1852, S. 161); dabei machten sie zwar mit Leichtigkeit Mittheilungen auf eine Entfernung von etwa ¼ englische Meile*), überzeugten sich aber, dass man ohne Isolirung nicht in irgend eine beträchtliche Ferne telegraphiren könne. Aehnliche Versuche stellten Wright und Bain am 3. Juni 1842 auf dem Serpentine River im Hydepark in London an (Dingler, polytechnisches Journal 85, S. 348). In Ostindien legte Dr. O'Shaughnessy nicht isolirte Drähte durch einen über eine englische

*) 1 British oder Statute mile = 5280 engl. Fuss = 1,61 Kilometer = 0,217 deutsche Meilen; oder 1 deutsche Meile = 4 Knots oder Nautical miles (Seemeilen) = 4,6 engl. Meilen = 7,407 Kilometer. Die London oder English mile, nach welcher in England im bürgerlichen Leben häufig gerechnet wird, hat nur 5000 Fuss.

Meile breiten Fluss (*Higthon*, *electric telegraph* S. 161) und fand, dass durch eine so lange nicht isolirte Leitung auf seinem telegraphischen Instrumente nur ein Strom von 250 galvanischen Elementen sichtbare Zeichen hervorbringen konnte, und dieser kaum. Hierher scheint endlich noch der in Dingler's Journal (Bd. 105, S. 314, aus *Moniteur Industriel* 1847, Nr. 1146) erwähnte, 1847 auf der Insel Wight ausgeführte Versuch mit einem Nott-schen Telegraphen zu gehören, wobei zwischen dem östlichen und westlichen Ufer der Bucht zu Cowes ein einfacher Eisendraht durch das Wasser gelegt war und das Wasser den Strom ohne die mindeste Schwächung an die Quelle zurückführte; dieser Draht reichte vom Hôtel Medina bis zu dem ½ englische Meile davon entfernten Hôtel de la Fontaine.

Auch ganz ohne Draht hat man wiederholt durch Flüsse und Seen hindurch zu telegraphiren versucht. So Morse 1842 in Amerika, in einem 80 Fuss breiten Canale und in dem fast 1 englische Meile breiten Flusse Susquehanna (Dingler's Journal 99, S. 54; *Laboulaye*, *dictionnaire des Arts et Manufactures*, *Paris* 1847, S. 3578; Karsten, Fortschritte der Physik II, S. 531). Später Dr. Gintl im Meerbusen von Triest und noch 1859 J. B. Lindsay in Dundee (Wieck, deutsche Gewerbezeitung 1859, S. 225) Ueber den jüngsten Vorschlag vrgl. Zeitschr. d. österr. Ing.-Ver. 1867, S. 40.

Kleine Flüsse konnte man mit der grössten Leichtigkeit mit einer Luftleitung überschreiten, welche man auf entsprechend hohen Masten aufhing. Je breiter aber ein so zu überschreitender Strom ist und mit je grösseren Schiffen er befahren wird, desto schwieriger wird nicht nur die Herstellung einer solchen, den Winden, Regen, Hagel- und Schneestürmen ausgesetzten Luftleitung mit Rücksicht auf die erforderliche Festigkeit, sondern desto stärker und höher müssen auch die Masten werden, wenn die auf ihnen ausgespannten Drähte nicht Beschädigungen durch die Schiffsmasten ausgesetzt sein sollen. Die häufig eintretenden Unterbrechungen liessen solche Leitungen in Amerika als sehr kostspielig erscheinen (*Shaffner*, *the telegraph manual*, *New-York* 1859, S. 599) und abgesehen von den Kosten der Wiederherstellung und dem Ausfall in der Einnahme blieb bei ihrer Anwendung eine höchst lästige Unsicherheit in dem telegraphischen Verkehre. So knickte am 27. November 1850 ein plötzlicher Wirbelwind die Masten des kurz vorher fertig gewordenen Mississippi-Ueberganges von ihren mit Eisen beschlagenen unteren Enden ab und führte einzelne Stücke davon mehrere englische Meilen weit fort. Im Januar 1851 aber wurde der eine Mast des Ohio-Ueberganges abgebrochen; kaum war er wieder hergestellt, so schnitten Böswillige den Tennessee-Uebergang durch; einige Tage später zerstörte ein Orkan den einen Mast am Illinois-Ufer des Ohio und einige Wochen später brach ein Sturm den 307 Fuss hohen Mast am Kentucky-Ufer entzwei. Trotz dieser Schwierigkeiten sind sowohl in Europa, als in Amerika über bedeutende Flüsse Luftleitungen gespannt worden. So wurde 1848 die 1200 Fuss

breite Elbe bei Hamburg mit einem vierfachen, stark zusammengedrehten, nicht geglühten Stahldrahte auf 160 Fuss hohen Masten überspannt (Steinheil, die galvanische Telegraphie Deutschlands; Abhandl. der Münchener Akademie der Wissenschaften V. Bd. III. Abth. S. 793; etwas abweichende Angaben macht *Shaffner*, *telegraph manual* S. 659) mit einem Aufwande von 6000 Mark. Der Uebergang über den Niemen bei Kowno hat 1700 Fuss Breite von Mast zu Mast, während der Fluss nur halb so breit ist. Aehnlich wurde die Dwina bei Dünaburg, die Weichsel in Preussen, die Donau bei Peterwardein in 1000 Fuss und der Po bei Borgoforte in 1096 Fuss Breite überspannt. Die Leitung über die Save bei Belgrad und Semlin hat 220 Ellen Spannweite, 16 Fuss Pfeilhöhe, 15½ Ctr. Horizontalzug im Scheitel und besteht aus 20 einzelnen Drähten mit 24—26 Ctr. Tragfähigkeit. 1863 wurde der Rhein bei Bingerbrück von der Ruine Ehrenfels nach der Elisabethhöhe mit einem hartgezogenen Stahldraht von 3 Millimeter Durchmesser überspannt (Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins 10, S. 255—262). Grösser sind die Flussübersetzungen in Amerika (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 662 flg.). Auf der Versuchslinie Washington-Baltimore wurde 1845 der Susquehanna überschritten. Nach Zerstörung der 1845 durch den Hudson gelegten Leitung wurde unter der Leitung von Henry J. Rogers über den 2700 Fuss breiten Hudson eine Luftleitung gespannt, deren Drähte man, so oft ein Schiff an der Stelle den Fluss passiren wollte, in das Wasser niederliess und später wieder in die Höhe zog. Henry O'Reilly baute im Westen mehrere Flussübergänge von 1000—3000 Fuss Breite; so über den Ohio bei Wheeling 1300 Fuss breit; über den Ohio bei Louisville, 2100 Fuss vom Indiana-Ufer bis zu einer Insel und von dieser 1300 Fuss bis zum Kentucky-Ufer; anfangs sollte ein Seil aus 3 Drähten Nr. 18 gespannt werden, konnte aber nicht hoch genug gehoben werden, da die Schornsteine der Schiffe 90 Fuss über Deck emporragten, und deshalb wurden einzelne Pianoforte-Stahldrähte benutzt, welche zwar hoch genug aufgezogen wurden, aber oft rissen, so dass man schliesslich Eisendraht Nr. 16 mit sehr gutem Erfolg hier und bei allen folgenden Uebergängen benutzte. Der Wabash ward bei Vincennes, der Ohio bei Maysville und bei Parkersburg, der Niagara bei Buffalo, der St. Lawrence bei Montreal, der Mississippi bei Hannibal und die schmaleren Buchten des Meerbusens bei Neuorleans überschritten. Bei St. Louis ist der nicht schiffbare, 2700 Fuss breite Arm des Mississippi vom Illinois-Ufer bis zur Insel Bloody und ebenso von da der 2200 Fuss breite Arm bis zum St. Louis-Ufer überspannt; der Mast auf dem Illinois-Ufer ist 160 Fuss hoch, auf der Bloody-Insel 185 Fuss, auf dem St. Louis-Ufer steht ein Thurm von gleicher Höhe. 1849—1850 überschritten Shaffner und Mac Afees innerhalb 100 englischer Meilen den Mississippi bei Cape Girardeau in Missouri bei 2980 Fuss Breite auf 210 und 205 Fuss hohen Masten, den Ohio bei Paducah auf drei 307, 215

und 205 Fuss hohen Masten in Abständen von 2400 und 3720 Fuss, den 2300 Fuss breiten Tennessee nahe bei Paducah auf 90 und 160 Fuss hohen Masten und den Cumberland mit einer Breite von 1850 Fuss. Die Aufrichtung des grossen Mastes am Ohio und die Aufhängung des Drahtes beschreibt Shaffner im *telegraph manual* S. 664—667.

Wo man ein stehendes oder fliessendes Wasser nicht mit einer Luftleitung überspannen konnte, war man demnach darauf angewiesen, eine isolirte Leitung durch das Wasser zu legen. Die Herstellung einer solchen submarinen oder unterseeischen Leitung fällt nahe zusammen mit der Herstellung einer unterirdischen Leitung und setzt nothwendig das Vorhandensein eines im Wasser nicht zerstörbaren isolirenden Materials voraus. Schon Wheatstone legte (1839) bei seinen ersten Telegraphenleitungen an der Great-Western-Bahn die gut isolirten Drähte in gusseisernen Röhren theils über, theils unter der Erde (Poggendorff, Annalen 58, S. 410). Jacobi legte 1842 bei der 9030 Fuss langen Leitung auf dem Admiralitätsplatze in St. Petersburg die mit Zwirn übersponnenen, darauf in eine heisse Mischung von Wachs, Harz und Talg getauchten, nochmals besponnenen und wieder mit demselben Mastix bestrichenen Drähte in Glasröhren (Poggendorff's Annalen 58, S. 411; 66, S. 211) und auch die 1843 gebaute Linie St. Petersburg-Zarsko-Selo war eine unterirdische und durch Harz isolirt (Poggendorff's Annalen 66, S. 208; Polytechn. Centralblatt 1844, IV, S. 220). Ausserdem legte man vor dem Bekanntwerden der Guttapercha die unterirdischen Leitungen oft in Furchen in Holzbohlen und füllte diese Furchen mit einem Gemisch aus Gyps, Ziegelstaub, Talg und Pech aus, während die Drähte selbst mit Baumwolle umwickelt und mit Talg, Wachs und Harz überstrichen waren. Kautschuk bewährte sich nicht, reine Guttapercha auch nicht und Erdharz ebenso wenig, weil es rissig wurde und sich zersetzte. Es ist bekannt, dass man in Europa anfangs vulkanisirte (oder geschwefelte, d. h. im warmen Zustande mit Schwefelstaub versetzte) Guttapercha als Isolationsmittel anwandte, welche sich anfangs zwar gut bewährte, bald aber sich gerade wegen der Beimischung des Schwefels als unbrauchbar erwies, selbst wenn man die Drähte in Cementschichten, oder in Ziegelcanäle, oder in Bleiröhren, oder in Dränageröhren oder in Eisenröhren einlegte, so dass man von den trotz ihrer hohen Anlagekosten seit 1848 in grösserer Ausdehnung angelegten unterirdischen Leitungen (Preussen besass davon Ende 1849 etwa 300 und Oesterreich Ende 1850 etwa 160 deutsche Meilen) zu den Luftleitungen zurückkehren musste und erstere höchstens etwa bei Leitungen in Städten beibehalten konnte. Aehnlich ging es in Russland mit der Leitung von St. Petersburg nach Moskau. Bessere Erfolge erzielte man in England an den mit Guttapercha oder Theer, Talg und Harz isolirten und in hölzernen, thönernen oder eisernen Röhren gelegten Drähten (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 589 flg.; Lardner, Lehre v. d. elektr. Telegr., Weimar 1856, S. 80 flg.).

In neuerer Zeit macht man unterirdische Leitungen ganz ähnlich, wie unterseeische, nur lässt man die äussere Schutzhülle aus Eisendrähten weg und legt die Leitung dafür in eiserne Röhren. Ueber mehrere neuere Vorschläge vergleiche *Du Moncel*, *traité de télégr. electr.*, *Paris* 1864, S. 291. In Amerika legte man 9 englische Meilen von Baltimore Kupferdrähte Nr. 16, mit Baumwolle und Schellack überzogen, in Bleiröhren, vertauschte sie aber 1844 unter Morse's Führung mit einer Luftleitung (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 587). Dr. O'Shaughnessy baute 1851 mit Erfolg auch eine unterirdische Leitung von Calcutta nach Bishtapore, 12 englische Meilen lang, und zwar schweisste er aus 13½ Fuss langen Rundeisenstäben 200 Fuss lange Stücken zusammen und stellte dann aus diesen die Leitung her; die Stäbe wurden spiralförmig umwickelt mit zwei Lagen von Madraszeug, das mit geschmolzenem Pech und Theer getränkt war; jede Lage war 2½ Zoll dick. Das Ganze wurde in halbrunde Dachziegel gelegt, welche halb mit einem Gemisch aus 3 Gewichtstheilen trockenem, ausgewaschenem Sande und 1 Theil Harz ausgefüllt waren, und darauf wurde die ganze Rinne mit demselben Gemisch vollends ausgefüllt (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 595 und 799).

Eine wirkliche unterseeische Leitung scheint zuerst Dr. O'Shaughnessy in Hindostan ausgeführt zu haben, welcher im April und Mai 1839 in der Nähe von Calcutta eine 21 Meilen lange Versuchslinie baute, welche auch 7000 Fuss Flussleitung enthielt (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 799; *Highton*, *electr. telegr.* S. 33). Diese Leitung dürfte nicht mit der oben (S. 393) erwähnten nicht isolirten Flussleitung zusammenfallen, sondern durch den Hugli (Hoogly, Hooghley), den Arm des Ganges, an welchem Calcutta liegt, gelegt worden sein und zwar als isolirte Leitung, indem der Draht zuerst mit getheertem Bindfaden umwickelt, darauf in gespaltenes indisches Rohr eingeschlossen und dieses wieder mit getheertem Faden umwickelt wurde. Von diesen Versuchen gab das Journal der *Asiatic society* Nachricht (vergl. Wieck's deutsche Gewerbezeitung 1857, S. 157). Shaffner erwähnt zugleich, dass 1852 der Hugli und Huldi erfolgreich überschritten wurden, um Calcutta mit dem Meere in Verbindung zu setzen.

1840 legte Wheatstone dem englischen Unterhause einen Plan vor, zur Verbindung von Dover und Calais ein Telegraphenseil durch den Canal zu versenken.

1842 legte Morse einen isolirten (?) Kupferdraht im Hafen von New-York (*The atlantic telegraph*, *London* 1866, S. 108; Wiener Zeitung vom 26. Mai 1857 aus *Moniteur de Paris*) und im August 1843 regte er in einem Briefe an den Schatzsecretär der Vereinigten Staaten die unterseeische Verbindung Amerikas und Europas an (Delamarche, Elemente der unterseeischen Telegraphie, Berlin 1859, S. 68).

Hier mögen ferner die in den Jahren 1838—1843 in England angestellten Versuche, Sprengungen unter Wasser mittelst der Elektricität zu bewirken,

erwähnt werden; dabei dienten zwei mit Garn und einer wasserdichten Composition überzogene Drähte als Elektricitätsleiter, sie waren durch einen anderthalbzolligen, mit derselben Composition getränkten Strick von einander getrennt; das Ganze aber war wieder mit Garn umwickelt und mit der Composition überzogen (*Civil Engineer and Architects Journal* 1843, S. 337; 1844 S. 251).

1843 wurde die Guttapercha, der eingetrocknete Saft eines auf der Halbinsel Malacca und den Inseln des Indischen Archipels wachsenden Baumes (Isonandra Gutta), durch den Wundarzt Dr. Montgomerie in Singapore bekannt und Prof. Faraday schlug vor, sie zur Isolation von Telegraphendrähten zu benutzen. 1847 wurde in Brooklyn (New-York) eine Guttaperchamanufactur zur Herstellung isolirter Drähte von Samuel T. Armstrong eingerichtet und schon 1848 wurde ein Versuch mit einem mit Guttapercha überzogenen Drahte im Hudson gemacht (*Shaffner, telegr. man.* S. 524) und zwar mit so gutem Erfolge, dass Armstrong noch 1848 im *New-York-Journal of Commerce* den Vorschlag machte, ein Telegraphentau mittelst Guttapercha zu isoliren und durch den atlantischen Ocean zu legen; die Kosten schlug Armstrong auf 3500000 Dollars an. In England und Deutschland fing man etwa gleichzeitig die Guttapercha zur Isolation zu benutzen an.

Bevor jedoch die Guttapercha zur Isolation unterseeischer Leitungen verwendet wurde, war schon am 20. November 1845 von Ezra Cornell durch den Hudson bei Fort Lee, 12 englische Meilen oberhalb New-York, eine Leitung in Bleiröhren gelegt worden (*Shaffner, telegr. man.* S. 662), deren Draht mit Baumwolle umwickelt und mit Kautschuk isolirt war; es waren 2 Taue so hergestellt worden und arbeiteten mehrere Monate sehr gut, bis sie 1846 vom Eis fortgerissen wurden, worauf die oben (S. 395) erwähnte Luftleitung ausgespannt wurde. 1847 aber wurde ein von S. T. Armstrong gefertigter, mit Guttapercha überkleideter Kupferdraht von T. M. Clark und J. W. Nortons für die Magnetic-Telegraph-Company im Hudson versenkt (*Shaffner, telegr. man.* S. 663), aber schon am nächsten Tage von einem Anker zerrissen. Durch die oben (S. 394 flg.) berührten Unfälle der Luftleitungen über den Mississippi und Ohio veranlasst, versenkte Shaffner Eisendrähte Nr. 10 mit drei Lagen von Guttapercha im Mississippi (*telegr. man.* S. 600), von diesen hatte aber das sandige Wasser des Mississippi schon nach kurzer Zeit die Guttapercha abgerieben. Um das Isolationsmittel zu schützen, umgab Shaffner dasselbe mit drei Lagen gut mit Theer getränkter Leinwand, legte auf die Leinwand entlang dem ganzen Seil sechs Drähte Nr. 10 und band diese aller 20 Zoll mit Eisendraht Nr. 16 fest; allein auch dieses Tau dauerte nur wenige Monate; daher entschloss sich Andreas Wade, durch den Mississippi bei St. Louis ein Tau zu legen, bei dem die Guttapercha ringsum mit Eisendrähten belegt war.

Im Juli 1846 stellte Hay im Hafen zu Portsmouth am Bord der Schiffe Pique und Blake und zwischen den Schiffen und dem Lande Versuche mit einem isolirten Drahte an, welcher halb so lang war, als er hätte sein müssen, um vom Admiralitätsgebäude in Portsmouth bis zur Bucht von Gosport zu reichen (Dingler's Journal 102, S. 80 aus Moniteur Industriel 1846, Nr. 1035). Ende November 1846 aber wurde in dem Hafen von Portsmouth eine unterseeische Leitung von Watering-Island im Dock-Yard bis zur Landungstreppe bei Royal-Clarence-Yard auf der Insel Wight gelegt (Polytechn. Centralblatt 1847, S. 108).

Die South-Eastern-Railway-Company beabsichtigte 1847 ein Tau zwischen Folkestone und Boulogne zu versenken (*Civ. Eng. and Arch. J.* 1847, S. 31); im Jahre vorher aber hatte das englische und französische Gouvernement die Erlaubniss zur Legung eines Taues zwischen Cap Gris Nez oder Blanc Nez und South-Foreland ertheilt und an dieses sollte sich ein Tau von Marseille nach Algier anschliessen (*Civ. Eng. and Arch. J.* 1846, S. 160).

Noch vor 1848 soll ferner ein Amerikaner, Colonel Colt, eine kurze unterseeische Leitung von Hellgate nach Fireisland gelegt und auch bei der amerikanischen Regierung um die Geldmittel zu einem Telegraphen zwischen Amerika und Europa nachgesucht haben (Wieck, deutsche Gewerbezeitung 1857, S. 157; Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 155).

Im Jahre 1846 machte W. Siemens in Berlin seine ersten Versuche, den Draht für unterirdische Leitungen mittelst Guttapercha zu isoliren, und 1848 legte er im Hafen zu Kiel in reine Guttapercha eingeschlossene Drähte nach unterseeischen Minen; auch führte er in demselben Jahre einen Draht durch den Rhein von Deutz nach Köln (Poggendorff's Annalen 79, S. 481 flg.). Dieses auf dem Rheinbette liegende Flusskabel wurde anfangs öfter durch die Anker der Schiffe zerrissen oder beschädigt, weshalb Nottebohm einige Fuss oberhalb desselben eine ungemein starke Ankerkette quer durch den Rhein legen liess; die Beschädigungen des Kabels hörten nun auf, aber in der Ankerkette fand man beim Aufheben derselben 14 meist schwere Schiffsanker eingehakt, welche die Schiffer hatten kappen müssen, da sie dieselben nicht wieder aufzuwinden vermochten (Schellen, das atlantische Kabel, Braunschweig 1867, S. 26). Auch in den Canälen von Triest und Venedig wurden 1850 mit vulkanisirter Guttapercha isolirte submarine Leitungen hergestellt und mittelst angehängter Gewichte auf den Boden versenkt, mussten aber ähnlich wie die unterirdischen Linien auf dem Festlande bald wieder aufgegeben werden (Dr. Militzer, die österreichischen Telegraphenanstalten, Wien 1866, S. 7 und 10).

Am 10. Januar 1849 telegraphirte C. V. Walker, der Dirigent der englischen Südwesteisenbahngesellschaft, im Hafen zu Folkestone bei Dover auf einem 2 Meilen langen in das Meer versenkten Kabel (Knies, der Telegraph als Verkehrsmittel, Tübingen 1857, S. 135; Schellen, der

elektro-magnetische Telegraph, 1. Aufl., Braunschweig 1850, S. 293 aus *Civ. Eng. and Arch. J.* 1849, S. 61).

Noch in demselben Jahre erlangte die Pariser Société Carmichael und Comp., an deren Spitze Brett stand, von der französischen Regierung eine Concession mit dem ausschliesslichen Rechte, innerhalb 10 Jahren von England nach bestimmten Punkten der französischen Küste zu telegraphiren; aber unter der Bedingung, die telegraphische Verbindung beider Länder noch vor dem September 1850 herzustellen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 8, 162; *Highton*, *electr. telegr.* S. 157; *Shaffner*, *telegr. man.* S. 607 flg.) Nach einem am 27. August 1850 angestellten, aber durch den Sturm unterbrochenen Vorversuch, bei welchem sich Jacob Brett, Reid und Wollaston auf dem Schiff Goliath befanden (*Mechanics Magazine* 53, S. 196 und 215), legte der Engländer Charles J. Wollaston, der Ingenieur der Submarine-Telegraph-Company, am 28. August 1850 einen 29 englische Meilen langen, einfachen, mit Guttapercha überzogenen Kupferdraht Nr. 14 von Dover nach Calais; John Watkins Brett blieb am Ufer zurück; das Schiff lief am 28. August 10 Uhr von Dover aus und langte um 8½ Uhr bei dem 21 englische Meilen von Dover entfernten Cap Gris Nez an. Die Guttapercha bestand aus drei Lagen und war ¼ Zoll dick; versenkt wurde das Telegraphenseil vermittelst bleierner Klampen von 20—25 Pfund Gewicht, welche in Abständen von je $^1/_{16}$ Meile an dem Seil befestigt wurden. Die grösste Tiefe betrug 30 Faden *). Leider dauerte der Erfolg des nach langen Vorarbeiten und mit gewaltigen Anstrengungen vollendeten Unternehmens nur wenige Stunden; denn die Wellen durchscheuerten das Seil an dem felsigen Ufer bei Cap Gris Nez. Shaffner (*telegr. man.* S. 607) fand bei einem fünf Jahre versenkt gewesenen Stück dieses Seils die Guttapercha noch in ganz gutem Zustande. Da das Tau gut gearbeitet hatte, so blieb die Concession aufrecht erhalten und schon im nächsten Jahre fertigten Robert Stirling Newall & Co. in ihrer grossen Seilerwaarenfabrik in Gateshead am Tyne im Verlaufe von drei Wochen ein neues, 24 englische Meilen langes und 180 Tonnen **) schweres Tau; in diesem befanden sich vier Kupferdrähte Nr. 16, von denen jeder in der unter der Direction von Samuel Statham stehenden Guttapercha-Company in London mit einer doppelten Hülle von Guttapercha überzogen worden war; nachdem nach Newall's Erfindung (*Mechanics Magazine* 57, S. 392) zwischen die vier Drähte getheerte Hanfstricke gelegt waren, wurde das Ganze mit getheerten Hanfstricken spiralförmig eng umwickelt und endlich auf einer grossen, vom Ingenieur Fenwick eigens dazu gebauten Maschine mit einer aus zehn verzinkten Eisendrähten Nr. 1 von $^5/_{16}$ Zoll Dicke bestehen-

*) 1 Faden = 6 Fuss englisch = 5,8268 Fuss preussisch.

**) 1 Tonne = 20 Ctr. = 2240 Pfund Avoir-du-pois = 2032 Zollpfund; 1 Pfund Avoir-du-pois = 0,90720 Zollpfund.

den Metallhülle umwunden. Das Seil selbst kostete 9000 Pfund Sterling und die Gesammtkosten waren auf 15000 Pfund Sterling geschätzt (*Mech. Magaz.* 57, S. 410, mit Abbildung des Taues; *Shaffner*, *telegr. man.* S. 608; Lardner, Lehre von dem elektrischen Telegraphen, Weimar 1856, S. 39; Higthon giebt die Kosten auf 20000 und 75000 Pfund Sterling an). Am 25. September 1851 wurde dieses Seil von Crampton unter Beihülfe Wollaston's versenkt. Zu diesem Behufe war aus dem früheren Kriegsdampfer Blazer die Maschine nebst Schornstein entfernt worden, um Platz für das Tau gewinnen; darauf wurde der Blazer von London nach Dover und am 25. September von Dover nach South Foreland geschleppt, hier das eine Tauende an die englische Küste geschafft und nun der Blazer nach Cap Gris Nez fortgeschleppt. An der französischen Küste wurde das Tau, welches noch um 1 Meile verlängert werden musste, bei Saangate, 1 Meile südlich von Calais gelandet. Obgleich das Tau beim Legen durch Schlingenbildung und die Reibung beim Austritt aus dem Schiffe mehrfach beschädigt wurde, zeigte es sich doch bei der Prüfung gut isolirt (*Highton*, *electr. telegr.* S. 157—159). Mit der glücklichen Legung dieses Taues hatte die Submarine Telegraph Company und überhaupt die unterseeische Telegraphie festen Boden für die Zukunft gewonnen. Highton (*the electr. telegr.* S. 160) theilt mit, es sei schon damals ein zweites, zwischen England und Frankreich zu legendes Tau in Arbeit gewesen.

Das nächste Tau wurde bereits am 1. Juni 1852 zwischen England und Irland, von Holyhead nach Howth, auf Kosten der Herren Newall & Co. gelegt, in deren Fabrik in Gateshead bei Newcastle es in vier Wochen gefertigt worden war, worauf es in 20 Eisenbahnwagen nach Maryport geschafft, dort an Bord der Britannia gebracht und nach Holyhead an der Küste von Wales gefahren wurde. Es enthielt nur 1 Kupferdraht Nr. 16, welcher in der grossen Fabrik von Statham & Co. in London mit zwei Lagen Guttapercha umkleidet worden war; das in die tiefe See kommende Stück dieses Taues war mit einer leichteren Schutzdecke versehen, als die Küstenenden; denn während bei ersterem die Guttapercha nur mit zwölf verzinkten Eisendrähten Nr. 16 umsponnen war, so dass das Seil etwa einen Finger dick war, hatten die Küstenenden desselben eine Hülle von sechs sehr dicken verzinkten Eisendrähten, wodurch es um die Hälfte dicker wurde. Vom Schiff aus wurde das eine Ende des 70 englische Meilen langen und nur 80 Tonnen schweren Taues bei Holyhead befestigt und mit einem Telegraphen verbunden; während nun das Schiff nach dem 60 Meilen entfernten Howth bei Dublin fuhr und dabei das im Schiffsraume sehr sorgfältig aufgewickelte Tau, mehrmals über ein Bremsrad in die See ablaufend, auf den Meeresboden versenkt wurde, unterhielt man vom Ufer aus durch das ganze Tau hindurch eine beständige Correspondenz mit dem Schiffe, da in dessen Kajüte ein zweiter Telegraph aufgestellt war. Durch einen Zählapparat am Bremsrade wurde die abgelaufene Länge des Taues

angegeben. Die Tiefe des Wassers stieg bis 70 Faden, also über das Doppelte der Tiefe zwischen Calais und Dover. Innerhalb 18 Stunden waren 64 Meilen Tau gelegt, 1 Stunde später das Seil an die Küste gebracht, mit der Leitung von Howth nach Dublin verbunden und London und Dublin standen in unmittelbarem Verkehr mit einander. Allein nach drei Tagen versagte das Seil den Dienst, da, wie sich bei dem noch 1852 erfolgten Wiederaufheben des Seils (*Highton*, *electr. telegr.* S. 160) zeigte, ein Schiffsanker nahe an der irischen Küste den Eisendraht zerrissen, das innere Seil aber sehr gedehnt hatte (Lardner, elektr. Telegr. S. 39 und 40; *Shaffner*, *telegr. man.* S. 611). Der Plan zur Verbindung Englands und Irlands war schon 1850 aufgetaucht (*Mech. Magaz.* 53, S. 328).

Am 9. October 1852 machten Newall & Co. noch den Versuch, durch den schmalsten Theil des irischen Canals, zwischen Donaghadee und Port Patrick in Schottland, 21 englische Meilen, ein Tau zu legen. Von dem sechs kupferne Leitungsdrähte Nr. 16 enthaltenden, mit zwölf Eisendrähten Nr. 2 geschützten, 25 englische Meilen langen Tau waren von der Britannia bereits 16 Meilen glücklich gelegt, als eine plötzliche Kühlte die Steuerung in der erforderlichen Richtung unmöglich machte, so dass das Tau in 7 Meilen Entfernung von der irischen Küste gekappt werden musste und 9 Meilen Tau an Bord blieben. Die versenkten 16 Meilen wurden 1854 von Newall wieder heraufgeholt und zeigten sich noch gut erhalten, obgleich stellenweise die Schutzdrähte angefressen waren und an anderen Stellen Zoophyten hingen. Das Aufholen war sehr schwierig, da die Tiefe bis 150 Faden beträgt, und trotzdem ein von einer Dampfmaschine getriebener Apparat am Bord des Dampfers angewendet wurde, dauerte die Arbeit vier Tage, da man wegen der Stärke der Fluth, die sich mit einer Geschwindigkeit von 6 Meilen in einer Stunde bewegte, nur während der Zeit des Hoch- und Tiefwassers arbeiten konnte (*Mech. Magaz.* 57, S. 391; Lardner, elektr. Telegr. S. 41; *Shaffner*, *telegr. man.* S. 612).

In Nordamerika wurde im December 1852 ein von Newall & Co. gefertigtes Tau zwischen dem Vorgebirge Tormentine in Neubraunschweig und Carlton Head auf der Prinz Eduards-Insel im St. Lorenzbusen glücklich gelegt; die Entfernung beider Punkte beträgt 10 englische Meilen. Das Tau enthielt nur einen Leitungsdraht und neun Schutzdrähte; es war dazu bestimmt, einen Theil einer Leitung zu bilden, welche von der Prinz Eduards-Insel nach der St. Pauls-Insel oder der Westküste von Neufundland laufen sollte (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 616; Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 17).

Im Winter 1852—1853 fertigten Newall & Co. in hundert Tagen ein Seil von 70 Knoten Länge zur Verbindung Englands mit Belgien für eine zweite Privatgesellschaft, die sich aber am 21. Juni 1853 mit der Société Carmichael & Co. zur Submarine-Telegraph-Company vereinigte. Dieses Seil enthielt sechs kupferne Leitungsdrähte Nr. 16 in Guttapercha, war

äusserlich durch zwölf Eisendrähte Nr. 2 geschützt, so dass es einen Zug von etwa 50 Tonnen aushalten konnte; es wog 500 Tonnen und kostete 33000 Pfund Sterling; in 70 Stunden wurde es eingeschifft und am 6. Mai 1853 in 18 Stunden zwischen Dover und Mittelkerke bei Ostende gelegt (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 613; Knies, d. Telegraph, S. 136; Zeitschrift d. Tel.-Ver. 1, S. 113; 8, S. 162).

Nach diesem glücklichen Erfolge arbeiteten Newall & Co. in 24 Tagen ein neues Kabel von derselben Dicke und demselben Gewichte, dessen 6 Drähte Nr. 16 indess etwas anders angeordnet waren; es war 25 Meilen lang, kostete 13000 Pfund Sterling und wurde am 23. Juni 1853 für die British and Irish Magnetic Telegraph-Company zwischen Donaghadee und Port Patrick gelegt. An derselben Stelle wurde 1854 zwischen Port Patrick und Whitehead noch ein zweites, fast ganz gleiches Tau von 27 Meilen Länge für dieselbe Gesellschaft versenkt (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 614).

Am 15. August 1853 wurde ferner die schon im Jahre vorher für Ruyssenaers concessionirte (*Civ. Eng. and Arch. J.* 1852, S. 239) Linie Oxfordness-Haag der Electric and International Telegraph Company eröffnet. Durch sie wurden England und Holland mittelst eines von Oxfordness bei Ipswich in der Grafschaft Suffolk nach dem Fischerdorfe Scheveningen, ½ Stunde westlich vom Haag laufenden Taues von eigenthümlicher Construction verbunden. In der tiefen See wurden nämlich in Entfernungen von etwa ½ Meile von einander drei von Newall & Co. gelieferte dünne Seile mit je einem Leitungsdrahte Nr. 16 und einer Hülle von je zwölf Eisendrähten versenkt; das erste im Mai, das zweite im Juni, das dritte im September. Ihre Länge beträgt 119, 118 und 123 englische Meilen. Die beiden Küstenenden aber sind aus sieben solchen dünneren Seilen zusammengedreht, von denen drei mit jenen drei Seilen vereinigt, die anderen vier aber für den späteren Bedarf aufgespart wurden (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 615). Schon am 30. September 1855 wurde hier in 21 Stunden noch ein viertes, 119 Meilen langes, ebenfalls von Newall verfertigtes Kabel gelegt; aber die Landstation vom Haag nach Amsterdam verlegt (Zeitschrift d. Tel.-Ver. 2, S. 62 und 266). Das erste, dritte und vierte Kabel wurden wiederholt von Ankern zerrissen und vor 1861 aufgenommen, während das zweite damals noch gut arbeitete (Zeitung des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen 1861, S. 334; Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 64 und 214). Ferner wurde im September 1858 noch ein 136 Meilen langes, bei Glass, Elliot & Co. gefertigtes Seil zwischen Oxfordness und Haarlem gelegt; es hat vier mit Guttapercha überzogene Kupferdrähte Nr. 13, von denen zwei mit Chatterton's Mischung und jeder wieder mit zehn Eisendrähten Nr. 00 bedeckt ist; 1 Meile wiegt 9¾ Tonnen. Endlich wurde 1862 noch ein von Glass & Co. gefertigtes Tau mit vier Drähten gelegt,

dessen 15 Meilen langes Küstenende 19 Tonnen für 1 englische Meile wog, während das Mittelstück 10¼ Tonnen wog (Deutsche Ind.-Ztg. 1862, S. 302).

Im Jahre 1853 wurden noch drei von Newall & Co. verfertigte Kabel versenkt, nämlich das erste mit vier Drähten, von 6 Meilen Länge und von 8 Tonnen Gewicht auf 1 Meile, im Meerbusen (Firth oder Frith) des Forth in Schottland; das zweite für die Electric and International Company von 2 Meilen Länge mit vier Drähten im Fluss Tay in Schottland; und das dritte im grossen Belt von Korsör auf Seeland über Sprogoe nach Nyborg auf Fünen. Das letztere war 16 englische Meilen lang, hatte drei durch Guttapercha und Garn gut isolirte kupferne Leitungsdrähte Nr. 18, äusserlich aber neun dicke Eisendrähte Nr. 2, wog 5 Tonnen für die Meile und wurde am 7. Mai 1853 gelegt; am 9. Mai folgte die Legung eines Kabels durch den kleinen Belt von Strüb auf Fünen nach Friedericia und am 1. Februar 1854 wurde die Linie Helsingör-Hamburg eröffnet (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 81, 88 und 205; Dingler's Journal 150, S. 430). Von Vedbek bei Helsingör auf Seeland nach dem Edelhof Hillesborg bei Helsingborg in Schweden wurde 1854 ein 2,2 geographische Meilen langes, mit zehn Eisendrähten Nr. 2 umsponnenes Tau mit drei kupfernen Drähten Nr. 16 durch den Sund gelegt (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 284; 2, S. 88). Die Kosten der Legung dieses von Glass, Elliot & Co. in Greenwich gelieferten Taues wurden von der dänischen und schwedischen Regierung gemeinschaftlich getragen. Wassertiefe bis 14 Faden. Gewicht 8 Tonnen für 1 Meile (Zeitung des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen 1861, S. 334). Im Jahre 1863 wurde diese durch Schiffsanker oft beschädigte und ganz zerrissene Leitung durch ein neues, von W. T. Henley in London verfertigtes, vorzügliches Tau mit vier Drähten ersetzt (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 11, S. 203).

Aus dem Jahr 1854 wären noch aufzuführen ein 5 Meilen langes Tau mit sechs Kupfer- und zehn Eisendrähten im Zuydersee in Holland (Lardner, elektr. Telegr. S. 37), und drei für die Electric and International Company gelegte Taue, eins von 1 Meile Länge zwischen Hurst Castle und der Insel Wight von Newall & Co., und zwei 65 Knoten lange zwischen Holyhead und Howth, das erste von Fentor, Hyde & Co., welches nicht arbeitete, das zweite von Newall & Co., welches bis 1859 arbeitete; beide letztere wurden im September 1854 gelegt (Zeitung d. Ver. d. Eisenbahnverw. 1861, S. 334).

Shaffner (*telegr. man.* S. 617) erwähnt unter anderen von Newall & Co. gearbeiteten Tauen auch zwei Flusskabel; nämlich ein 2 Meilen langes und 4 Tonnen schweres Seil mit blos einem Leitungsdrahte und zehn Schutzdrähten, welches bei New-Orleans durch den Mississippi gelegt wurde für den Balize-Telegraphen, und ein ähnliches, durch den Hudson bei New York gelegtes.

Im Jahre 1854 begannen auch die Arbeiten im Mittelmeere. Dieselben nehmen ein höheres Interesse für sich in Anspruch, theils durch die weit grösseren Entfernungen und die grösseren Meerestiefen*), welche mit dem Tau zu überschreiten waren, theils durch die grössere Wichtigkeit der beabsichtigten Linien für den Verkehr. Galt es doch nicht blos Piemont mit der Insel Sardinien und Frankreich mit Corsica und Algier zu verbinden, sondern John Watkins Brett fasste zugleich die Fortführung der Leitung nach Aegypten ins Auge, behufs der Herstellung einer telegraphischen Verbindung zwischen England und Ostindien, und zwar wurde anfänglich die Fortführung der Leitung entlang der Nordküste Afrikas, sehr bald aber auch eine Linie von Sardinien über Malta gerade nach Alexandria beabsichtigt (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 71 und 273; 2, S. 144; 3, S. 94). Die von der französischen und italienischen Regierung ertheilten Concessionen erstreckten sich vom Jahre 1853 auf 50 Jahre; ausserdem garantirte die französische Regierung der zum Bau der Leitung zwischen Europa und Afrika zusammengetretenen Privatgesellschaft, an deren Spitze J. W. Brett stand, eine 4% Verzinsung des Anlagekapitals bis zur Höhe von 4½ Millionen Francs und erhöhte diese Garantie später auf 5%, während die italienische für weitere 3 Millionen Francs 5% garantirte (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 71; 2, S. 143). In ähnlicher Weise stellte die englische Regierung eine jährliche Unterstützung von 5% des auf 120000 Pfund Sterling geschätzten Anlagekapitals für die Leitung nach Malta und Corfu, die Ostindische Compagnie aber eine Zinsgarantie von 5% für das Anlagekapital zu einer Linie nach Ostindien in Aussicht (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 94). Das erste Stück der Mittelmeerlinie, nämlich von Spezzia bei Genua nach Corsica wurde am 24. Juli 1854 innerhalb 12 Stunden von J. W. Brett gelegt; es war bei Glass, Elliot & Co. in einer Länge von 110 Meilen angefertigt worden, enthielt sechs Drähte und glich übrigens dem im Jahre 1853 zwischen Port Patrick und Donaghadee versenkten Seil. Während der Legung überfiel ein heftiger Sturm das Schiff, so dass man eine Zeit lang ein Zerreissen des Seils befürchtete. Zwischen den Inseln Corsica und Sardinien, durch die Strasse von Bonifacio, wurde ein auch bei Glass, Elliot & Co. gefertigtes, 10 Meilen langes und 8 Tonnen für 1 Meile wiegendes Seil mit ebenfalls sechs Kupferdrähten Nr. 16 und zwölf eisernen Schutzdrähten Nr. 1 noch in demselben Jahre gelegt, worauf am 15. April 1855 die Linie von Spezzia nach Sardinien eröffnet wurde (Zeitschrift d. Tel.-Ver. 1, S. 174; 2, S. 115) Im September des Jahres 1855

*) Nach den im Frühsommer 1855 von dem französischen Hydrographen-Ingenieur Daroudeau ausgeführten Sondirungen steigen die Meerestiefen zwischen Sardinien und Afrika bis auf 2000—3000 Meter = 1100—1500 Faden. Das Ausführlichere über die drei vorgeschlagenen Routen vergl. Zeitschr. d. Tel.-Ver. 2, S. 280.

aber machte J. W. Brett den ersten Versuch, Afrika mit der Insel Sardinien von deren südlichster Spitze, dem Cap Spartivento, aus zu verbinden. Das benutzte, 162 Meilen lange Seil enthielt sechs einfache, einzeln mit Guttapercha umhüllte, kupferne Leitungsdrähte, welche mit einer Seele und einer Hülle von Hanf zu einem runden Tau vereinigt und mit zwölf Eisendrähten übersponnen waren. Die Legung begann am 25. September, verlief anfangs ganz glücklich; allein am 26. September lief das Seil in 1640 Meter = 5225 preussische Fuss Tiefe zu schnell ab und musste, da sich Schlingen bildeten, wieder aufgewunden werden; dies ging aber äusserst langsam von Statten und nach einigen Tagen angestrengter Arbeit riss endlich das Seil. Man machte zwar noch den Versuch, den Rest des Seils vom Cap Spartivento aus nach der Insel Galita zu legen; aber auch dies misslang. Brett's Bericht an die französische Regierung enthält die Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereins (2, S. 281). Im August 1856 versuchte Brett, ein 175 Meilen langes Tau mit nur drei Drähten und zehn Schutzdrähten zu versenken, welches blos 5 Tonnen für 1 Meile wog, während das frühere 12 gewogen hatte; nachdem man sehr bedeutende Tiefen (bis über 2000 Meter) glücklich überschritten und sich der Insel Galita bis auf einige Meilen genähert hatte, wurde das Tau am 19. August an einer scharfen Felsenkante durchschnitten (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 152 und 269 flg.). Die französische Regierung hielt trotzdem die der Gesellschaft ertheilte Concession mit einigen Abänderungen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 4, S. 181 flg.) aufrecht und nun übernahmen Newall & Co. für die Gesellschaft der Mittelmeerlinie die Anfertigung und Legung eines Seils mit vier Leitungsdrähten. Jeder dieser Leitungsdrähte bestand aber aus vier dünnen Kupferdrähten; als Umhüllung dagegen hatte das Seekabel achtzehn dünnere, das Küstenkabel zwölf weit stärkere Eisendrähte. Die absolute Festigkeit betrug 8 Tonnen. Im Ganzen waren 162 Meilen Kabel an Bord der Elba, welche die Legung ausführen sollte. Von dem Küstenkabel waren 6 Meilen schon mit dem Seekabel verbunden und 10 Meilen lagen in einem Schiffsraume besonders. Am 5. September 1857 traf die Elba in Bona in Algier ein, von wo aus das Kabel, ohne die Insel Galita zu berühren, nach dem 125 Meilen entfernten Cap Spartivento gelegt werden sollte. Bei der Legung, welche Delamarche (Elemente der unters. Telegr. S. 93—102) ausführlich beschreibt, wurde nach einem Vorschlage von Siemens eine Vorrichtung benutzt, welche einestheils zum Messen der Spannung des Kabels dienen, anderentheils den Einfluss der Schwankungen des Schiffs mildern sollte. Am 7. September Nachmittags brachte man das Ende des Kabels in einer kleinen Bucht beim Fort Gênois ans Land und Abends 7 Uhr segelte die Elba ab, in Begleitung dreier kleiner Kriegsdampfer. Während der Nacht wurden aller 10 Minuten einige Worte durch zwei Drähte des Kabels gewechselt, während die beiden anderen so verbunden waren, dass sie

beständig auf ihre Isolation geprüft werden konnten. Um das Kabel nicht zu schnell auslaufen zu lassen, machte man, jedoch ohne wesentlichen Erfolg, einige Versuche mit Fallschirmen, nämlich mit dreieckigen Stücken Segeltuch, an deren drei Zipfeln dünne Stricke befestigt, unterhalb zusammengeschürzt und mit einer Kugel versehen waren, welche um das Kabel geschleudert wurde. Am nächsten Tage, Abends 11 Uhr, war das Seekabel und auch das noch vorhandene Küstenkabel ausgelegt, das Schiff aber war noch 20 Meilen von der sardinischen Küste entfernt und musste sich hier vor Anker legen. Ein am 9. September Vormittags angespleisstes dünneres Kabel, von derselben Construction, wie das Malta-Kabel, war gegen Mittag ebenfalls ausgelegt und das Land immer noch nicht erreicht; daher wurde ein noch dünneres Kabelstück angeknüpft; allein kaum war die Verbindungsstelle über Bord, so riss es 8—10 Meilen vom Lande bei 80 Faden Tiefe. Am 28. October traf der Blazer mit einem neuen Kabel aus England ein und begann die Aufsuchung des versenkten Taues, welches am nächsten Morgen 8 Uhr am Bord erschien; 5 Minuten später war die Correspondenz schon im Gange und nun wurde das Tau von 12—15 Arbeitern mit den Händen heraufgezogen, bis Abends 11 Uhr das vierdrähtige Tau an Bord war. An dieses wurde am folgenden Morgen das neue Tau angeknüpft, die Legung begonnen, um 1 Uhr bei Cap Spartivento das Land erreicht und um 4 Uhr zuerst von hier telegraphirt. Die Stationen Algiers waren so mit Europa in Verbindung gesetzt; allein schon 1860 war die Strecke Cagliari-Bona betriebsunfähig (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 141). Im Juni 1858 wurde das Kabel wegen einiger Isolationsfehler theilweise bis zu 600—700 Faden Tiefe von Newall wieder aufgenommen und die fehlerhaften Stellen herausgeschnitten, so dass alle vier Drähte brauchbar wurden. Zugleich wurden auch die beiden Taue von 1855 und 1856 aufgeholt, das erstere vollständig bis zu einer Tiefe von 600 Faden, das zweite dagegen riss wegen der darin befindlichen Schleifen bei 400 Faden Tiefe.

Für die Mediterranean-Extension-Telegraph-Company hatten Newall & Co. die Herstellung einer Linie Sardinien-Malta-Corfu übernommen. Das für diese Linie bestimmte Tau enthielt nur einen, aus sieben dünnen Kupferdrähten Nr. 14 gebildeten Leitungsstrang und war mit achtzehn einfachen Eisendrähten Nr. 10 umsponnen; die englische Meile desselben wog 1960 englische Pfund; die absolute Festigkeit betrug 3½ Tonnen. Das Küstenende hatte eine Hülle von zehn weit stärkeren Eisendrähten. Die Elba traf am 10. November 1857 mit etwa 800 Meilen Tau in Cagliari ein, wohin auch das englische Kriegsschiff Desperate und der Blazer kam, der die Elba ins Schlepptau nehmen sollte. Am 13. fuhren diese drei Schiffe nach Cap S. Elia, 4 Meilen östlich von Cagliari, und legten das Küstenkabel, welches jedoch am folgenden Morgen gekappt wurde, weil es beim wiederholten Umspringen des Windes mehrere Brüche bekommen hatte. Nachdem ein neues Kabelende aus Land gebracht war,

fuhren die drei Schiffe am 14. Abends 8 Uhr ab, die Nacht verlief ohne Unfall, die grösste Tiefe von etwa 10000 Fuss wurde am 15. Vormittags während eines sehr heftigen Gewittersturms glücklich überschritten und am 17. Abends 8 Uhr die St. Georges-Bay, etwa 4 Meilen nördlich von La Valette erreicht, wo das Tau Nachts 2 Uhr ans Land gebracht wurde. Im Ganzen waren etwa 370 Meilen Tau ausgelegt. Widriger Winde halber wurde die zweite Strecke von Corfu aus gelegt. Am 1. December früh 7 Uhr trafen die Schiffe vor der St. Gordo-Bay an der Westküste der Insel ein, brachten das Küstenende ans Land und fuhren gegen 11 Uhr ab, während der ganzen Fahrt vom schönsten Wetter begünstigt. Am 3. December Nachmittags wurde die grösste Tiefe von etwa 8000 Fuss überschritten und am 4. December Mittags die St. Georges-Bay erreicht, nachdem etwas über 400 Meilen Tau versenkt worden waren; das Küstenende wurde am Nachmittag des 4. ans Land gebracht. Die Linie von Cagliari bis Corfu mit Einschluss der Landleitungen auf Malta (nach La Valette) und auf Corfu (nach der Stadt Corfu), ferner mit Einschluss der von Siemens & Halske gelieferten Apparate für die drei Stationen, kostete 125000 Pfd. Sterling (Delamarche, Elemente d. unters. Telegr. S. 103—108). Leider trat aber die Linie Malta-Cagliari schon nach 12 Monaten wieder ausser Thätigkeit und die Strecke Malta-Corfu im August 1860 infolge einer Unterbrechung 20—40 Meilen von Corfu. Besser hielt sich das 1859 von Sicilien nach Malta gelegte, 70 Meilen lange, von Glass, Elliot & Co. für die Mediterranean-Extension-Company verfertigte Tau, welches einen Strang von sieben Kupferdrähten Nr. 22 enthielt, mit Guttapercha, mit getheertem Hanf und zehn Eisendrähten Nr. 5½ übersponnen war und 3 Tonnen für 1 Meile wog. Sicilien und die Südspitze Italiens wurden durch zwei Leitungen und Corfu mit Otranto 1861 durch ein von Glass, Elliot & Co. für die Mediterranean-Extension-Company verfertigtes, 60 Meilen langes, 1865 unterbrochenes Tau (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 12, S. 63) verbunden, dessen Strang von sieben Kupferdrähten Nr. 22 mit drei Hüllen von Guttapercha und Chatterton's Mischung bedeckt, mit getheertem Garn überzogen und von zehn Eisendrähten Nr. 5½ umgeben war, so dass 1 Meile 3 Tonnen 8¾ Centner wog (Zeitg. d. Ver. d. Eisenbahnverw. 1861, S. 322 und 345). Die Strecke Malta-Alexandria kam auch noch vor dem Ende des Jahres 1861 zur Ausführung; das Tau war ebenfalls von Glass, Elliot & Co. geliefert. Der betreffende Vertrag wurde am 21. April zwischen der englischen und türkischen Regierung abgeschlossen und Anfang November wurde die von Malta nach Tripolis, über Benghazi nach Alexandria laufende Linie eröffnet (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 8, S. 163 und 217; Sächs. (deutsche) Ind.-Ztg. 1861, S. 337, 506, 542; 1862, S. 234). Die Strecke Benghazi-Alexandria war wiederholt unterbrochen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 10, S. 120; 11, S. 48 und 243; 12, S. 63).

Bevor wir den Bau der nach Ostindien zielenden Linien weiter ver-

folgen, sind einige früher gelegte Leitungen nachzuholen. Die New-York-New-Foundland and London Telegraph Company, an deren Spitze P. Cooper, Ch. White, M. Taylor, C. W. Field und M. Q. Roberts standen, während Morse als Techniker gewonnen war, hatten sich günstige Privilegien auf Neufundland, Cap Breton, Prinz Eduards-Insel und in Canada erworben, auch ein älteres für Neubraunschweig angekauft, und machten im August 1855 den Versuch, ein von Kuper, Glass & Co. in Greenwich gefertigtes, dem Grossen-Belt-Kabel ähnliches, 74 Meilen langes Seil durch den St. Lorenzbusen nach Cap Breton zu legen. Am 22. August traf die Sarah Bryant mit dem Seil in der Bucht beim Cap Ray an der Südwestspitze von Neufundland ein, in der Nacht des 23. wurde das Seil gelandet, am 24. befestigt und am 25. begann bei stürmischem Wetter die Legung, endete aber bald mit dem Kappen des Seiles und 2 Meilen Verlust; nicht glücklicher war man am 26. und 28. August, weshalb man die Legung nach einem Verluste von 42 Meilen Tau aufgab (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 15—20; Pfeiffer, Handbuch der elektro-magnetischen Telegraphie, Weimar 1865, S. 153—158). Im Sommer des nächsten Jahres wurde das Tau wieder aufgenommen. Am 9. Juli 1856 2 Uhr Nachmittags fuhr der Dampfer Propontis mit einem neuen, auch bei Kuper, Glass & Co. verfertigten, 170 Tonnen schweren Tau von Cap Ray aus und erreichte nach 15½stündiger Fahrt glücklich das Cap North, die Nordspitze der Insel Cap Breton. Die grössten Tiefen betrugen 150—200 Faden; ausgelegt wurden 85 englische Meilen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 175). Das Tau war leichter, als das vom Jahre 1855 und sein Leiter war aus vier dünnen Kupferdrähten zusammengedreht, was offenbar ein Fortschritt war, da so die Festigkeit und Leitungsfähigkeit zugleich erhöht wurde (*Shaffner*, *telegr. man.* S. 617). Die Propontis hatte auch ein Tau von 12 englischen Meilen Länge und 30 Tonnen Gewicht aus derselben Fabrik an Bord, mittelst dessen am 16. Juni das Cap Travers auf der Prinz Eduards-Insel mit dem Cap Tormentine in Neubraunschweig glücklich verbunden wurde (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 175). Dieses Tau hatte, wie die Zeitung des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen (1861, S. 334; nach dem *Blue book on submarine telegraph cables*) berichtet, einen Strang von sieben Kupferdrähten Nr. 22, Guttapercha als Isolator und zwölf Eisendrähte Nr. 9 als Schutzhülle und nach derselben Quelle (S. 335) war das zwischen Cap Breton und Neufundland gelegte Tau diesem an Gewicht (2,5 Tonnen für 1 Meile; das von 1855 wog 5 T.; *Mech. Magaz.* 64, S. 513) und Construction gleich.

Im Schwarzen Meere wurden von Newall & Co. während des Krimkrieges zwei Taue gelegt, das eine von Varna nach Balaclava an der Südküste der Krim vom 10. bis 13. April 1855, das andere von Varna nach Constantinopel vom 1. bis 5. October 1855. Das letztere enthielt blos einen Kupferdraht mit einem starken isolirenden Ueberzuge aus Guttapercha und Garn und einer schützenden Hülle von zwölf spiralförmig

umgewundenen Eisendrähten; es war 172 englische Meilen lang und wog gegen 200 Tonnen. Das erstere enthielt einen Kupferdraht Nr. 16 ($^1/_{16}$ Zoll Durchmesser) mit drei dünnen Lagen Guttapercha und war nur an der Küste mit zehn und zwölf Schutzdrähten umgeben; es war 356 englische Meilen lang und kostete einschliesslich der Legung 22000 Pfund Sterling; von dem mittleren Theil wog 1 Meile nur 2½ Centner, von den Uferenden 15 und 35 Centner. Dies war bis dahin die längste unterseeische Leitung und arbeitete über 6 Monate gut, trotz der stürmischen Wogen des Schwarzen Meeres (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 2, S. 168 und 283; *Shaffner*, *telegr. man.* S. 618).

Die zweite behufs der Erreichung Indiens nach Aegypten gebaute Linie benutzte Constantinopel als Anknüpfungspunkt an die festländischen Linien. Schon am 10. Januar 1857 ertheilte die türkische Regierung der Gesellschaft des Engländers Lionel Gisborne, der Levant Telegraph Company, die Concession auf 99 Jahre zur Anlage einer Telegraphenleitung von Constantinopel zu Land nach Cap Hellas an der Südspitze der Halbinsel Galipoli (Dardanellen) und von da unterseeisch über die Inseln Chios und Rhodos nach Alexandria. Von Alexandria sollte die Leitung oberirdisch nach Suez und dann durch das Rothe und Arabische Meer mit Berührung mehrerer Küstenpunkte bis zur Mündung des Indus geführt werden und von da weiter nach dem holländischen Ostindien und Australien (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 274; 5, S. 209). Das Tau von Cap Hellas nach Chios und von da nach Candia wurde von Newall & Co. verfertigt und im Juni 1858 gelegt; es ist 450 Seemeilen lang, enthält einen Strang von sieben Kupferdrähten und achtzehn eiserne Schutzdrähte Nr. 14; die Meile wiegt 1 Tonne. Genau so war das von Newall & Co. für die griechische Regierung gelieferte, 150 Seemeilen lange, im Juni 1859 gelegte Tau von Athen nach Syra und Chios beschaffen (Ztg. d. Ver. d. Eisenbahnverw. 1861, S. 345). Etwa gleichzeitig wurde Chios mit Smyrna verbunden (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 236 und 319). Auch im Hellespont wurde eine unterseeische Leitung versenkt. Ueber Unterbrechungen und Wiederherstellungen dieser Leitungen hat die Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereins (8, S. 217, 218 und 287; 9, S. 232 und 240; 10, S. 123, 231; 11, S. 52 und 188) wiederholt berichtet.

Gleichzeitig wurde auch der Bau der unterseeischen Leitung durch das Rothe und das Arabische Meer in Angriff genommen. Die ganze Strecke von 3043 Seemeilen Länge bestand aus sechs Abtheilungen, welche alle glücklich versenkt wurden, von denen jedoch schon 1861 nur noch zwei arbeiteten. Das ganze Tau war von Newall & Co. verfertigt, hatte einen Leitungsstrang von sieben Kupferdrähten, welcher 180 Pfund für 1 Meile wog, mit vier Hüllen von Guttapercha nach Chatterton's Patent im Gesammtgewicht von 212 Pfund auf 1 Meile und darüber

mit Garn im Gewicht von 1½ Centner für 1 Meile bedeckt war; die äussere Hülle bestand aus achtzehn Drähten von bestem Holzkohleneisen und wog 16 Centner für 1 Meile, so dass 1 Meile des fertigen Taues 21 Centner schwer war. Die erste Strecke von Suez nach Kosseir an der Küste Aegyptens, in einer Länge von 255 Meilen, wurde schon am 5. Mai 1859 gelegt und trat durch einen, wahrscheinlich in der Verankerung liegenden Fehler dicht bei Kosseir ausser Dienst. Auf der am 17. Mai 1859 versenkten, 474 Meilen langen Strecke von Kosseir nach Suakin, an der nubischen Küste, nahm die Leitungsfähigkeit 5 Tage nach der Legung ab, erhielt sich aber in den nachfolgenden 9 Monaten unverändert und das Tau arbeitete gut. Das am 28. Mai 1859 gelegte Tau auf der 629 Meilen langen Strecke von Suakin nach Aden an der Südwestspitze Arabiens war schon anfangs nicht ganz vollkommen und stellte nach 9 Monaten den Dienst ein. Auf der vierten Strecke von Aden nach Hallari (Kuria-Moria-Insel?), welche 718 Meilen lang war und am 12. Februar 1860 belegt wurde, trat nach 3 Monaten eine Unterbrechung ein, welche man 230 Meilen von Aden an einer seichten Stelle vermuthete. Das zwischen Hallari und Maskat an der Südostspitze Arabiens im Januar 1860 versenkte, 486 Meilen lange Tau arbeitete gut, während das von Maskat nach Karratschi (Currachee) an der westlichen Mündung des Indus laufende Tau von 481 Meilen Länge bald versagte (Ztg. d. Ver. d. Eisenbahnverw. 1861, S. 345). Mit dem Misslingen dieser Linie, welche übrigens später die Telegraph to India Company wieder herzustellen versuchte und von Suez bis zur Insel Jubal (Dschubal) am Eingange in den Golf von Suez vollendete (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 8, S. 290), waren auch die weitergehenden Pläne Gisborne's gekreuzt. Von Karratschi oder Hyderabad sollte nämlich die Regierung der englisch-ostindischen Besitzungen die bereits bestehenden Leitungen durch Vorder- und Hinterindien bis zur Insel Singapore ausdehnen und von da sollte eine unterseeische Leitung über die holländischen Inseln nach Australien gelegt, ausserdem aber auch die Küste von Cochinchina mit China verbunden werden (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 5, S. 209 flg.; Wieck, Gewerbeztg. 1859, S. 432). Begannen die Bauten auf den holländischen Inseln und Australien auch bereits im Jahr 1858 und wurde auch schon 1859 Singapore unterseeisch mit Batavia verbunden, desgleichen die Bass-Strasse zwischen Australien, Kingsinsel, Elephanteninsel und Tasmania (Van Diemensland) überschritten, so ist doch Australien noch nicht in vollständiger telegraphischer Verbindung mit Europa, obwohl die ostindischen Stationen sowohl mittelst der russisch-asiatischen Landlinien, als mittelst der türkischen und persischen Landlinien und der im Persischen Busen und im Arabischen Meere liegenden unterseeischen Leitung erreicht werden können. Diese Anfang 1864 bereits eröffnete (deutsche Ind.-Ztg. 1864, S. 179) Unterseelinie läuft von Karratschi über Gwadur (Gwater) in. Beludschistan, Mussendom an der Ostküste Arabiens und

und Abuscher (Bender-Bouchir, Bushir) in Persien nach Fava oder Fao an der Mündung des Schatt-el-Arab, wo die türkische von Skutari über Diarbekir, Bagdad und Bassora kommende Linie sich anschliesst, während in Abuscher ein Anschluss an die persischen Linien hergestellt ist, welche ihrerseits in der Richtung auf Tiflis bei Djoulfa mit den russischen und bei Khanakin mit den türkischen Linien verbunden sind (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 11, S. 244 und 246; 12, S. 63 und 64; 5, S. 185).

Wir haben bisher mit möglichster Vollständigkeit die Ausführung unterseeischer Telegraphenleitungen zu schildern versucht und würden nun zu den grössten derartigen Unternehmungen überzugehen haben. Bevor dies indess geschieht, mögen einige, das bis jetzt Mitgetheilte zum Theil ergänzende Zusammenstellungen Erwähnung finden, wobei sich zugleich zu einigen Zusätzen und Bemerkungen Gelegenheit bieten wird. Zunächst findet sich in Dingler's polytechnischem Journal (Bd. 150, S. 154) eine dem *Scientific Americain* vom 21. August 1858 entnommene, in den beigefügten Kabellängen von anderen unter sich übereinstimmenden Angaben mehrfach abweichende Zusammstellung der bis 1858 gelegten Taue, welche (mit Berücksichtigung der Bd. 150, S. 429 gegebenen Berichtigungen) folgendermaassen lautet:

	Gelegt:	Länge:
England-Frankreich . . .	1851	36 Kilometer,
England-Belgien	1852	114 "
England-Irland	1852	103 "
England-Holland	1853	173 "
Irland-Schottland (2 Kabel) .	1853	39 "
Italien-Corsica	1854	103 "
Corsica-Sardinien	1854	15 "
Dänemark, grosser Belt . .	1853	23 "
Dänemark, kleiner Belt . .	1853	8 "
Sund	1855	18 "
Meerbusen des Forth . . .	1855	6 "
Schwarzes Meer	1855	600 "
Solent-Insel Wight	1855	5 "
Strasse von Messina . . .	1856	8 "
St. Lorenzbusen	1856	111 "
Meerenge von Northumberland	1856	15 "
Bosporus	1856	2 "
Strasse von Canso (Cap Breton-Neuschottland)	1856	3 "
St. Petersburg-Kronstadt .	1856	13 "
Sicilien-Algier	1857	240 "
Irland-Amerika	1858	2025 "

Ferner führt Th. du Moncel (*traite de télégraphie électrique*, Paris 1864, S. 250) an, dass von den bis 1861 gelegten 11180 Kilometer Kabel zur Zeit nur noch 6787 Kilometer in Dienst seien, nämlich:

in seichtem Wasser:

	Gelegt:	Länge:	
Calais-Dover	1851	40	Kilometer,
Belt	1853	30	„
Dover-Ostende	1853	130	„
England-Holland	1853	189	„
Meerbusen des Forth . . .	1853	8	„
Port Patrick-Donaghadee . .	1853	40	„
Fluss Tay	1853	1,6	„
Corsica-Sardinien	1854	17,6	„
Holyhead-Howth	1854	120	„
England-Insel Wight . . .	1854	1,6	„
Port Patrick-Whitehead . .	1854	41	„
Sund	1854	21	„
Varna-Constantinopel . . .	1855	275	„
Prinz Eduard-Insel-Neubraunschweig	1856	19	„
England-Hannover	1858	450	„
Oxfordness-Haarlem . . .	1858	218	„
Liverpool-Holyhead . . .	1858	40	„
Weymouth-Jersey, Guernsey etc.	1858	149	„
Whitehaven-Insel Man . .	1858	58	„
England-Dänemark	1859	560	„
Boulogne-Folkestone . . .	1859	38	„
Singapore-Batavia	1859	880	„
Schweden-Gothland . . .	1859	102	„
Tasmania-Australien . . .	1859	384	„
Grosser Belt	1860	44	„
	Sa.	3856,8	Kilometer.

in tiefem Wasser:

	Gelegt:	Länge:	
Spezzia-Corsica	1854	176	Kilometer,
Neufundland-Cap Breton . .	1856	136	„
Dardanellen-Chios, Candia / Chios-Smyrna .	1858	833	„
Athen-Syra-Chios	1859	278	„
Sicilien-Malta	1859	112	„
Barcelona-Mahon	1860	290	„
Iviza-Majorka	1860	118	„
Spanien-Iviza	1860	122	„

	Gelegt:	Länge:
Algier-Minorka	1860	770 Kilometer,
Corfu-Otranto	1861	96 „
	Sa.	6787,8 Kilometer.

Ausser Dienst waren:

	Gelegt:	Länge:
Holyhead-Howth (1. Tau) . .	1852	120 Kilometer,
Varna-Balaclava	1855	570 „
Valentia-Neufundland . . .	1858	3540 „
Algier-Sardinien	1857	200 „
Sardinien-Malta-Corfu . . .	1857	1120 „
Rothes und Indisches Meer .	1859	5630 „
	Sa.	11180 Kilometer.

Dagegen enthält die Zeitung des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen (1861, S. 345) aus *Blue book on submarine telegraph cables* die Angabe, dass bis dahin etwa 11360 englische Meilen (= 18290 Kilometer) versenkt, jedoch nur wenig über 3000 Meilen noch arbeitsfähig wären. Die an derselben Stelle gegebene (jener in der Zeitschr. d. Tel.-Ver. 8, S. 183 ähnlichen) Zusammenstellung führt 28 im seichten und 12 im tiefen Wasser gelegte Taue auf. Die meisten derselben haben wir schon ausführlicher besprochen und deshalb ausser dem atlantischen blos noch folgende nachzutragen:

Das England-Hannover-Kabel von Glass, Elliot & Co. für die Submarine Company verfertigt, 1858 gelegt, 280 Meilen lang, mit zwei Strängen aus je vier Kupferdrähten Nr. 22, welche mit Guttapercha und Chatterton's Mischung überzogen und zwölf Eisendrähten Nr. 6½ umsponnen sind; 3 Tonnen. Schon 1854 hatte die hannöver'sche Regierung A. Ruyssenaers im Haag, dem ersten Unternehmer der Oxfordness-Scheveningen-Linie, eine Concession zur Verbindung Englands und Hannovers ertheilt; doch erst am 1. April 1859 eröffnete die Submarine Company die 1858 gelegte Linie von Cromer bei Norwich in Norfolk nach Emden, welche sehr oft unterbrochen war (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 291; 6, S. 88; deutsche Ind.-Ztg. 1862, S. 338; 1863, S. 538). Im Herbst 1866 legte Reuter's Telegramm-Compagnie zu London ein neues Tau von Cromer nach Norderney, welches bei Nordteich ans Festland gebracht und über Land mit Emden verbunden wurde (deutsche Ind.-Ztg. 1866, S. 149 und 370).

Das Kabel von Liverpool nach Holyhead, 25 Meilen lang, von Glass & Co. für die Liverpool Dock Committee, 1858 gelegt, mit zwei Kupferdrähten Nr. 16 in Guttapercha und mit zwölf Eisendrähten Nr. 6; 3 Tonnen 2 Centner.

Das Kabel von Weymouth (bei Dorchester) nach den Canalinseln Alderney, Guernsey und Jersey, 93 Meilen lang, von Newall & Co. für die Chanel Islands Telegraph Company, 1858 gelegt, mit einem Kupfer-

draht Nr. 4 in Guttapercha und Garn und neun galvanisirten Eisendrähten Nr. 6; 2 Tonnen 17 Centner. Die Eisendrähte wurden dreimal an den scharfen Felsen durchgescheuert. Zwischen Guernsey und Jersey war die Leitung schon 1861 unterbrochen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 8, S. 288; 9, S. 70; 10, S. 118).

1860 wurde von der Submarine Company Jersey mit Frankreich bei der Station Coutances (Pirou) verbunden; diese Leitung war 1863 unterbrochen, wurde aber am 11. November 1864 wieder hergestellt (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 96; 8, S. 162; 10, S. 227; 11, S. 188 und 238).

Das Kabel von Whitehaven nach der Insel Man, 36 Meilen lang, von Glass & Co. 1858 gelegt, mit einem Kupferdraht Nr. 16 in Guttapercha und zehn Eisendrähten Nr. 6½ und darüber noch eine Schicht von Asphalt und Hanf; 2½ Tonnen.

Das Kabel von England nach Dänemark, 350 Meilen lang, von Glass & Co. für die Submarine Telegraph Company, gelegt 1859, am 23. Januar 1860 eröffnet, mit drei Strängen aus je vier Kupferdrähten Nr. 24 in Guttapercha und zwölf Eisendrähten Nr. 5½; 4 Tonnen; läuft von Cromer bei Norwich über Helgoland nach Vesterhever bei Tönningen an der Westküste Schleswigs (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 323; 11, S. 45).

Das Kabel von Folkestone nach Boulogne, von Glass & Co. für die Submarine Company am 26. Juli 1859 gelegt, 24 Meilen lang, mit sechs Strängen aus je vier Kupferdrähten Nr. 22 in Guttapercha und zwölf Eisendrähten Nr. 0; 10 Tonnen. Nach *Civil Engineer and Architects Journal* (1859, S. 248) enthält es sechs Drähte Nr. 1 um eine Hanfseele. 1865 sollte noch ein weiteres Tau von Cap Gris Nez nach England gelegt werden (deutsche Ind.-Ztg. 1865, S. 449).

Das Kabel von Singapore nach Batavia auf Java, von Newall & Co. für die holländische Regierung, 1859 gelegt, 550 Meilen lang, mit sieben Kupferdrähten Nr. 1 in Guttapercha, Garn und achtzehn Eisendrähten; 21 Centner. Einmal zerbrochen und reparirt.

Das Kabel von Schweden nach Gothland, von Glass & Co. für die schwedische Regierung, 1859 gelegt, 64 Meilen lang; mit einem Strang aus sieben Kupferdrähten Nr. 22 in Guttapercha und zwölf Eisendrähten Nr. 9; 2½ Tonnen.

Das Tasmanian-Kabel, von William T. Henley für die australische Regierung, 1859 durch die Bass-Strasse gelegt; in drei Sectionen zusammen 240 Meilen lang; mit Kupferdraht Nr. 16 in Guttapercha und zehn Eisendrähten Nr. 8; 2 Tonnen.

Zweites Belt-Kabel, von W. T. Henley für die dänische Regierung, 1860 gelegt, 28 Meilen lang. Auf der halben Länge mit sechs Kupferdrähten in Guttapercha und zwölf Eisendrähten Nr. 1; 8 Tonnen; auf der anderen Hälfte mit drei Kupferdrähten, zehn Eisendrähten; 5½ Tonnen.

Kabel von Dacca nach Pegu, von Henley für die indische Regierung, 116 Meilen, mit sieben Kupferdrähten (180 Pfund) in vier Hüllen von Guttapercha nach Chatterton's Patent (212 Pfund) und Hanf (1½ Centner) und in 18 Eisendrähten (16 Centner); 21 Centner für 1 Knoten.

Die spanische Regierung hat drei Kabel von W. T. Henley, im September 1860 zwischen dem Festlande und den Balearen gelegt, nämlich: Barcelona-Mahon auf Minorca, 180 Meilen, mit sechszehn Eisendrähten Nr. 12½, 1¼ Tonne; Iviza-Majorca, 74 Meilen, und von dem festländischen Cap St. Antonio-Iviza, 76 Meilen, letztere beide mit je zwei Leitern von Kupferdrähten Nr. 16 in Guttapercha und achtzehn Eisendrähten Nr. 11½; 38 Centner. Barcelona-Mahon war 1862 und 1865 unterbrochen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 9, S. 72; 12, S. 68). Vergl. S. 417.

Das Kabel von Toulon nach Algier, 480 Meilen, von Glass & Co. für die französische Regierung; die Abtheilung von Algier nach Minorca im September 1860 gelegt; mit einem Strang von sieben Kupferdrähten Nr. 22, mit drei Hüllen von Guttapercha und Chatterton's Mischung, umkleidet mit getheertem Garn und zehn Stahldrähten Nr. 14, deren jeder mit getheertem Hanf umwickelt ist; 22¾ Centner.

Die angegebenen Gewichte beziehen sich auf eine englische Meile.

Im Juli 1865 arbeiteten (nach *The Atlantic Telegraph*, London 1866, S. 115), mit Weglassung mehrerer kürzerer, folgende Unterseetaue:

		Zahl der Leiter.	Länge in engl. Meil.	Wassertiefe in Faden.	Arbeitet seit Jahren.
N.	Dover-Calais	4	27	.	14
N.	Belt	3	18	.	12
N.	Dover-Ostende	6	80½	.	12
N.	Meerbusen des Forth	4	6	.	12
N.	Port Patrick-Donaghadee	6	25	.	12
N.	Fluss Tay	4	2	.	12
N.	Port Patrick-Whitehead	6	27	.	11
G.	Sund	3	12	14	11
G.	Italien-Corsica	6	110	325	11
G.	Corsica-Sardinien	6	10	20	11
G.	Aegypten	4	10	.	10
G.	Italien-Sicilien	3	5	27	10
G.	Neufundland-Cap Breton	1	85	360	9
G.	Prinz Eduard-Neubraunschweig	1	12	14	9
	Strasse von Canso	3	1½	.	9
	Norwegische Fjords	1	40	300	8
G.	Donaumündung	1	3	.	8
G.	Ceylon-Hindostan	1	30	.	8
G.	Italien-Sicilien	1	8	60	7

		Zahl der Leiter.	Länge in engl. Meil.	Wassertiefe in Faden.	Arbeitet seit Jahren.
G.	England-Holland	4	140	30	7
G.	England-Hannover	2	280	30	7
G.	Norwegische Fjords	1	16	300	7
H.	Australien-Kings Insel	1	140	45	7
H.	Ceylon-Indien	1	30	45	7
G.	Alexandria	4	2	.	6
G.	England-Dänemark	3	368	30	6
G.	Schweden-Gothland	1	64	80	6
G.	Folkestone-Boulogne	6	24	32	6
G.	Indische Ströme	1	10	.	6
G.	Malta-Sicilien	1	60	79	6
G.	England-Insel Man	1	36	30	6
N.	Suez-Insel Jubal	1	220	.	6
G.	Jersey-Pirou (Frankreich) . . .	1	21	15	5
	Tasmania (Bass-Strasse)	1	240	.	5½
H.	Grosse Belt	6 u. 3	28	18	5
H.	Dacca-Pegu	1	116	.	5
H.	Barcelona-Mahon (Minorca) . .	1	180	1400	5
H.	Minorca-Majorca	2	35 (?33)	250	5
H.	Iviza-Majorca	2	74	500	5
H.	St. Antonio-Iviza	2	76	450	5
G.	Norwegische Fjords	1	16	300	4
G.	Toulon-Corsica	1	195	1550	4
H.	Holyhead-Howth	1	64	.	4
G.	Malta-Alexandria	1	1535	420	3
H.	Newhaven (Beachy Head)-Dieppe .	4	80	.	4
G.	Pembroke (Wales)-Wexford (Irland)	4	63	58	3
E.	Meerbusen des Forth	4	6	.	3
G.	England-Holland	4	130	30	3
E.	Fluss Tay	4	2	.	3
G.	Sardinien (Cagliari)-Sicilien (Trapani)	1	243	1200	2
H.	Otranto-Avalona	1	62	.	1
	Algier-Sicilien	1	212	.	1
H.	Fao-Karratschi	1	1450	.	1
H.	Schweden-Preussen	3	55	.	.
G.	Irland-Neufundland	7 (1)	1987	2400	.
H.	Algier-Sicilien	1	259	390	¼
			Sa. 8040 engl. M.		

Durch die den Ortsnamen vorgesetzten Buchstaben sind die Verfertiger und Leger der Taue angedeutet und zwar Glass, Elliot & Co.

durch *G*, R. S. Newall & Co. durch *N*, W. T. Henley durch *H*, die Electric and International Company durch *E* und Gebrüder Siemens durch *S*. Die isolirten Drähte für alle diese Taue seien von der Guttapercha Company in London hergestellt worden.

Mit dem vorstehenden Verzeichnisse stimmt das in Petermann's geographischen Mittheilungen (1865, S. 392, aus *Illustrated London News*, September 1865) enthaltene fast ganz überein, welches die Zahl der Taue in Europa, Asien, Afrika und Australien auf 52 mit 5625 englische Meilen Länge bei 9783 Meilen Drahtlänge, die der Taue in den Vereinigten Staaten und Britisch-Nordamerika auf 95 mit 68 englischen Meilen Länge bei 133 Meilen Drahtlänge angiebt. Nach Gisborne (vergl. deutsche Ind.-Ztg. 1865, S. 205) waren im April 1865 38 Taue von 5066 englischen Meilen Länge im Betrieb; das Gewicht von 1 Meile Tau schwankt zwischen 0,89 und 9,75 Tonnen, bei den nur einige Zeit in Betrieb gewesenen 23 Tauen dagegen zwischen 0,1 und 2,5 Tonnen, und bei dem 10 Jahre ohne Störung thätigen Tau Spezzia-Corsica betrug es 7,5 Tonnen; neun Kabel verunglückten beim Legen und wogen 0,45 bis 8 Tonnen.

Hierzu wären noch folgende Bemerkungen zu machen:

Das Tau zwischen Preussen und Schweden, seit 1863 beabsichtigt, wurde am 5. und 6. Juni 1865 gelegt und läuft von dem Dorfe Skarebo bei Trelleborg nach der Putgartner Schlucht, etwas westlich vom Vorgebirge Arcona auf Rügen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 12, S. 53 und 65; deutsche Ind.-Ztg. 1863, S. 68 und 291). Die am 15. August 1855 eröffnete Station Putbus auf Rügen ist seit 1855 mit Stralsund durch zwei auf der Insel Danholm zusammenstossende Taue von 63 und 315 Ruthen Länge mit einfachem Draht verbunden (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 2, S. 182).

Eine Verbindung zwischen der Insel Gothland und Liebau in Curland war schon 1861 projectirt, wurde 1863 der Submarine Telegraph Company concessionirt; 1865 wurde ferner eine Linie von Nystadt in Finnland über die Alands-Inseln nach Grislehamm in Schweden, sowie eine Linie Cronstadt-Bornholm-Kopenhagen genehmigt (deutsche Ind.-Ztg. 1861, S. 409; 1863, S. 368; 1864, S. 78; 1865, S. 49 und 399).

R. S. Newall erhielt 1867 Concession zur Anlage zweier Taue von Dänemark nach Norwegen und nach England; die norwegisch-englische Gesellschaft vereinigte sich mit der dänisch-englischen, die Legung des Taues zwischen Arendal in Norwegen und Hirtshals in Jütland musste am 20. Mai d. J. 15 englische Meilen von Hirtshals wegen eines Fehlers im Tau unterbrochen werden, ward aber am 1. Juni glücklich vollendet (deutsche Ind.-Ztg. 1867, S- 149 und 189; Leipziger Zeitung 1867, S. 3072 und 3302).

Das Tau zwischen Algier und Mahon auf Minorca wurde zur Herstellung einer Leitung von Algier nach Port-Vendres, südöstlich

von Perpignan, benutzt, welche am 1. November 1861 dem Verkehr übergeben wurde, aber schon 1862 unterbrochen war (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 8, S. 212; 9, S. 229; 11, S. 237). Im Jahr 1864 wurde eine Leitung zwischen Carthagena in Spanien und Oran in Algier versenkt, hielt aber nur einen halben Tag (deutsche Ind.-Ztg. 1864, S. 49 und 439). Endlich wurde im Juni 1865 Algier mit Sicilien verbunden und es lief das 400 Kilometer lange Tau von Marsala nach Biserta in Tunis und von da nach La Calle bei Bona; ersteres war ein gewöhnliches Eisenkabel, letzteres mit zwei Kupferblechstreifen umwickelt und von Siemens in London verfertigt (Schellen, d. elektro-magn. Telegr. 4. Aufl. S. 227; Zeitschr. d. Tel.-Ver. 12, S. 56 und 63; deutsche Ind.-Ztg. 1865, S. 259).

Zu einer Leitung Marseille-Corsica erhielt Pier-Alberto Balestrini 1857 Concession. Die Linie Toulon-Ajaccio wurde am 1. November 1861 eröffnet, war aber schon 1863 unterbrochen; ja, 1864—1865 war keine Linie nach Corsica dienstfähig (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 5, S. 127; 8, S. 215; 10, S. 118; 11, S. 240 und 242; 12, S. 59). Zwischen Corsica und Livorno ward 1866 eine Unterseeleitung hergestellt (deutsche Ind.-Ztg. 1866, S. 39). Die Leitung zwischen den Inseln Procida und Ischia im Busen von Neapel war 1865 unterbrochen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 12, S. 63).

Für militärische Zwecke wurden zuerst 1859 die Forts in den Lagunen von Venedig, im folgenden Jahre die Inseln Cherso und Lussin mit Istrien verbunden und 1862 die Inseln Curzola, Lesina und Lissa ins Netz aufgenommen. Die etwas über 11 geographische Meilen langen Taue zwischen den letzteren waren aus einer Kölner Fabrik bezogen und spielten bei den kriegerischen Ereignissen 1866 eine wichtige Rolle. 1864 ward auch die Insel Brazza unterseeisch mit dem Festlande verbunden (Militzer, die österr. Telegr.-Anstalten, Wien 1866, S. 12).

Im Bodensee kam die schon 1854 projectirte Linie Friedrichshafen-Romanshorn erst am 3. April 1856 zur Ausführung, indem ein über 42000 Fuss langes Tau aus der Fabrik von Felten & Guilleaume in Köln versenkt wurde. Die am 5. September 1862 gelegte Linie Lindau-Rorschach wurde am 1. October 1862 eröffnet. Friedrichshafen und Bregenz wurden durch ein 50000 Fuss langes, 180 Centner schweres, in Köln gefertigtes Tau verbunden, das am 1. April 1865 in Betrieb kam (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 80 und 151; 9, S. 226; 12, S. 51; deutsche Ind.-Ztg. 1862, S. 418; 1865, S. 149). Im Vierwaldstädter See lag schon etwas früher, als im Bodensee, ein Tau (Knies, d. Telegraph S. 136).

Im Rhein wurde am 11. October 1862 zwischen Mannheim und Ludwigshafen ein Telegraphenseil versenkt (d. Ind.-Ztg, 1862, S. 481). Auch durch die Elbe bei Pillnitz wurde sehr frühzeitig ein Tau mit drei Drähten und zehn sechsdrähtigen Schutzlitzen gelegt.

Im Zuidersee wurde 1861 ein Tau zwischen Enkhuizen und Stevoren versenkt (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 87; 8, S. 262).

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Niederlande 1858 86 Kabel von 30914 Meter besassen, dass in Frankreich 1859 28 Kabel von 180 Kilometer Länge versenkt wurden und dass Norwegen 1859 24 Küstenkabel hatte (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 55; 4, S. 277; 6, S. 1; 7, S. 90).

Wir schliessen diesen geschichtlichen Ueberblick mit einem kurzen Bericht über die telegraphische Verbindung Europas und Amerikas, auf welche wir später und ausführlicher zurückkommen werden. Die ersten Anregungen einer solchen Verbindung von Morse 1843, von Armstrong und von Colt 1848 wurden schon erwähnt. 1851 trat Reynolds in New-York mit dem Vorschlage auf, ein Tau mit vier mittelst Guttapercha isolirten Drähten vom Cap Canso nach einem Punkte bei Galway in Irland zu legen und berechnete den Aufwand auf 3000000 Dollars (*Civ. Eng. and Arch. J.* 1851, S. 535). Auch in England tauchte ein Plan schon 1850 nach der Legung des ersten Taues zwischen Dover und Calais auf (*Mech. Magaz.* 53, S. 198). Die Ingenieure C. W. und J. J. Harrison schlugen 1852 vor, eine Leitung von der Nordostspitze Schottlands über die Orkney-Inseln, die Shetland- und Faroer-Inseln nach der Südostküste von Island, quer durch Island und nach der Ostküste Grönlands bei der Insel Graah zu führen, von wo man mittelst einer Landleitung und eines in der Davisstrasse versenkten Taues Labrador erreichen könne (*Mech. Magaz.* 57, S. 329, 388; *Civ. Eng. and Arch. J.* 1852, S. 336; Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 144). Aehnlich war der 1854 von T. P. Shaffner entworfene Plan zu einem „Gürteltelegraphen um die Erde", welcher von Labrador über Grönland, Island, die Faroer-Inseln nach Bergen in Norwegen laufen sollte, von wo ein Zweig über Christiania und Kopenhagen nach Deutschland, der andere über Stockholm durch Finnland nach St. Petersburg und Moskau durch Sibirien einerseits nach China, andererseits dem Amur entlang über die Aleuten durch das russische und britische Nordamerika nach San Francisco und Missouri gebaut werden sollte. Am 24. Januar 1855 erhielt Shaffner in Schweden eine Concession auf 100 Jahre (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 302; 2, S. 210). Die unmittelbare Verbindung der beiden Erdtheile durch ein quer durch den Atlantischen Ocean gelegtes Tau ward seit 1854 vorwiegend ins Auge gefasst und namentlich durch die Bemühungen des Amerikaners Cyrus W. Field der Ausführung entgegengeführt. Field vereinigte sich nach dem Misslingen der ersten Unternehmungen im St. Lorenzbusen mit noch fünf Männern zu der New-York, New-Foundland and London Telegraph Company, welche das Recht auf 50 Jahre erwarb, auf Neufundland ein Telegraphentau zu landen. Schnell wurden die Arbeiten auf Cap Breton und Neufundland in Angriff genommen; allein die Legung des im December 1854 von Field in England bestellten Taues misslang 1855, worauf ein zweites 1856 glücklich versenkt wurde. Nachdem sich

nun Field der Unterstützung der englischen und amerikanischen Regierung versichert hatte, vereinigte er seine Gesellschaft mit der in England gebildeten Transatlantic Submarine Telegraph Company zu der Atlantic Telegraph Company, ein Tau wurde von Glass & Co. und Newall & Co. angefertigt und am 5. August von Valentia bei Irland aus gelegt; dasselbe riss aber am 11. August früh 4 Uhr bei einer Tiefe von 2000 Faden, nachdem schon 380 Meilen gelegt waren. Noch 1857 erhielt Field die Zusicherung weiterer Unterstützung von der amerikanischen Regierung. Trotz mehrfacher Verbesserungen namentlich der Auslegemaschinen misslang auch der zweite Versuch, Ende Juni 1858. Da man sich aber durch den Versuch überzeugt hatte, dass ein Telegraphiren durch das am Bord des Niagara und Agamemnon befindliche Tau möglich sei, so wurde am 29. Juli 1858 mitten auf dem Ocean begonnen und am 5. August kam der Niagara in Trinity Bai auf Neufundland, der Agamemnon bei Valentia an. Das Telegraphiren begann am 16. August, war aber schon am 1. September unmöglich. Zwar suchte die Gesellschaft bei der englischen Regierung schon 1858 um Garantieleistung für ein neues Actienkapital nach und erlangte sie schliesslich auch; allein erst Anfang 1864 konnte man an die Anfertigung eines neuen Taues denken, welches, 2300 Knoten lang, vom Januar bis Juni 1865 auf den Great Eastern geladen wurde. Am 22. Juli wurde das an Bord der Karoline geladene Küstenkabel in der Foilhommerum-Bay auf Valentia glücklich gelandet; die Legung des Tiefseekabels missglückte aber auch diesmal, denn am 2. August riss das Tau beim Aufwinden einer Fehlerstelle aus 1950 Faden Tiefe, wenig über 600 Meilen von Heart's Content, wo es gelandet werden sollte, und über 1000 Meilen von Valentia. Vergeblich bemühte man sich, das Tau wieder aufzufischen. Die Aussicht auf Erfolg war aber jetzt noch grösser; deshalb bildete sich bereits im März 1866 eine neue Gesellschaft, die Anglo American Telegraph Company, und setzte sich mit der früheren ins Einvernehmen; am 15. Juni war das neue Tau und das zur Ergänzung des vorjährigen nöthige Stück fertig, am 7. Juli landete der William Cory das Küstenende in der Foilhommerum-Bay, am 14. begann der Great Eastern die Legung des Tiefseekabels und langte glücklich in Heart's Content an, woselbst das Küstenende am 27. Juli ausgelegt wurde. Nun nahm der Great Eastern frische Kohlen und das zur Vollendung des Taues von 1865 nöthige Stück ein und lief am 9. August wieder aus; er hob das bereits am 12. vom Albany und am 15. vom Great Eastern selbst einmal aufgefischte Tau am 17. auf kurze Zeit; am 31. August Mittags 2 Uhr 50 Minuten fasste man das Tau wieder, hob es am 2. September Morgens 10 Minuten vor 1 Uhr über Wasser, knüpfte das Ergänzungsstück an und landete am 8. in Heart's Content. Seitdem haben beide Taue gut gearbeitet. Am 18. Mai 1867 jedoch traf auf dem Festlande die telegraphische Nachricht ein, das neue atlantische Tau sei beschädigt, angeblich durch einen Eisberg, unweit der Küste in 16 Faden Tiefe; das alte

aber arbeite noch gut; am 20. Mai folgte die Kunde, die Beschädigung befinde sich 3 Meilen von der Station Heart's Content, 1⅓ Meile von der Küste und sei leicht herstellbar; am 20. Juni wurde die erfolgreiche Beendigung der Reparatur gemeldet.

Bei den Plänen, die ganze Erde mit Telegraphen zu umspannen, spielen natürlich die Unterseestrecken eine wichtige Rolle und deshalb übten theils die Erfolge, theils die Misserfolge mit unterseeischen Telegraphen auf die Entstehung und Gestaltung solcher Pläne einen wesentlichen Einfluss. Jetzt ist natürlich die Umspannung der Erde mit Telegraphen nur noch eine Frage der Zeit. In allen darauf zielenden Plänen nimmt aber die Verbindung Europas mit Amerika wegen der Grösse des erforderlichen Unterseekabels einen hervorragenden Platz ein. Die beiden ältesten Entwürfe dazu von Harrison 1852 und von Shaffner 1854 wurden soeben bereits erwähnt. Inzwischen ist der Landabschnitt rüstig seiner Vollendung entgegengeführt worden. Die russisch-sibirische Linie wurde Anfang 1861 begonnen und reichte im Herbst 1862 schon von Moskau über Kasan, Perm, Tjumen im Gouvernement Tobolsk (Ende Juli 1862 eröffnet) und Jekaterinenburg bis Omsk; am 2. December 1863 waren auch in Nischney-Udinsk und in Irkutsk (5700 Werst, etwa 815 geographische Meilen von St. Petersburg) Telegraphenstationen eröffnet. Nach der St. Petersburger Börsenzeitung waren 1866 fast alle Untersuchungen auf dem Festlande und die Messungen in der Behringsstrasse beendet und es sollten im Laufe dieses Jahres von Kenel noch 800 Meilen gebaut werden; die Strecken von dem Hafen Granley nach dem Kwichpak und entlang diesem Flusse von der Mündung des Anadyr (an der nordöstlichen Spitze Sibiriens) bis zum Fort Anadyr, von Ochotsk nach Gischiga und vielleicht bis zur Verbindung mit der Anadyr-Strecke sollten gebaut sein; die Taue zwischen den Buchten Granley und Ssenjawin (184 Meilen) und den Caps Sponberg und Tolstoi (im Anadyrbusen, 210 Meilen) sollten im September dieses Jahres gelegt werden (deutsche Ind.-Ztg. 1861, S. 45; 1862, S. 456 und 481; 1864, S. 28 und 38; 1866, S. 380; Zeitschr. d. Tel.-Ver. 8, S. 47 und 189). Nach Mittheilungen aus St. Petersburg vom 5. Mai 1867 (Leipziger Zeitung 1867, S. 2780) war die ganze Amurlinie von Nikolajewsk bis zum Hafen Nowgorodskaja in der Possietbucht eröffnet; diese Linie von 1884 Werst Länge ist in zwei fast gleiche Hälften getheilt, von denen die nördliche von Nikolajewsk nach Charabowka am Amur geht, eine Zweiglinie von Ssofitsk nach der Bay de Castries entsendet, 990 Werst lang ist und den sibirischen Telegraphen mit den russisch-amerikanischen verbinden soll, während die südliche von Charabowka nach dem Hafen Nowgorodskaja geht, 894 Werst misst und einst bis Nangasaki in Japan und Shanghai in China fortgeführt wird. Die ganze Linie hat nur 12 Telegraphen-, 17 Control- und 19 Beaufsichtigungs-Stationen. Von den für die Linie des Amurtelegraphen ausgesetzten 750000 Rubel waren 500000 verausgabt, 250000 zu Ergänzungs-

arbeiten bestimmt. Ausser der schon erwähnten, 1863 eröffneten (deutsche Ind.-Ztg. 1863, S. 388) Linie von Kasan nach Tiflis sollten von der sibirischen Linie noch zwei andere südlich abzweigen, von Omsk über Bukhara und Kabul nach Karratschi und von Kiachta bei Irkutsk nach Peking, Nanking, Formosa, die Philippinen und Neu-Guinea nach Australien. Auf der amerikanischen Seite wurden am 22. October 1861 die californischen Linien bei San Francisco mit den östlichsten festländischen Linien verbunden; 1866 aber wurde die Strecke bis zur Vancouvers-Insel an der Westküste des britischen Nordamerika fertig und am 25. April wurden die ersten Begrüssungen zwischen Victoria auf Vancouvers-Insel und Washington (7500 englische Meilen) ausgetauscht; von der Absendung bis zum Eintreffen der Antwort verstrichen 24 Stunden (deutsche Ind.-Ztg. 1861, S. 577; 1866, S. 219). Die Länge dieses Ueberlandtelegraphen des Major Perry Mc Donnough Collins misst durch Britisch-Nordamerika 1200, durch Russisch-Amerika 900, über die Behringsstrasse 184, über den Golf von Anadyr 300, bis zur Amurmündung 1800 englische Meilen (deutsche Ind.-Ztg. 1866, S. 289).

Von San Francisco oder Panama wurde ferner eine unterseeische Linie durch den grossen oder stillen Ocean über die Sandwich-Inseln nach Japan, China oder Australien projectirt (*Atlantic Telegr.* S. 104); zugleich hätte man über Rangoon, Calcutta und Bombay einen Anschluss nach Vorderasien und Europa erzielen können.

Zahlreicher sind die Pläne zur Verbindung Nord- und Südamerikas mit Europa und Afrika. Abgesehen von einer schon im Februar 1857 von den westindischen Inseln aus angeregten Verbindung Nord- und Südamerikas über die englischen und dänischen Inseln (Knies, d. Telegraph, S. 145), und von der wiederholt aufgenommenen und selbst concessionirten Linie über Island, Grönland und Labrador (deutsche Ind.-Ztg. 1861, S. 337; 1865, S. 479; 1866, S. 439), kamen auch verschiedene andere Linien in Vorschlag. Schon 1859 ertheilte die spanische Regierung dem Engländer Horace Perry Concession zu einer Linie zwischen der Pyrenäischen Halbinsel und Cuba; dieselbe sollte von Cadiz aus über Madeira, über die Canarischen und Cap Verde'schen Inseln (mit einer Abzweigung nach dem Senegal) nach der Insel Fernando Noronha vor der brasilischen Küste laufen, dieselbe bei Cap San Roque erreichen und von da südlich nach Rio Janeiro, nördlich nach der Mündung des Amazonenstroms und des Orinoco über die Antillen bis Cuba fortgesetzt werden; 1864 war in Spanien eine Gesellschaft mit 12 Millionen Thalern zur Ausführung dieser Linie in der Bildung begriffen und 1865 wurde diese Linie von A. de Marcoartu in London von Neuem angeregt (Wiecks deutsche Gewerbeztg. 1859, S. 432; *Shaffner, telegr. man.* S. 656; deutsche Ind.-Ztg. 1864, S. 309; 1865, S. 439). Ebenso wurde im Jahre 1866 ein älterer Plan, über die Azoren und Bermuden Amerika beim Cap St. Charles gegenüber dem

Fort Monroe in Virginia zu erreichen, wieder aufgenommen (*Shaffner, telegr. man.* S. 656; deutsche Ind.-Ztg. 1866, S. 439). Aehnlich ist der namentlich von Alberto Balestrini befürwortete Plan einer Linie von Paris nach Lissabon, von da zu Land nach der Südspitze Portugals (Cap St. Vincent), entlang der Küste Maroccos nach den Canarischen und Cap Verde'schen Inseln, Cap San Roque, Cayenne und Neu-Orleans, ebenfalls mit einer Zweiglinie nach St. Louis am Senegal und der Insel Goree (*Atlantic Telegr.* S. 104; deutsche Ind.-Ztg. 1863, S. 232; 1865, S. 349; 1866, S. 370). Ferner erhielt die französische Transatlantische Compagnie (Bowett, Senior & Tratter) von der französischen Regierung (und Anfang 1867 die Firma Orton & Co. vom Staate New-York) die Concession zur Anlage einer Linie von Brest über Cap Finisterre an der spanischen Küste nach einer der französischen Inseln St. Pierre oder Miquelon bei Neufundland (*Atlantic Telegr.* S. 105; deutsche Ind.-Ztg. 1864, S. 209 und 269). Endlich beabsichtigt Allan's Ocean Telegraph Company ein nach Allan's Principien hergestelltes Tau von Falmouth in Cornwall nach Oporto in Portugal oder Corunna an der Nordwestküste Spaniens zu legen und von da ein zweites über die Azoreninsel Flores nach Halifax in Neuschottland (deutsche Ind.-Ztg. 1863, S. 280; 1865, S. 379; 1866, S. 439; 1867, S. 99).

Nachträge: 1) Das Tau für die Behringsstrasse und die Anadyrbai ging im Februar 1866 von England ab.

2) Im August 1867 ertheilte die französische Regierung einer französisch-englischen Gesellschaft die Concession zur Verbindung Brests mit St. Pierre-Miquelon und es soll das Tau (zwischen Brest und Connecticut) durch den bereits hierzu gemietheten Great Eastern im Mai bis Juli 1868 versenkt werden (Leipziger Zeitung 1867, S. 4868).

3) Eine hübsche kurze Zusammenstellung auch der unterseeischen Telegraphen enthält das 19. Ergänzungsheft (S. 46 flg.) von Petermann's geographischen Mittheilungen.

4) Als besonderes Schriftchen erschien: *The North-Atlantic Telegraph, via the Faröe isles, Irelnad and Greenland. With map. London* 1861.

5) In England ist (nach *Les Mondes* 12, S. 230) der Plan ernstlich ins Auge gefasst worden, England unmittelbar mit seinen entferntesten Colonien durch unterseeische Taue zu verbinden. Die Länge derselben würde betragen:

von	Falmouth bis Gibraltar . .	1500 Kilometer,
„	Gibraltar bis Malta . . .	1500 „
„	Malta bis Alexandria . .	1200 „
„	Suez bis Aden	2000 „
„	Aden bis Bombay	2500 „
„	Gale bis Singapore . . .	2700 „
„	Singapore bis Hongkong .	2000 „
„	Gale bis zur Georgsstrasse .	5000 „
„	Australien bis Neuseeland .	1500 „
„	Aden bis zu den Seychellen	2000 „
„	den Seychellen bis Mauritius	1500 „
„	Mauritius bis Natal . . .	3000 „
„	Neufundland bis Bermudas	1600 „
„	Bermudas bis Westindien .	500 „

(Fortsetzung folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

XXIV. Ueber den Krümmungs-Schwerpunkt algebraischer Curven. Von Prof. CARL NEUMANN in Tübingen. Was den Beweis der im zweiten Heft (Seite 172) von mir angegebenen Sätze anbelangt, so erlaube ich mir nachträglich Folgendes hinzuzufügen.

Sind x, y die Coordinaten für irgend ein unendlich kleines Element ds der gegebenen Curve, und ist r der zugehörige Krümmungs-Radius, und sind endlich A_0, B_0 die Coordinaten des Krümmungs-Schwerpunktes der Curve, so ist:

$$1) \qquad A_0 = \frac{\int \frac{x\,ds}{r}}{\int \frac{ds}{r}}, \quad B_0 = \frac{\int \frac{y\,ds}{r}}{\int \frac{ds}{r}},$$

die Integration hinerstreckt über alle Elemente der Curve. Denken wir uns in den beiden Endpunkten eines solchen Elements ds die Normalen errichtet, so erhalten wir ein schmales gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis ds ist und dessen Schenkel den zugehörigen Krümmungs-Radius r repräsentiren. Bezeichnen wir daher den von den Schenkeln eingeschlossenen Winkel mit $d\omega$, so wird $ds = r\,d\omega$, mithin $\frac{ds}{r} = d\omega$. Hierdurch gehen die Formeln 1) über in:

$$2) \qquad A_0 = \frac{\int x\,d\omega}{\int d\omega}, \quad B_0 = \frac{\int y\,d\omega}{\int d\omega}.$$

Nach diesen Bemerkungen wenden wir uns zu unserem eigentlichen Gegenstand. Die gegebene Curve sei von der n^{ten} Ordnung und besitze also $n(n-1) = m$ parallele Tangenten. Ein solches System paralleler Tangenten hat m Berührungspunkte, deren Schwerpunkt unabhängig ist von der Richtung des Systems (nach dem Chasles-schen Satz. Vergl. Liouville, *Journal de math. t. VI, p.* 345). Die Coordinaten dieses Schwerpunktes mögen bezeichnet werden mit A, B. Es ist nachzuweisen, dass A, B identisch sind mit A_0, B_0.

Das System paralleler Tangenten befinde sich in beliebiger Lage. Sein Neigungswinkel gegen eine feste Axe (etwa gegen die x-Axe des

Coordinatensystems) sei $=\omega$, und seine m Berührungspunkte mögen bezeichnet werden mit $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots . x_m, y_m$. Nach der Definition von A, B ist alsdann:

$$3) \qquad A=\frac{x_1+x_2+\ldots.+x_m}{m}, \quad B=\frac{y_1+y_2+\ldots.+y_m}{m}.$$

Geben wir nun dem Tangentensystem statt der Richtung ω der Reihe nach die Richtungen $\omega+d\omega$, $\omega+2d\omega$, $\omega+3d\omega, \ldots.$, wo $d\omega$ einen beliebigen unendlich kleinen Winkel vorstellt, und bezeichnen wir die Werthe, welche die Coordinaten x_k, y_k hierbei successive annehmen, mit x'_k, y'_k, x''_k, y''_k, $x'''_k, y'''_k, \ldots.$, so werden wir, analog mit 3), folgende Formeln erhalten:

$$A=\frac{x_1+x_2+\ldots.+x_m}{m},$$
$$A=\frac{x'_1+x'_2+\ldots.+x'_m}{m},$$
$$A=\frac{x''_1+x''_2+\ldots.+x''_m}{m},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wir denken uns diese Gleichungen so weit fortgesetzt, bis das Tangentensystem durch successive Vermehrung des Winkels ω wieder zurückkehrt in seine anfängliche Lage, also so weit fortgesetzt, bis jeder der m Berührungspunkte die ganze Curve einmal durchlaufen hat. Wir denken uns sodann jede dieser Gleichungen mit $d\omega$ multiplicirt, und endlich alle diese Gleichungen zusammen addirt. Alsdann erhalten wir:

$$4) \qquad A\int d\omega=\frac{\int x_1\, d\omega+\int x_2\, d\omega+\ldots.+\int x_m\, d\omega}{m}.$$

Nach 2) ist aber:

$$\frac{\int x_1\, d\omega}{\int d\omega}=A_0, \quad \frac{\int x_2\, d\omega}{\int d\omega}=A_0, \ldots. \frac{\int x_m\, d\omega}{\int d\omega}=A_0.$$

Hierdurch geht die Formel 4) über in $A=A_0$. Und ebenso wird offenbar sich zeigen lassen, dass $B=B_0$ ist.

Hiermit ist der erste jener Sätze bewiesen. Die drei anderen Sätze lassen sich beweisen durch Anwendung derjenigen Methode, deren Liouville sich bedient hat in dem schon genannten Aufsatze (*L. Journal t. VI. p.* 345).

XXV. Ueber den Krümmungs-Schwerpunkt algebraischer Flächen. Von Prof. Carl Neumann in Tübingen. Denkt man sich eine gegebene Fläche als eine materielle Fläche von überall gleicher Dicke und von einer Dichtigkeit, welche an jeder Stelle dem Product der Hauptkrümmungs-Radien umgekehrt proportional ist, so mag der Schwerpunkt dieser

materiellen Fläche kurzweg genannt werden: der Krümmungs-Schwerpunkt der Fläche. Für diesen Punkt gilt, wenn die Fläche eine algebraische ist, folgender

Satz. Legt man parallel zu einer beliebig gewählten Ebene sämmtliche Tangentialebenen an die Fläche, so ist der Schwerpunkt der Berührungspunkte jederzeit identisch mit dem Krümmungs-Schwerpunkt der Fläche.

Beweis. Die gegebene Fläche sei von der n^{ten} Ordnung und besitze also $n(n-1) = m$ parallele Tangentialebenen. Ein solches System paralleler Tangentialebenen hat m Berührungspunkte, deren Schwerpunkt (dem Chasles'schen Satze zufolge) unabhängig ist von der Richtung des Systems. Die Coordinaten dieses Schwerpunktes mögen bezeichnet werden mit A, B, C.

Ausser der gegebenen Fläche denken wir uns (an irgend einer anderen Stelle des Raumes) eine mit dem Radius 1 beschriebene Halbkugelfläche. Diese mag durch irgend welche Curven in unendlich kleine Flächenelemente getheilt sein und eines derselben mit $d\omega$ bezeichnet werden.

Mit jedem Punkte π auf der Halbkugelfläche correspondiren m Punkte der gegebenen Fläche, nämlich diejenigen Punkte $p_1, p_2, \ldots . p_m$, in welchen die Tangentialebene der Fläche parallel ist mit der Tangentialebene der Halbkugelfläche im Punkte π. Lässt man den Punkt π längs des Randes von $d\omega$ einmal herumlaufen, so werden jene correspondirenden Punkte p_1, $p_2, \ldots . p_m$ ebenfalls kleine geschlossene Curven beschreiben auf der gegebenen Fläche. In solcher Weise ergeben sich die mit $d\omega$ correspondirenden Flächenelemente $do_1, do_2, \ldots . do_m$. Zwischen diesen Elementen finden (vergl. Gauss, *disquisitiones gen. circa superficies curvas*) die Relationen statt:

$$1)\qquad \frac{do_1}{R_1} = d\omega, \quad \frac{do_2}{R_2} = d\omega, \ldots . \frac{do_m}{R_m} = d\omega,$$

wo $R_1, R_2, \ldots . R_m$ das Product der Hauptkrümmungs-Radien für die Elemente $do_1, do_2, \ldots . do_m$ bezeichnen.

Sind $x_1, x_2, \ldots . x_m$ die x Coordinaten für m correspondirende Punkte innerhalb der betrachteten m Elemente, so ist nach der für A, B, C gegebenen Definition:

$$2)\qquad A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots . + x_m}{m},$$

oder was dasselbe ist:

$$3)\qquad Am\,d\omega = x_1\,d\omega + x_2\,d\omega + \ldots . + x_m\,d\omega,$$

oder, wenn man für $d\omega$ die Werthe 1) substituirt:

$$4)\qquad A\left(\frac{do_1}{R_1} + \frac{do_2}{R_2} + \ldots + \frac{do_m}{R_m}\right) = \frac{x_1\,do_1}{R_1} + \frac{x_2\,do_2}{R_2} + \ldots . + \frac{x_m\,do_m}{R_m}.$$

Nimmt man für $d\omega$ der Reihe nach alle Elemente der Halbkugelfläche, und bildet man jedesmal die entsprechende Gleichung 4), so liefert die Addition aller dieser Gleichungen:

$$A\int\frac{do}{R}=\int\frac{x\,do}{R}, \tag{5}$$

wo die Integration sämmtliche Elemente do der gegebenen Fläche (und jedes nur einmal) enthält. Mit 5) analoge Formeln werden sich offenbar ergeben für B und C. Hieraus aber folgt, dass der Punkt A, B, C identisch ist mit dem Krümmungs-Schwerpunkt der gegebenen Fläche.

Tübingen, 16. Juli 1867.

XXVI. Einfache Construction der Berührungslinien an die Lemniscate.

(Hierzu Taf. V, Fig. 9.) In einer interessanten Notiz über magnetische Curven im 3. Hefte dieses Bandes (S. 277—279) hat Herr P. Zech Anwendung von dem bipolaren Coordinatensysteme gemacht. Meines Wissens giebt es nur ein Lehrbuch, in welchem dieses System einigermaassen erörtert wäre: *Sturm*, *Cours d'Analyse de l'école polytechnique* (2ᵉ *édition. Paris* 1863) *Vol. I*, *pag.* 209 flg., woselbst auch in einer kurzen Nebenbemerkung von jenen Winkeln der Brennstrahlen mit der Verbindungslinie der beiden Brennpunkte die Rede ist, von welchen Herr C. W. Baur (nach Zech's Angabe) einen so eleganten Gebrauch zu machen wusste. Dieses Coordinatensystem, bei welchem jeder Punkt einer Curve durch seine Entfernungen u, v von zwei festen Punkten U, V gegeben wird; verdient in der That eine genauere Beachtung, als ihm bisher zu Theil geworden ist. Sturm leitet schon am angeführten Ort den geometrischen Sinn des ersten Differentialquotienten des einen Brennstrahles, nach dem anderen genommen, ab, und findet, wenn α, β die Winkel bedeuten, welche die Brennstrahlen u, v mit der Berührungslinie an dem durch sie gegebenen Punkte der Curve bilden, $\frac{du}{dv}=u'=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Er bedient sich dabei eines geometrischen Grenzüberganges, welcher analytisch sich etwa folgendermaassen übersetzen lässt. Nennt man Θ und ε die beiden Winkel, welche die Brennstrahlen mit der UV bilden, so ist nach bekannten Formeln aus der Anwendung gewöhnlicher Polarcoordinaten für den Bogen s:

$$\frac{ds}{d\Theta}=\sqrt{u^2+\left(\frac{du}{d\Theta}\right)^2}\quad\text{und}\quad\frac{du}{d\Theta}=\frac{u}{tg\,\alpha},$$

somit

$$\frac{ds}{d\Theta}=\frac{u}{\sin\alpha}$$

und mittelst Division durch $\frac{du}{d\Theta}$ auch

$$\frac{ds}{du}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Ebenso ist augenblicklich

$$\frac{ds}{dv}=\frac{1}{\cos\beta}.$$

Also endlich, wieder durch Division der beiden letztgeschriebenen Gleichungen

$$\frac{du}{dv}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Bei solchen Curven, deren Gleichungen mittelst Bipolarcoordinaten eine einfache Gestalt besitzen, führt die Roberval'sche Methode, Tangenten zu ziehen (so sagt Herr Zech a. a. O.), zu einfachen Constructionen der Tangenten. Auch dieses kann ich nur bestätigen, indem ich hinzufüge, dass seine Erläuterung dieses Ausspruches am Beispiele der Hyperbel fast wörtlich wiederholt werden kann, um allgemeine Geltung zu haben.

Es sei die Curve $F(u, v)=0$ gegeben und aus derselben der Differentialquotient $\frac{du}{dv}=u'$ bekannt. Sind u, v die Coordinaten des Punktes M, so werden $u+du$, $v+dv$ die Coordinaten eines unendlich nahe liegenden Punktes M' sein, welcher ebensowohl der Curve, als ihrer Berührungslinie in M angehört. Dieser Punkt wird somit erhalten werden können als Durchschnitt zweier Kreisbögen, welche von U aus mit dem Halbmesser $u+du$, von V aus mit dem Halbmesser $v+dv$ beschrieben werden. Um diese Halbmesser zunächst zu erhalten, verlängert man beide Brennstrahlen u und v über den Punkt M hinaus und nimmt auf der Verlängerung von v das unendlich kleine Stückchen $MM_1=dv$, auf der Richtung der u das gleichfalls unendlich kleine Stückchen $MM_2=du=u'.dv$, also naturgemäss entweder als Verlängerung über M hinaus oder als Verkürzung gegen den Brennpunkt U hin, je nachdem u' positiv oder negativ ist. Mit diesen Halbmessern werden also die Kreisbögen M_1M' und M_2M' beschrieben. Beide selbst unendlich kleine Kreisbögen können als Senkrechte auf die Richtung des jedesmal als Halbmesser dienenden in seiner Länge veränderten Brennstrahles angesehen werden. Geht man daher zu einem beliebigen Punkte T der Berührungslinien über und fällt aus ihm auf die Richtung der v und u die beiden Senkrechten TL_1 und TL_2, so entsteht ein Viereck ML_1TL_2, welches dem unendlich kleinen gemischtlinigen Vierecke $MM_1M'M_2$ ähnlich ist; es wird also auch die Proportion der endlichen Längen stattfinden müssen:

$$ML_1\,(=\Delta v):ML_2\,(=\Delta u)=1:u'.$$

Diese Proportion zum Ausgangspunkt der Zeichnung nehmend, hat man also nur v um ein beliebiges Δv bis L_1 zu verlängern, auf u von M aus $\Delta u=u'.\Delta v$ bis L_2 aufzutragen, und alsdann in L_1 und L_2 die Senkrechten zu den Brennstrahlen, auf welchen diese beiden Punkte selbst liegen, zu errichten. Der Durchschnittspunkt dieser Senkrechten wird ein Punkt T der Berührungslinie sein.

Die Construction vereinfacht sich nun häufig in ganz überraschender Weise, wenn das an sich beliebige $\Delta v = v$, $\Delta u = u'.v$ genommen wird.

Die Gleichung der Curve heisse

$$u = a \,.\, \log v,$$

folglich ist

$$u'.v = a,$$

d. h. um die Punkte L_1 und L_2 zu finden, in welchen die in T sich schneidenden Senkrechten errichtet werden, verlängert man den einen Brennstrahl um seine eigene Länge, den anderen um ein constantes Stück a.

In rechtwinkligen Coordinaten (UV als Absissenaxe, U als Anfangspunkt, die Entfernung der beiden Brennpunkte $UV = 0$) heisst die Gleichung dieser Curve

$$\frac{2}{a}\sqrt{x^2 + y^2} = \log\left[(x - c)^2 + y^2\right].$$

Zu einer praktisch äusserst bequemen Anwendung, welche gleichwohl noch nicht bekannt zu sein scheint, führt die obige Bemerkung bei der Lemniscate, deren Gleichung in bipolaren Coordinaten bekanntlich

$$u.v = a^2$$

heisst. Hier ist

$$u'.v = -u,$$

d. h. der Punkt L_2 fällt mit dem Brennpunkte U zusammen. Die Construction ist somit folgende: Man verlängert den einen Brennstrahl VM um ein ihm gleiches Stück ML_1 und erhebt in L_1 eine Senkrechte. Eine zweite Senkrechte zu dem anderen Brennstrahle UM errichtet man in dem demselben angehörenden Brennpunkte U. Der Durchschnittspunkt der beiden Senkrechten liegt auf der gesuchten Berührungslinie.

Cantor.

XXVII. Ueber orthogonale Trajectorien in bipolaren Coordinaten. (Vergl. Heft 3, Seite 277.) Es möge hier zu dem in obigem Artikel von meinem Collegen Zech mitgetheilten Verfahren, das ich angegeben habe, um von der Gleichung einer Curve in bipolaren Radien (r, r') auf die Gleichung ihrer rechtwinkligen Trajectorien in bipolaren Winkeln (φ, φ') überzugehen, ein anderer, von speciellen geometrischen Betrachtungen unabhängiger Beweis mitgetheilt werden.

In einem einfachen Polarcoordinatensystem sei wie gewöhnlich r der Radius und φ sein Azimuth, d. h. der Winkel, um welchen er im Sinne der positiven Drehung von der Polare abweicht, so wird, wenn man das Differentialzeichen d auf eine gegebene Curve, welche die Trajecte heissen möge, und das Zeichen ∂ auf ihre rechtwinklige Trajectorie

bezieht, die Bedingung des rechtwinkligen Schnittes durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$0 = 1 + r^2 \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{1}$$

Ist die Gleichung der Trajecte in bipolaren Radien, d. h. in den Abständen r und r' eines Curvenpunktes von zwei Polen O und O' gegeben und man will auch die Trajectorie durch eine derartige Gleichung bestimmen, so sind in 1) für $\frac{d\varphi}{dr}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ ihre Ausdrücke in $\frac{dr'}{dr}$ und $\frac{\partial r'}{\partial r}$ einzusetzen. Um diese zu entwickeln, hat man, wenn φ und φ' die Azimuthe von r und r' in Beziehung auf eine gemeinschaftliche, von O über O' hinaus gelegte Axenrichtung bedeuten und $OO' = m$ gesetzt wird:

$$r \cos\varphi - r' \cos\varphi' = m \tag{2}$$

$$r \sin\varphi - r' \sin\varphi' = 0. \tag{3}$$

Diese geben differentiirt:

$$\begin{aligned} & dr.\cos\varphi - r \sin\varphi.d\varphi - dr'.\cos\varphi' + r' \sin\varphi'.d\varphi' = 0 \\ & dr.\sin\varphi + r \cos\varphi.d\varphi - dr'.\sin\varphi' - r' \cos\varphi'.d\varphi' = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

woraus durch Elimination von $d\varphi'$:

$$dr.\cos(\varphi - \varphi') - r \sin(\varphi - \varphi') - dr' = 0.$$

Oder:

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{cotang}(\varphi - \varphi') - \operatorname{cosec}(\varphi - \varphi'). \frac{dr'}{dr}. \tag{5}$$

Diese Gleichung gilt nach Maassgabe des betreffenden Werths von $\frac{dr'}{dr}$ für jede Curve, sie kann deshalb, wie sie nach unserer Berechnung soeben für die Trajecte aufgestellt worden ist, eben sowohl auch für die Trajectorie aufgestellt werden und heisst dann:

$$r \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \operatorname{cotang}(\varphi - \varphi') - \operatorname{cosec}(\varphi - \varphi'). \frac{\partial r'}{\partial r}.$$

Vermöge dieser Ausdrücke geht 1) über in:

$$0 = 1 - \operatorname{cosin}(\varphi - \varphi') \left(\frac{dr'}{dr} + \frac{\partial r'}{\partial r} \right) + \frac{dr'}{dr} \cdot \frac{\partial r'}{\partial r}.$$

Oder:

$$\frac{\partial r'}{\partial r} = \frac{-dr + dr'.\operatorname{cosin}(\varphi - \varphi')}{+dr' - dr.\operatorname{cosin}(\varphi - \varphi')}. \tag{6}$$

Um demgemäss die Differentialgleichung der Trajectorien zu erhalten, wird man hier für $\frac{dr'}{dr}$ seinen Ausdruck aus der Differentialgleichung der Trajecten einsetzen und nöthigenfalls $\operatorname{cosin}(\varphi - \varphi')$ vermittelst der sich aus 2) und 3) ergebenden Beziehung

$$m^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')$$

eliminiren. Ueberhoben ist man dieser Elimination im bekannten Falle der confocalen Ellipsen und Hyperbeln; denn aus

$$r \mp r' = c$$

folgt

$$\frac{dr'}{dr} = \mp 1,$$

also nach 6)

$$\frac{\partial r'}{\partial r} = \frac{-1 \mp \cos(\varphi - \varphi')}{\mp 1 - \cos(\varphi - \varphi')} = \pm 1, \quad r \mp r' = C.$$

Um unter denselben Umständen für die Trajectorien eine Gleichung in φ und φ' zu erhalten, wird man in 1) zwar den Ausdruck für $\frac{d\varphi}{dr}$ in $\frac{dr'}{dr}$ nach 5), für $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ aber seinen Ausdruck in $\frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi}$ einsetzen. Um diesen zu entwickeln, erhält man durch Elimination von dr' zwischen 4):

$$dr \sin(\varphi - \varphi') + r\, d\varphi \cos(\varphi - \varphi') - r'\, d\varphi = 0,$$

oder in der Aufstellung für die Trajectorie:

$$8) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{r'}{r} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} . \operatorname{cosec}(\varphi - \varphi') - \operatorname{cotang}(\varphi - \varphi').$$

Gleichung 1) giebt daher in der Form:

$$0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi} + r \frac{d\varphi}{dr}$$

nach Einsetzung der Werthe aus 5) und 8):

$$9) \qquad 0 = \frac{r'}{r} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} - \frac{dr'}{dr}.$$

Hier ist zum Zweck der Herstellung der Differentialgleichung der Trajectorien in φ und φ' aus der Differentialgleichung der Trajecten $\frac{dr'}{dr}$ einzusetzen und r mit r' nöthigenfalls vermittelst 2) und 3) zu eliminiren.

Um beispielshalber auch dieses Verfahren auf die Nachweisung des gegenseitig trajectorischen Verhaltens zwischen confocalen Ellipsen und Hyperbeln anzuwenden, erhält man mit $r \pm r' = c$ oder $\frac{dr'}{dr} = \mp 1$ aus 9)

$$0 = \frac{r'}{r} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} \pm 1 = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} \pm 1$$

$$10) \qquad 0 = \frac{\partial \varphi'}{\sin \varphi'} \pm \frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{oder} \quad C = \operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} \cdot \left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^{\pm 1}.$$

Wofern man nicht schon in dieser Gleichung eine bekannte Eigenschaft der confocalen Hyperbel oder Ellipse erkennen will, so kann man von derselben auf die reciproke Beziehung zwischen r und r' so übergehen:

Vermöge der geometrischen Formel

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

kann man 10) auf die zwei Formen bringen:

$$C=\frac{1-\cos\varphi'}{\sin\varphi'}\cdot\frac{\sin\varphi}{1\pm\cos\varphi}=\frac{r'-r'\cos\varphi'}{r'\sin\varphi'}\cdot\frac{r\sin\varphi}{r\pm r\cos\varphi}=\frac{r'-r'\cos\varphi'}{r\pm r\cos\varphi}$$

$$C=\frac{\sin\varphi'}{1+\cos\varphi'}\cdot\frac{1\mp\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{r'\sin\varphi'}{r'+r'\cos\varphi'}\cdot\frac{r\mp r\cos\varphi}{r\sin\varphi}=\frac{r\mp r\cos\varphi}{r'+r'\cos\varphi'},$$

durch den Schluss nach dem Schema $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a'\mp a}{b'\mp b}$ also weiter:

$$C=\frac{r\mp r\cos\varphi\mp r'\pm r'\cos\varphi'}{r'+r'\cos\varphi'\mp r-r\cos\varphi}=\frac{r\mp r'\mp m}{\mp r+r'-m},$$

woraus:

$$r\mp r'=(\pm m)\left(\frac{1-C}{1+C}\right)^{\pm 1}=Const.$$

Stuttgart, im Juni 1867. C. W. Baur.

XXVIII. Beweis von Pohlke's Fundamentalsatz der Axonometrie. Von Dr. Th. Reye. Wird ein Körper durch parallele Strahlen auf eine beliebige Ebene projicirt, so kann die Projection desselben auf folgende Art axonometrisch gezeichnet werden. Wir beziehen den Körper auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und suchen zunächst die Projectionen der drei Coordinatenaxen, sowie die Verhältnisse, in welchen die drei Coordinaten irgend eines Punktes zu ihren resp. Projectionen stehen. Werden dann die Coordinaten eines beliebig gegebenen Punktes diesen drei Verhältnissen gemäss verändert und hernach parallel zu den resp. Projectionen der Axen und mit Berücksichtigung ihres Sinnes aneinandergesetzt, indem man vom Schnittpunkte der Axenprojectionen ausgeht, so erhalten wir eine aus den Projectionen der drei Coordinaten zusammengesetzte, gebrochene Linie, deren zweiter Endpunkt die Projection des gegebenen Punktes sein muss. Auf diese Weise können alle Eck- und Kantenpunkte des Körpers in der Ebene verzeichnet, also die Projection des Körpers und deren Umrisse gefunden werden. Wird diese Projection in beliebigem Maassstab vergrössert oder verkleinert, so erhalten wir ein neues Bild des Körpers, welches jener Parallelprojection ähnlich ist; dasselbe kann auf dieselbe Weise construirt werden, wie das erste, und heisst deshalb gleich diesem eine axonometrische Zeichnung des Körpers.

Herr Pohlke nun hat (in seiner „darstellenden Geometrie" pag. 113) zuerst den Satz aufgestellt, dass in der Projectionsebene die Richtung der drei Coordinatenaxen, sowie die Verhältnisse, in welchen die Coordinaten jedes Punktes zu ändern sind, bevor man sie aufträgt, (d. h. die Maassstäbe, nach denen man diese Coordinaten verzeichnet), ganz willkürlich angenommen werden können, und dass sogar irgend zwei von den drei Coordinatenaxen zusammenfallen oder eine derselben sich auf einen Punkt reduciren dürfe. Mit Recht wird dieser Satz als Fundamentalsatz

der Axonometrie bezeichnet; er giebt uns bei der Herstellung axonometrischer Zeichnungen alle nur wünschenswerthe Freiheit. Den ersten Beweis desselben (Vierteljahrschr. d. Naturf. Gesellsch. in Zürich 1861, pag. 254) verdanken wir Hrn. v. Deschwanden, welcher auch die grossen Vortheile, die der Satz dem Zeichner darbietet, gebührend hervorhebt. Herr Kinkelin hat (ebenda pag. 358) die an den Satz sich knüpfenden Aufgaben auf analytischem Wege gelöst und neuerdings hat Herr Schwarz (im 63. Bande des Journals für Mathematik) noch einen elementaren Beweis des Pohlke'schen Satzes gegeben. Die Wichtigkeit des Gegenstandes rechtfertigt wohl die Veröffentlichung eines neuen, von den bisherigen wesentlich verschiedenen Beweises.

Wir führen diesen Beweis durch Lösung der folgenden Aufgabe:

Ein Tetraeder $ABCD$ soll durch parallele Strahlen so auf eine beliebig zu wählende Ebene projicirt werden, dass seine Projection $A_2 B_2 C_2 D_2$ einem gegebenen Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ ähnlich wird.

Wenn nämlich diese Aufgabe ausführbar ist, so gilt der Pohlke'sche Satz nicht nur für rechtwinklige, sondern sogar für schiefwinklige Coordinatenaxen. Denn ein Tetraeder, dessen Kanten AB, AC, AD mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, lässt sich dann so projiciren, dass die Projectionen der Axen dieselben Winkel mit einander bilden, wie die beliebig gegebenen Geraden $A_1 B_1$, $A_1 C_1$, $A_1 D_1$; und weil die Strecken $A_1 B_1$, $A_1 C_1$ und $A_1 D_1$ willkürlich gegeben sind, so sind auch die Verhältnisse $\frac{AB}{A_1 B_1}$, $\frac{AC}{A_1 C_1}$, $\frac{AD}{A_1 D_1}$, in denen die Coordinaten sich ändern, ganz beliebig. Um zugleich die vorhin erwähnten besonderen Fälle des Pohlke'schen Satzes zu erledigen, wollen wir zulassen, dass im Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ der Eckpunkt B_1 auf die Seite $A_1 C_1$ oder auch auf den Punkt A_1 fallen dürfe, wobei das Viereck in ein Dreieck ausartet.

Wir wollen der deutlicheren Vorstellung wegen annehmen, dem Tetraeder sei im Raume eine bestimmte Lage gegeben, so dass wir nur die Richtung der parallelen Projectionsstrahlen und die Stellung der Projectionsebene zu suchen haben. Wenn nun unsere Aufgabe ausführbar, also das Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ einer Parallelprojection des Tetraeders ähnlich und somit eine Abbildung des letzteren ist, so kann leicht zu jedem Punkte P der Kante BD der entsprechende Punkt P_1 auf $B_1 D_1$ gefunden werden, und umgekehrt; denn durch P wird die Strecke BD in demselben Verhältniss getheilt, wie durch P_1 die Strecke $B_1 D_1$. Wenn also eine Projection von $ABCD$ dem Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ ähnlich ist, so ist zugleich die Projection des Tetraeders $APCD$ dem Vierecke $A_1 P_1 C_1 D$ ähnlich. Da wir so die Eckpunkte des Vierecks $A_1 B_1 C_1 D_1$ mit anderen Punkten der Ebene vertauschen können, so lassen sich die besonderen Fälle, in denen B_1 ent-

weder auf $\overline{A_1 C_1}$ oder in A_1 liegt, sofort auf den allgemeinen Fall zurückführen.

Ebenso leicht aber können wir statt des beliebigen Vierecks $A_1 B_1 C_1 D_1$ ein Parallelogramm einführen. Wir bestimmen auf der Seite $A_1 B_1$ oder deren Verlängerung einen Punkt B'_1, und auf $A_1 D_1$ einen Punkt D'_1 so, dass $B'_1 C_1 \parallel A_1 D_1$ und $D'_1 C_1 \parallel A_1 B_1$ ist und folglich $A_1 B'_1 C_1 D'_1$ ein Parallelogramm. Der Punkt B'_1, welcher die Seite $A_1 B_1$ im Verhältniss $\frac{A_1 B'_1}{B_1 B'_1}$ theilt, muss dann die Abbildung eines Punktes B' von AB sein, durch welchen diese Tetraederkante in demselben Verhältniss getheilt wird, und ebenso ergiebt sich zu D'_1 der entsprechende Punkt D' auf der Kante AD. Unser Problem wird also gelöst, indem wir von dem Tetraeder $AB'CD'$ eine Parallelprojection bestimmen, welche dem Parallelogramm $A_1 B'_1 C_1 D'_1$ ähnlich ist.

Wir dürfen somit, ohne die Allgemeinheit der Aufgabe zu beschränken, das Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ als Parallelogramm annehmen. Dann müssen die Projectionen der Tetraederkanten AB und CD und folglich auch die projicirenden Ebenen derselben einander parallel sein, und ebenso muss die projicirende Ebene von BC parallel zu AD und diejenige von AD parallel zu BC sein. Diese vier projicirenden Ebenen sind hiernach leicht zu construiren; sie schneiden einander in den vier parallelen Strahlen a, b, c, d, durch welche die resp. Eckpunkte A, B, C, D des Tetraeders projicirt werden. Die Richtung der Projectionsstrahlen ist also völlig bestimmt; sie ist zugleich diejenige einer Geraden, welche die Halbirungspunkte der Tetraederkanten AC und BD mit einander verbindet; denn die Abbildungen dieser Halbirungspunkte fallen beide auf den Punkt, in welchem die Diagonalen $A_1 C_1$ und $B_1 D_1$ des Parallelogramms $A_1 B_1 C_1 D_1$ sich schneiden.

Die Projectionsstrahlen a, b, c, d sind die Kanten eines prismatischen Raumes, welcher von jeder Transversalebene in einem Parallelogramm $A_2 B_2 C_2 D_2$ geschnitten wird. Es gilt nun, eine Schnittebene so zu legen, dass dieses Parallelogramm dem gegebenen $A_1 B_1 C_1 D_1$ ähnlich wird; denn zu einer solchen Schnittebene ist die gesuchte Projectionsebene parallel. Zu dem Ende brauchen wir nur die drei Ebenen ab, ac und ad so zu schneiden, dass die entstehenden Schnittlinien $A_2 B_2$, $A_2 C_2$ und $A_2 D_2$ dieselben Winkel mit einander bilden, wie die gegebenen Geraden $A_1 B_1$, $A_1 C_1$ und $A_1 D_1$; dann haben nämlich die Dreiecke $A_2 B_2 C_2$ und $A_1 B_1 C_1$ gleiche Winkel, und die Parallelogramme $A_2 B_2 C_2 D_2$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$ sind ähnlich. Beziehen wir den Ebenenbüschel a projectivisch auf den Strahlenbüschel A_1, so dass den Ebenen ab, ac, ad die resp. Strahlen $A_1 B_1$, $A_1 C_1$ $A_1 D_1$ entsprechen, so ist also folgende nicht unwichtige Aufgabe der synthetischen Geometrie zu lösen:

Ein Ebenenbüschel $a\,(bcd)$ soll so durch eine Ebene geschnitten werden, dass der entstehende Strahlenbüschel $A_2\,(B_2C_2D_2)$ einem gegebenen, zu jenem projectivischen Strahlenbüschel $A_1\,(B_1C_1D_1)$ gleich wird. Oder: Ein Strahlenbüschel $A_1\,(B_1C_1D_1)$ soll auf einen zu ihm projectivischen Ebenenbüschel $a\,(bcd)$ gelegt werden, so dass der erstere als Schnitt des letzteren erscheint.

Wir schneiden zunächst den Ebenenbüschel $a\,(bcd)$ durch eine zur Axe a senkrechte Ebene in einem Strahlenbüschel $A'\,(B'C'D')$. Ist nun dieser dem Büschel $A_1\,(B_1\,C_1\,D_1)$ projectivisch gleich, so ist die Aufgabe gelöst; wo nicht, so giebt es im Büschel A' ein einziges Paar zu einander senkrechter Strahlen $A'M'$ und $A'N'$, deren entsprechende A_1M_1 und A_1N_1 gleichfalls auf einander senkrecht stehen. (Vergl. Steiner, system. Entwickelung etc. pag. 31.) Um diese Strahlen zu finden, bringen wir die Strahlenbüschel in perspectivische Lage, indem wir sie in dieselbe Ebene und zwei einander entsprechende Strahlen auf einander legen, bestimmen sodann ihren perspectivischen Durchschnitt u und legen durch die Mittelpunkte A' und A_1 einen Kreis, dessen Centrum auf u liegt. Die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden u werden aus A' und A_1 durch die gesuchten Schenkel der entsprechenden rechten Winkel $M'A'N'$ und $M_1A_1N_1$ projicirt. Die Ebenen am und an des Büschels a, in welchen die resp. Strahlen $A'M'$ und $A'N'$ liegen, stehen ebenfalls auf einander senkrecht.

Soll nun der Strahlenbüschel $A_1\,(B_1C_1D_1)$ so auf den Ebenenbüschel $a\,(bcd)$ gelegt werden, dass der erstere als Schnitt des letzteren erscheint, und soll zugleich A_1 mit A' zusammenfallen, so müssen entweder die Strahlen A_1M_1 und $A'M'$ oder die Strahlen A_1N_1 und $A'N'$ zur Deckung gebracht werden; denn nur dann kann der rechte Winkel $M_1A_1N_1$ in den ihm entsprechenden rechten Flächenwinkel man hineingelegt werden. Nun ist von den spitzen Winkeln $M'A'B'$ und $B'A'N'$, welche zusammen den rechten Winkel $M'A'N'$ ausmachen, der eine grösser und der andere kleiner, als der entsprechende $M_1\,A_1\,B_1$ oder $B_1\,A_1\,N_1$, weil auch $M_1\,A_1\,B_1 + B_1\,A_1\,N_1 = 90^0$. Sei etwa

$$M'A'B' < M_1\,A_1\,B_1,$$

so muss $A_1\,M_1$ mit $A'M'$ zur Deckung gebracht und der Winkel $M_1\,A_1\,B_1$ um diesen Schenkel $A_1\,M_1$ gedreht werden, bis der bewegliche Schenkel $A_1\,B_1$ in die ihm entsprechende Ebene ab fällt. Wir erhalten so zwei Stellungen für die Ebene des Büschels A_1, und dieselben sind symmetrisch zur Axe des Ebenenbüschels a. Da für jede dieser Stellungen die drei Strahlen $A_1\,M_1$, $A_1\,B_1$ und $A_1\,N_1$ in ihren entsprechenden Ebenen liegen, so fällt jeder Strahl von A_1 in die ihm entsprechende Ebene und der

Strahlenbüschel A_1 stellt sich dar als Schnitt des Ebenenbüschels a. Unsere Aufgabe hat also zwei Lösungen.

Für die Hauptaufgabe und damit auch für den Pohlke'schen Satz ergiebt sich, dass die Richtung der Projectionsstrahlen durch die Lage des Tetraeders und die Form seines Bildes völlig bestimmt ist, dass dagegen die Projectionsebene zwei verschiedene, zu den Projectionsstrahlen symmetrische Stellungen annehmen kann. Nur wenn die Projection orthogonal ausfällt, erhalten wir ausnahmsweise eine einzige Stellung für die Projectionsebene.

Nachdem so die Lösbarkeit unserer Aufgabe nachgewiesen ist, können wir auch direct aus den gegebenen Stücken die Richtung der Projectionsstrahlen und die Stellung der Projectionsebene finden, ohne erst ein Parallelogramm in der Bildfläche zu Hilfe zu nehmen. Sei wieder die Abbildung des Tetraeders $ABCD$ ein ganz beliebiges Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$. Dann ist der Punkt Q_1, in welchem die Gegenseiten $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$ des Vierecks sich schneiden, die Abbildung eines Punktes von AB und gleichzeitig eines Punktes von CD, und diese beiden Punkte lassen sich construiren mittelst der Theilungsverhältnisse $\frac{A_1 Q_1}{B_1 Q_1}$ und $\frac{C_1 Q_1}{D_1 Q_1}$. Die Verbindungslinie q dieser beiden Punkte giebt offenbar die Richtung der Projectionsstrahlen an, weil zwei und folglich alle Punkte dieser Linie sich in Q_1 abbilden. Ebenso finden wir zu den Punkten R_1 und S_1, in welchen die Seiten $A_1 C_1$ und $A_1 D_1$ des Vierecks von den resp. gegenüberliegenden Seiten $B_1 D_1$ und $B_1 C_1$ geschnitten werden, zwei Strahlen r und s, welche zu den Projectionsstrahlen parallel sind, weil zwei und folglich alle Punkte derselben in resp. R_1 und S_1 sich abbilden. Der prismatische Raum, von welchem die Projectionsstrahlen q, r, s die drei Kanten sind, muss dann durch eine Transversalebene so geschnitten werden, dass das entstehende Dreieck $Q_2 R_2 S_2$ dem Dreieck $Q_1 R_1 S_1$ ähnlich wird. Zu der Schnittebene, deren Construction oben angegeben worden ist und für welche wir zwei verschiedene Stellungen erhalten, ist sodann die Projectionsebene parallel.

Sobald wir von den Strahlen p, q, r nur zwei Punkte kennen, so ist deren Lage im Tetraeder und folglich auch das Verhältniss, in welchem jede Tetraederkante von ihnen getheilt wird, völlig bestimmt. Daraus folgt beiläufig der Satz:

> „Sind von den Verhältnissen, in welchen die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks $A_1 B_1 C_1 D_1$ sich gegenseitig theilen, irgend zwei gegeben, so sind dadurch die übrigen vier völlig bestimmt."

(Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Gesellsch. in Zürich.)

XXIX. Ueber das Brechungsgesetz. Auf Seite 176 des gegenwärtigen Bandes dieser Zeitschrift findet sich eine Notiz von Herrn Dr. Kahl über einen elementaren Beweis des Satzes, dass das Minimum der Ablenkung der Lichtstrahlen im Prisma bei gleichem Einfalls- und Austrittswinkel stattfinde. Ich nehme davon Veranlassung, den folgenden Beweis mitzutheilen, der wohl nichts an Einfachheit zu wünschen übrig lässt.

Es seien a und b Einfalls- und Austrittswinkel des Strahles, a' und b' die zugehörigen Winkel des Strahles innerhalb des Prismas mit den Normalen aber $a > b$, dann ist $a' + b'$ gleich dem brechenden Winkel des Prisma $a + b = a' + b' + D$, von D die Ablenkung $\sin a = n \sin a'$, $\sin b = n \sin b'$

$$1)\quad \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = n\sin\frac{a'+b'}{2}\cos\frac{a'-b'}{2}$$

$$2)\quad \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} = n\cos\frac{a'+b'}{2}\sin\frac{a'-b'}{2}$$

$$3)\quad \operatorname{tang}\frac{a-b}{2}\,.\,\operatorname{tang}\frac{a'+b'}{2} = \operatorname{tang}\frac{a'-b'}{2}\,.\,\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}.$$

Da $a + b > a' + b'$, so ist nach 3) $a - b > a' - b'$, wenn nicht $\operatorname{tang}\frac{a-b}{2} = \operatorname{tang}\frac{a'-b'}{2} = 0$; also nach 1) $\sin\frac{a+b}{2} > n\sin\frac{a'+b'}{2}$, und es erhält die Ablenkung den kleinsten Werth wenn $\sin\frac{a+b}{2} = n\sin\frac{a'+b'}{2}$.

Dies findet aber nur statt, wenn $a - b = 0 = a' - b'$.

F. Eisenlohr.

XXX. Ueber die ringförmige Sonnenfinsterniss am 6. März dieses Jahres in Dalmatien. Von Dr. E. Weiss. Die Zone der Ringförmigkeit dieser Finsterniss durchzog unter anderen Ländern auch die Südspitze Dalmatiens, und es bewog dieser Umstand den Director der Küstenvermessung, Fregattencapitän Oesterreicher, den Antrag zu stellen, es möge der Kriegsdampfer „Fiume“ ausgerüstet und nach Dalmatien gesendet werden, um einem grösseren Kreise von Naturforschern die Beobachtung dieses interessanten und wichtigen Phänomenes zu erleichtern. Diesen Antrag unterstützte der Vorstand der Marine-Centralkanzlei, Linienschiffscapitän R. v. Wipplinger, und es kam dadurch eine Sonnenfinsterniss-Expedition zu Stande, an der ausser dem Vortragenden von Wien aus noch Dr. Th. Oppolzer und Oberlieutenant R. v. Sterneck, ferner von Triest aus Professor Osnaghi und Major Skuppa Theil nahmen. Ausserdem hatte noch das gesammte Offiziercorps des Kriegsdampfers seine Mitwirkung bei den Beobachtungen zugesagt.

Die Mitglieder der Expedition übertrugen die Leitung des astronomischen Theiles derselben dem Verfasser, welcher die gute Gelegenheit,

die ihm die Vereinigung so vieler tüchtiger Kräfte darbot, benützte, nicht nur die gewöhnlichen Beobachtungen bei Sonnenfinsternissen ausführen zu lassen, sondern auch die genaue Bestimmung der Lage und Breite der Zone der Ringförmigkeit anzustreben. Zu diesem Zwecke wurden die Beobachter in drei grössere Gruppen getheilt, und davon eine unter der Leitung von Oberlieutenant R. v. Sterneck nach Antivari an die südliche, und eine zweite unter der Leitung von Linienschiffsfähnrich Riha in die Nähe von Ragusa an die nördliche Grenzlinie der Ringförmigkeit gesendet. Die dritte Gruppe, bei welcher ausser dem Schiffscommandanten Fregattencapitän Oesterreicher noch Dr. Th. Oppolzer, Prof. Osnaghi, Major Skuppa und der Verfasser nebst mehreren Schiffsoffizieren sich befanden, stellte sich am Eingange der Bocca di Cattaro auf.

Leider verhinderte die Ungunst des Wetters sowohl in der Centrallinie als auch auf der südlichen Station jede eigentliche Beobachtung; allein trotzdem war das Unternehmen kein fruchtloses, sondern lieferte so viele wichtige Resultate, wie bisher wenig Sonnenfinsterniss-Expeditionen, da die nördliche Station glücklicher war, als die beiden anderen.

Zuerst gelang es den Beobachtern auf derselben, die Lage der nördlichen Grenzlinie der Ringförmigkeit festzustellen. Sie wich von der berechneten nur um ¾ geographische Meile nach Norden ab, und es ist die Möglichkeit, mit einer solchen Präcision den relativen Lauf von Sonne und Mond vorausberechnen zu können, wohl einer der sprechendsten Beweise für die hohe Ausbildung, deren sich sowohl die praktische, als auch die theoretische Astronomie erfreut.

Ueberdies sahen die Beobachter an der nördlichen Station fast alle Phänomene, die man bisher bei totalen Sonnenfinsternissen bemerkt hat. Bei weitem die wichtigste Beobachtung ist jedoch die einer Protuberanz vom Leiter der Station, Linienschiffsfähnrich Riha durch volle 29 Minuten, eine Beobachtung, die einzig in ihrer Art dasteht. Die Finsterniss hatte, als er die Protuberanz das erste Mal wahrnahm, nach der üblichen Zählweise erst eine Grösse von 10,1 Zoll, bei der bisher noch Niemand daran dachte, sich schon um Protuberanzen umzusehen, und als er die Protuberanz das letzte Mal erblickte, war die Finsterniss bereits wieder zu einer zehnzölligen herabgesunken, und da entschwand sie seinen Augen noch nicht wegen Lichtschwäche, sondern wegen eintretender Bewölkung. Durch diese Beobachtung erfahren wir also, dass die Protuberanzen auch bei grösseren partiellen Sonnenfinsternissen gesehen werden können. Sie verdient indess noch in einer anderen Richtung eine besondere Beachtung. Es ist längst als erwiesen anzusehen und die Beobachtungen bei dieser Finsterniss haben neue Bestätigungen dafür beigebracht, dass die Protuberanzen dem Sonnenkörper angehörige Gebilde seien. Näheres über ihre eigentliche Natur und ihren Zusammenhang mit den verschiedenen Vorgängen auf der Sonnenoberfläche wissen wir aber so gut wie Nichts,

und es dürfte auch noch eine lange Zeit vergehen, ehe wir darüber Aufschluss erhalten werden, wenn es nicht gelingt, Protuberanzen ausser bei Sonnenfinsternissen auch bei anderen häufiger sich wiederholenden Anlässen zu beobachten. Als solche hat schon vor Jahren Dir. v. Littrow auf Sonnen-Auf- und Untergänge im Meere hingewiesen; allein der Vorschlag scheint bis jetzt nicht genügend gewürdigt worden zu sein, wahrscheinlich weil man das Suchen nach Protuberanzen bei solchen Gelegenheiten für vergeblich hielt. Die Wahrnehmung Riha's lässt jedoch gar nicht daran zweifeln, dass dabei grössere Protuberanzen sichtbar werden müssen; es wäre daher sehr zu wünschen, dass diese Beobachtung die Küstenbewohner veranlassen möchte, den Vorschlag von Director v. Littrow zu beherzigen, und bei klaren Auf- und Untergängen der Sonne im Meere eifrig nach Protuberanzen zu suchen: ihre darauf verwendete Mühe wäre gewiss keine vergebliche, sondern sicher vom besten Erfolge begleitet, wie eine Beobachtung von Tacchini am 8. August 1865 beweist. (Wien. Akad.)

XVIII.

Ueber „begrenzte" Derivationen und deren Anwendung.

Von

Dr. Anton Karl Grünwald,
Docent der Mathematik am Polytechnikum zu Prag.

Der französische Mathematiker Liouville veröffentlichte bekanntlich im Jahre 1832 im *Journal de l'Ecole polytechnique* (*Tome XIII, Cahier XXI*) zwei wichtige Arbeiten unter dem Titel: „*Memoire sur quelques Questions de Géometrie et de Mécanique et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quesions*" und „*Memoire sur le Calcul des Différentielles à Indices quelconques*", in welchen er einen neuen Calcul mit Differentialquotienten mit beliebigem Index einführt und anwendet. In dem zuerst eingeführten Mémoire erklärt sich der Verfasser über den Begriff, welchen man sich nach seiner Ansicht über die Bedeutung von Differentialquotienten mit beliebigem Index zu machen habe, in folgender Weise (siehe II, p. 3):

„*Voici la notion exacte qu'on doit, suivant moi, se former des différentielles à indices quelconques. Je suppose que y représente une fonction de x, et je développe cette fonction en une série d'exponentielles telle que*

$$A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + A_3 e^{m_3 x} + etc.$$

ou pour abréger: $\Sigma A_m e^{mx}$. *Cela posé, je nomme différentielle ou plutôt dérivée de y de l'ordre* μ *la fonction que l'on déduit de y, en multipliant chaque terme* $A_m e^{mx}$ *de la série par la puissance* μ *de l'exposant correspondant ou par* m^μ, *et j'exprime cette dérivée par* $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$. *J'ai ainsi*

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \Sigma A_m e^{mx} m^\mu.$$

Quelquefois et surtout lorsque μ *est négativ, je dénote* $\Sigma A_m e^{mx} m^\mu$ *par* $\int^{-\mu} y\, dx^{-\mu}$ *et j'appelle alors cette quantité „integral de l'ordre* $-\mu$".

Die hier angeführte Definition der Differentialquotienten mit beliebigem Index setzt eine besondere Form der Function y voraus, und ist

streng genommen nur dann anwendbar, wenn und insofern als y in eine convergente Reihe von der Form

$$A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + A_3 e^{m_3 x} + \text{ etc.}$$

entwickelt werden kann. Dieser Umstand war es zunächst, welcher mich vor mehreren Jahren veranlasste, denselben Gegenstand von einem neuen Gesichtspunkte aus selbstständig zu behandeln.

Ich fand, dass es nicht blos nicht nothwendig ist, die Definition der Differentialquotienten mit beliebigem Index von einer besonderen Form der Function abhängig zu machen, sondern dass man sogar durch Einführung eines neuen Begriffes „der begrenzten Derivationen eines beliebigen Index" (einer Verallgemeinerung des Begriffes der begrenzten Integrale) einen viel umfassenderen Calcul erhält, als es der Liouville'sche ist; einen Calcul, mittelst dessen viel allgemeinere Probleme der reinen und angewandten Analysis gelöst werden können.

Diesen neuen Calcul unterbreite ich in den folgenden Blättern nebst Proben seiner Anwendung dem Urtheile der Mathematiker.

I.

Wir denken uns alle Punkte in der Ebene des Papieres auf ein Polarcoordinatensystem bezogen, dessen Ursprung der Punkt O, dessen Axe (zugleich die die Axe reellen positiven Abscissen) OX ist, und stellen nach dem Vorgange unseres unsterblichen Gauss jede complexe Grösse $x = r(\cos\lambda + \sin\lambda\sqrt{-1})$ durch den Endpunkt eines Radius vector dar, dessen Länge dem Modulus r, dessen Polarwinkel der Amplitude λ gleich ist.

Ist $y = f(x)$ eine beliebige Function der unabhängigen Variablen x, und beschreibt der unabhängig bewegliche Punkt x eine beliebige Curve in der Ebene des Polarcoordinatensystems, so beschreibt der abhängig bewegliche Punkt y eine von jener abhängige Curve in derselben Ebene. Wir nennen in diesem Falle den Inbegriff (geometrischen Ort) der von dem unabhängig veränderlichen Punkte x durchlaufenen Stellen das „Argument-" oder „x-Gebiet"; den Inbegriff der von dem abhängigen Punkte y durchlaufenen correspondirenden Punkte hingegen das (jenem x-Gebiete entsprechende) „Functions-" oder „y-Gebiet"; den Anfangspunkt, von welchem aus der Punkt x seine Curve zu beschreiben beginnt „die untere", den Endpunkt, bei welchem er dieselbe allenfalls zu beschreiben aufhört, „die obere Grenze des Argumentgebietes".

Wir ziehen jedoch in den folgenden Blättern ausschliesslich nur geradlinige Bewegungen des Punktes x und die ihnen entsprechenden im Allgemeinen krummlinigen des Punktes y in Betracht und beschränken uns ausserdem noch auf solche geradlinige Argumentgebiete, innerhalb welcher die Function $y = f(x)$ endlich und stetig bleibt.

Sei $\delta = \varepsilon e^{\varphi\sqrt{-1}} = \varepsilon(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$ eine unabhängige Grösse, deren Richtungscoefficient $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ constant, sonst aber beliebig, und deren Modu-

lus ε eine unendlich klein werdende Grösse ist; ferner sei n eine endliche oder unendlich gross werdende positive ganze Zahl, und $x - n\delta = u$ ein beliebiger Punkt der Ebene, von welchem aus der variable Punkt x die in einer unter dem Winkel φ $(o \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ gegen die positive Abscissenaxe gezogenen Geraden liegenden Punkte

$$x - n\delta = u, \quad x - \overline{n-1}\,\delta, \quad x - \overline{n-2}\,\delta, \ldots . \; x - 2\delta, \quad x - \delta, \quad x$$

durchläuft, wobei der abhängige Punkt $y = f(x)$ beziehungsweise durch die Punkte

$$f(x - n\delta) = f(u), \; f(x - \overline{n-1}\,\delta), \; f(x - \overline{n-2}\,\delta), \ldots . f(x - 2\delta), \; f(x - \delta), \; f(x)$$

hindurchgeht.

Die aufeinanderfolgenden nach der Unabhängigen x genommenen Differentialquotienten können nun, wie bekannt, als die von x allein, nicht aber von δ abhängigen Grenzwerthe definirt werden, welchen die Ausdrücke

$$\frac{f(x) - f(x - \delta)}{\delta}$$

$$\frac{f(x) - 2f(x - \delta) + f(x - 2\delta)}{\delta^2}$$

$$\frac{f(x) - 3f(x - \delta) + 3f(x - 2\delta) - f(x - 3\delta)}{\delta^3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unaufhörlich zustreben, wenn δ unendlich klein wird.

Der Ausdruck

$$\frac{f(x) - \binom{\nu}{1} f(x - \delta) + \binom{\nu}{2} f(x - 2\delta) - \binom{\nu}{3} f(x - 3\delta) + \ldots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} f(x - \nu\delta)}{\delta^\nu},$$

welcher für ganze positive ν und verschwindende δ den ν^{ten} Differentialquotienten $\dfrac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}$ definirt, ist offenbar in dem allgemeineren Ausdrucke

$$\frac{f(x) - \binom{\xi}{1} f(x - \delta) + \binom{\xi}{2} f(x - 2\delta) - \binom{\xi}{3} f(x - 3\delta) + \ldots + (-1)^n \binom{\xi}{n} f(x - n\delta)}{\delta^\xi},$$

in welchem $\xi = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ eine beliebige im Allgemeinen complexe Grösse vorstellt, deren realer Bestandtheil und Modulus beziehungsweise α und $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ist, als besonderer Fall enthalten, da er aus ihm hervorgeht, sobald ξ der ganzen positiven Zahl ν gleich gesetzt wird. Dieser Umstand veranlasst uns, den letzterwähnten Ausdruck vor Allem einer eingehenden Discussion zu unterwerfen.

Wir betrachten denselben als eine Function von blos vier Grössen, nämlich von u, x, ξ und δ, da die fünfte in ihm vorkommende Grösse n mittelst der Gleichung

$$1)\qquad x - n\delta = u; \quad n = \frac{x-u}{\delta}$$

durch x, u und δ ausgedrückt werden kann; und bezeichnen ihn mit

$$F[u, x, \xi, \delta]_f,$$

indem wir durch das rechts unten angehängte Functionszeichen f andeuten, dass die Beschaffenheit des Ausdruckes von der Beschaffenheit der Function $f(x)$ abhängig ist. Wir setzen also:

$$2)\qquad F(u, x, \xi, \delta)_f = \Sigma_{p=0}^{p=n}(-1)^p \binom{\xi}{p} \frac{f(x-p\delta)}{\delta^\xi}$$

$$= \frac{f(x) - \binom{\xi}{1} f(x-\delta) + \binom{\xi}{2} f(x-2\delta) - \binom{\xi}{3} f(x-3\delta) + \ldots + (-1)^n \binom{\xi}{n} f(x-n\delta)}{\delta^\xi},$$

wobei sich das Summenzeichen Σ selbstredend auf die von $p=0$ bis $p=n$ variirende positive ganze Zahl p bezieht. Ausserdem bezeichnen wir in den folgenden Entwickelungen den Modulus und reellen Bestandtheil irgend einer complexen Grösse R beziehungsweise durch

$$mod\ R \text{ und } real\ R.$$

A) Wendet man den bekannten Satz:

„der Modulus einer Summe ist stets kleiner, als die Summe der Moduln der einzelnen Summanden"

auf den Ausdruck 2) an, und berücksichtigt dabei, dass wegen Gleichung 1) und wegen $\xi = \alpha + \beta\sqrt{-1}$

$$mod\,(\delta^\xi) = mod\left[\left(\frac{x-u}{n}\right)^\xi\right] = n^{-\alpha}\, mod\,[(x-u)^\xi]$$

ist, so erhält man die Ungleichheit:

$$mod\, F[u, x, \xi, \delta]_f < \frac{1}{mod\,[(x-u)^\xi]}\, \Sigma_{p=0}^{p=n}\, n^\alpha\, mod \binom{\xi}{p} . mod\, f(x-p\delta).$$

Sei „$mod \binom{\xi}{r}$" der grösste unter den $(n+1)$ Moduln:

$$a)\quad mod\binom{\xi}{0},\quad mod\binom{\xi}{1},\quad mod\binom{\xi}{2},\quad mod\binom{\xi}{n-1},\quad mod\binom{\xi}{n}$$

und M der grösste der Moduln:

$$b)\quad mod\, f(x),\quad mod\, f(x-\delta),\ mod\, f(x-2\delta)\ldots mod\, f\binom{\xi}{n-1},\quad mod\, f\binom{\xi}{n}.$$

Setzt man im rechten Theile der obigen Ungleichheit für jeden einzelnen Modulus der Reihe a) den grössten derselben: $mod\binom{\xi}{r}$, und gleichzeitig für jeden einzelnen Modulus der Reihe b) den grössten unter ihnen: M, so ist um so mehr:

$$3)\qquad mod\, F[u, x, \xi, \delta]_f < \frac{n^\alpha (n+1)}{mod\,[(x-u)^\xi]}\, mod\binom{\xi}{r} \times M.$$

Um nun $mod\binom{\xi}{r}$ zu bestimmen, ziehen wir den Quotienten

$$\frac{mod\binom{\xi}{p+1}}{mod\binom{\xi}{p}}$$

in Betracht, in welchem p irgend eine der natürlichen Zahlen

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3\ldots.n$$

vorstellt. Es ist aber

$$\frac{mod\binom{\xi}{p+1}}{mod\binom{\xi}{p}}=\frac{mod\,(\xi-p)}{p+1}=\sqrt{\frac{(\alpha-p)^2+\beta}{(p+1)^2}};$$

mithin ist

$$mod\binom{\xi}{p+1}>mod\binom{\xi}{p},$$

wenn

$$(\alpha-p)^2+\beta^2>(p+1)^2,$$

d. h. wenn

4 a) $$\alpha^2+\beta^2-1>2p\,(\alpha+1),$$

hingegen

4 b) $$mod\binom{\xi}{p+1}>mod\binom{\xi}{p},\text{ wenn }\alpha^2+\beta^2-1<2p\,(\alpha+1).$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

erstens

$$\alpha+1\leqq 0,\text{ folglich }\alpha\leqq-1,\ \alpha^2>1\text{ und }\alpha^2+\beta^2-1>0,$$

zweitens

$$\alpha+1>0,\text{ folglich }\alpha>-1.$$

Erster Fall: $(\alpha+1)\leqq 0$, folglich $\alpha^2+\beta^2-1>0$. Die Ungleichheit 4 a), somit auch die Ungleichheit

$$mod\binom{\xi}{p+1}>mod\binom{\xi}{p}$$

ist für jedes p giltig, d. h. es ist

$$mod\binom{\xi}{n}>mod\binom{\xi}{n-1}>mod\binom{\xi}{n-2}>\ldots.>mod\binom{\xi}{1}>mod\binom{\xi}{0}.$$

Der grösste unter den Moduln

$$mod\binom{\xi}{0},\ mod\binom{\xi}{1},\ mod\binom{\xi}{2}\ldots.mod\binom{\xi}{n},$$

welchen wir oben mit $mod\binom{\xi}{r}$ bezeichneten, ist sonach in diesem Falle der Modulus $\binom{\xi}{n}$.

5 a) $$mod\binom{\xi}{r}=mod\binom{\xi}{n}\text{ für }\alpha\leqq-1.$$

Zweiter Fall: $\alpha+1>0$ oder $\alpha>-1$. Die kleinste positive ganze Zahl (mit Einschluss der Null), welche noch grösser ist, als $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2(\alpha+1)}$, ist zugleich der kleinste Werth von p, für welchen die Un-

gleichheit 4b): $\alpha^2+\beta^2-1<2p(\alpha+1)$, mithin auch die Ungleichheit $mod\binom{\xi}{p+1}<mod\binom{\xi}{p}$ besteht. Bezeichnen wir dieselbe mit dem Buchstaben ν, so ist nach dem Gesagten

$$mod\binom{\xi}{p+1}<mod\binom{\xi}{p} \text{ für } p\geqq\nu,$$

hingegen

$$mod\binom{\xi}{p+1}>mod\binom{\xi}{p} \text{ für } p<\nu,$$

d. h. $mod\binom{\xi}{\nu}$ ist der grösste unter den Moduln

$$mod\binom{\xi}{0},\quad mod\binom{\xi}{1},\quad mod\binom{\xi}{2},\ \ldots. mod\binom{\xi}{n};$$

5b) $mod\binom{\xi}{r}=mod\binom{\xi}{\nu}$ für $\alpha>-1$, wenn „ν" die kleinste positive ganze Zahl (mit Einschluss der Null) bedeutet, welche noch grösser ist, als

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2(\alpha+1)}.$$

Nachdem wir nun unter allen Umständen den Werth des Moduls: $mod\binom{\xi}{r}$ kennen, kehren wir wieder zur Ungleichheit 3) zurück, um dieselbe in jedem der zwei möglichen Fälle: $\alpha+1\leqq 0$ und $\alpha+1>0$ für sich zu untersuchen.

Erstens. Es sei $\alpha+1\leqq 0$, $\alpha\leqq -1$, also nach 5a)

$$mod\binom{\xi}{r}=mod\binom{\xi}{n}.$$

In diesem Falle ist [siehe Ungleichheit 3)]

6) $$mod\, F[u,\ x,\ \xi,\ \delta]_r<\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{mod\,[(x-u)^{\xi}]}\times n^{\alpha+1}\, mod\binom{\xi}{n}\times M.$$

Unser ausgezeichneter Mathematiker Weierstrass hat aber im 51. Band des Crelle'schen Journals in seiner Abhandlung „Ueber die analytischen Facultäten" nachgewiesen, dass sich der Ausdruck

$$(-1)^n\binom{-u}{n}n^{-u+1}=\frac{u\,(u+1)\,(u+2)\ldots.(u+n-1}{1\ .\ 2\ \ .\ 3\ \ \ldots.\ \ n\ \ .\ \ n^{u-1}}$$

für jedes endliche u einer endlichen Grenze nähert und in eine stets convergente Reihe von der Form

$$k_1\,.\,u+k_2\,.\,u^2+k_3\,.\,u^3+\ldots. \text{ etc. in infin.}$$

entwickeln lässt, wenn die ganze positive Zahl n unendlich gross wird.

Setzen wir daher

7) $$(-1)^n\binom{-u}{n}n^{-u+1}=\psi\,(u,\,n)$$

und

$$8)\quad \lim_{n=\infty} \psi(u,n) = \lim_{n=\infty}\left[\frac{u(u+1)(u+2)\ldots.(u+n-1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots.\;n\;.\;n^{u-1}}\right]$$
$$= \Gamma c(u),$$

so ist $\psi(u, n)$ eine Function von u und n, welche für jedes endliche u sowohl für endliche, als auch für unendlich werdende n endlich ist; und $\Gamma c(u)$ eine für jedes endliche u endliche Function, welche mit der reciproken Gammafunction: $\frac{1}{\Gamma(u)}$ zusammenfällt.

$$9)\quad \Gamma c(u) = \frac{1}{\Gamma(u)},$$

wenn man übereinkommt, die Gammafunction, statt durch die bekannten bestimmten Integrale, durch die Gleichung:

$$10)\quad \Gamma(u) = \lim_{n=\infty}\left[\frac{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots.\;n}{u(u+1)(u+2)\ldots.(u+n-1)}\,.\,n^{u-1}\right]$$

zu definiren.

Schreibt man nun in 7) $-\xi$ für u, so wird:

$$7a)\quad (-1)^n \binom{\xi}{n} n^{\xi+1} = \psi(-\xi, n),$$

$$mod\left[(-1)^n\binom{\xi}{n}n^{\xi+1}\right] = n^{\alpha+1}.\,mod\binom{\xi}{n} = mod\,\psi(-\xi, n),$$

mithin [siehe Ungleichheit 6)]:

$$11)\quad mod\,F[u,\ x,\ \xi,\ \delta]_f \leqq \frac{n+1}{n}\cdot\frac{mod\,\psi(-\xi, n)}{mod\,[(x-u)\xi]}\times M$$
$$\{real\,\xi \leqq -1\}.$$

Ein Blick auf diese Ungleichheit lässt sofort erkennen, dass der Modulus $mod\,F[u, x, \xi, \delta]_f$ für unendlich klein werdende δ, endliche oder auch unendlich werdende n eine endliche Grösse ist, und dass derselbe sogar beliebig klein werden muss, wenn die Function $f(x)$ durch das ganze geradlinige Argumentgebiet von $x=u$ bis $x=x$ beliebig klein wird. Denn $\frac{n+1}{n}$ und $mod\,\psi(-\xi, n)$ bleiben auch für unendlich wachsende n endlich und M, d. i. der grösste unter den Moduln

$$mod\,f(x),\quad mod\,f(x-\delta),\quad mod\,f(x-2\delta)\ldots.mod\,f(x-n\delta)$$

ist endlich oder wird unendlich klein, je nachdem die Function $f(x)$ durch das ganze Argumentgebiet endlich bleibt oder unendlich klein wird.

Es gilt also der Satz:

> „Der Ausdruck $F[u, x, \xi, \delta]_f$ nähert sich bei verschwindendem δ, endlichem oder unendlich wachsendem n einer bestimmten Function von u, x und ξ als Grenze, wenn der reale Bestandtheil von ξ: $real\,\xi$ gleich oder kleiner als -1, und $x-u$ endlich ist; die betreffende Grenzfunction ist endlich, wenn $f(x)$ durch das ganze geradlinige x-Gebiet von $x=u$ bis $x=x$ endlich bleibt,

wird jedoch unendlich klein, wenn $f(x)$ von $x=u$ bis $x=x$ eine unendlich klein werdende Grösse ist."

Wird $x-u$ unendlich klein, so wird wegen

$$real\,\xi \leqq -1:\ \frac{1}{mod\,[(x-u)^{\xi}]}=\frac{1}{\infty}=0,$$

mithin auch [siehe Ungleichheit 11)]

$$lim\ mod\,F[u,\,x,\,\xi,\,\delta]_f=0,$$
$$lim\ F[u,\,x,\,\xi,\,\delta]_f=0;$$

und für $u=x$, $\dfrac{x-u}{n}=\delta=0$

$$F[u,\,x,\,\xi,\,\delta]=F[x,\,x,\,\xi,\,0]_f=0.$$

Wir haben sonach:

12) $$lim\ F[u,\,x,\,\xi,\,\delta]_f=0$$
$$\{real\,\xi\leqq-1,\quad lim\,(x-u)=0,\quad lim\,\delta=0\}$$

und

12a) $$F[x,x,\xi,0]_f=0,\quad F[u,\,u,\,\xi,\,0]_f=0$$
$$\{real\,\xi\leqq-1\}.$$

Zweitens. Es sei $\alpha+1>0$, $\alpha>-1$, also nach 5b):

$$mod\binom{\xi}{r}=mod\binom{\xi}{\nu}.$$

In diesem Falle wird im rechten Theile der Ungleichheit 3):

$$n_{\infty}\quad (n+1)\,mod\binom{\xi}{r}=n^{\alpha+1}\,.\ mod\binom{\xi}{r}\cdot\frac{n+1}{n}$$

mit n unendlich gross; es ist daher nicht möglich, aus der Ungleichheit 3) einen Schluss über die Grösse des Modulus $mod\,F[u,\,x,\,\xi,\,\delta]_f$ zu ziehen; so dass sich Alles, was aus der Ungleichheit 3) bezüglich des letzterwähnten Modulus abgeleitet werden kann, auf das oben ausgesprochene Theorem und die Gleichungen 12) und 12a) beschränkt.

B) Die Gleichung 2) liefert, wenn x in $x-\delta$ übergeht, während u, ξ und δ ungeändert bleiben, und n sich entsprechend von $n=\dfrac{x-u}{\delta}$ in $\dfrac{(x-\delta)-u}{\delta}=\dfrac{x-u}{\delta}-1=n-1$ verändert:

$$F[u,\,x-\delta,\,\xi,\,\delta]_f=$$
$$=\frac{f(x-\delta)-\binom{\xi}{1}f(x-2\delta)+\binom{\xi}{2}f(x-3\delta)-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{\xi}{n-1}f(x-n\delta)}{\delta^{\xi}}.$$

Subtrahiren wir diesen Ausdruck von dem ursprünglichen:

$$F[u,\,x,\,\xi,\,\delta]_f=$$
$$=\frac{f(x)-\binom{\xi}{1}f(x-\delta)+\binom{\xi}{2}f(x-2\delta)-\binom{\xi}{3}f(x-3\delta)+\ldots+(-1)^n\binom{\xi}{n}f(x-n\delta)}{\delta^{\xi}},$$

dividiren nachher durch δ und berücksichtigen dabei die Relationen:

$$\binom{\xi}{1}+1=\binom{\xi+1}{1};\quad \binom{\xi}{2}+\binom{\xi}{1}=\binom{\xi+1}{2}\ldots\binom{\xi}{n}+\binom{\xi}{n-1}=\binom{\xi+1}{n},$$

so finden wir:

$$\frac{F[u, x, \xi, \delta]_f - F[u, x-\delta, \xi, \delta]_f}{\delta}=$$

$$=\frac{f(x)-\binom{\xi+1}{1}f(x-\delta)+\binom{\xi+1}{2}f(x-2\delta)-\text{etc.}+(-1)^n\binom{\xi+1}{n}f(x-n\delta)}{\delta^{\xi}}$$

d. h.

$$\text{13)}\qquad \frac{F[u, x, \xi, \delta]_f - F[u, x-\delta, \xi, \delta]_f}{\delta}=F[u, x, \xi+1, \delta]_f.$$

Für verschwindende δ wird daraus:

$$\text{14)}\qquad \frac{\partial}{\partial x} \lim F[u, x, \xi, \delta]_f = \lim F[u, x, \xi+1, \delta]_f$$
$$\{\lim \delta = 0\}.$$

Aus dieser Relation fliesst weiter mittelst successiver Substitution von $\xi+1, \xi+2, \ldots \xi+p-1$ für ξ:

$$\lim F[u, x, \xi+2, \delta]_f = \frac{\partial}{\partial x}\lim F[u, x, \xi+1, \delta]_f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\lim F[u, x, \xi, \delta]_f$$

$$\lim F[u, x, \xi+3, \delta]_f = \frac{\partial}{\partial x}\lim F[u, x, \xi+2, \delta]_f = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\lim F[u, x, \xi, \delta]_f$$

. . . .

. . . .

allgemein:

$$\text{14}a)\qquad \lim F[u, x, \xi+p, \delta]_f = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\lim F[u, x, \xi, \delta]_f$$
$$\{\lim \delta = 0;\quad p\text{: eine positive ganze Zahl}\}.$$

Schreibt man hier $\xi - p$ für ξ, so bekommt man noch

$$\text{14}b)\qquad \lim F[u, x, \xi, \delta]_f = \frac{d^p}{dx^p}\lim F[u, x, \xi-p, \delta]_f$$
$$\{\lim \delta = 0;\ p\text{: eine positive ganze Zahl}\}.$$

Nach dem unter A) ausgesprochenen Theorem und der Gleichung 12a) ist der Grenzwerth $\lim\limits_{\delta=0} F[u, x, \xi, \delta]_f$ für $real(\xi+1)\leqq 0$, $real\,\xi \leqq -1$ eine endliche Function von u, x und ξ, welche verschwindet, wenn $x=u$ wird. Integriren wir daher die Gleichung 14) nach x zwischen den Grenzen $x=u$ und $x=x$ unter der Voraussetzung, dass $real(\xi+1)\leqq 0$ sei, so wird

$$\lim F[u, x, \xi, \delta]_f - \lim F[u, u, \xi, \delta]_f = \lim F[u, x, \xi, \delta]_f$$
$$=\int_{x=u}^{x=x}\lim F[u, x, \xi+1, \delta]_f\,.\,dx,$$

oder wenn $\xi+1=\xi'$, $\xi=\xi'-1$ gesetzt wird:

$$\text{15)}\qquad \lim F[u, x, \xi'-1, \delta] = \int_{x=u}^{x=x}\lim F[u, x, \xi', \delta]_f\,.\,dx$$
$$\{real(\xi')\leq 0,\ \lim \delta = 0\}.$$

Nimmt man in dieser Gleichung der Reihe nach für ξ':

$$\xi'-1, \quad \xi'-2, \ldots . \xi'-(p-1),$$

was offenbar gestattet ist, da wegen $real\,(\xi') \leqq 0$ um so mehr auch $real\,(\xi'-1) \leqq 0$, $real\,(\xi'-2) \leqq 0, \ldots . real\,(\xi'-p+1) \leqq 0$ sein muss, so findet man successive:

$$lim\,F[u, x, \xi'-2, \delta]_f = \int_{x=u}^{x=x} lim\,F[u, x, \xi'-1, \delta]_f . dx$$

$$= \int_{x=u}^{x=x} dx \int_{x=u}^{x=x} lim\,F[u, x, \xi', \delta]_f . dx$$

$$lim\,F[u, x, \xi'-3, \delta]_f = \int_{x=u}^{x=x} dx . lim\,F[u, x, \xi'-2, \delta]_f . dx$$

$$= \int_{x=u}^{x=x} dx \int_{x=u}^{x=x} dx \int_{x=u}^{x=x} dx . lim\,F[u, x, \xi', \delta]_f$$

. . . .
. . . .

15 a) $lim\,F[u, x, \xi'-p, \delta]_f =$

$$= \underset{(p\ \mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \underset{([p-1]\mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \cdots \underset{(3\mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \underset{(2\mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \underset{(1\mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} . lim\,F[u, x, \xi', \delta]_f$$

$$\{real\,\xi' \leq 0, \quad lim\,\delta = 0\}.$$

In dem speciellen Falle $\xi' = 0$ ist nach 2)

16) $$F[u, x, 0, \delta]_f = f(x),$$

mithin nach Gleichung 15 a):

17) $$lim\,F[u, x, -p, \delta]_f = \underset{(p\,\mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \underset{([p-1]\mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \ldots \underset{(3\mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \underset{(2\mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \underset{(1\mathrm{mal})}{\int_{x=u}^{x=x} f(x)\, dx}$$

$$\{lim\,\delta = 0,\ p\text{: eine ganz positive Zahl}\}.$$

Für $p=1$ folgt hieraus:

$$lim\,F[u, x, -1, \delta]_f = \int_{x=u}^{x=x} f(x)\, dx$$

$$\{lim\,\delta = 0\},$$

eine Relation, deren Richtigkeit auch mittelst directer Substitution von -1 für ξ in die Gleichung 2) nachgewiesen werden kann. In der That liefert die Gleichung 2) für $\xi = -1$ wegen

$$-\binom{-1}{1} = +\binom{-1}{2} = -\binom{-1}{3} = \ldots . = (-1)^n \binom{-1}{n} = 1$$

$$F[u, x, -1, \delta]_f = \delta\,[f(x) + f(x-\delta) + f(x-2\delta) + \ldots . + f(x-n\delta)]$$

$$lim\,F[u, x, -1, \delta]_f = lim\,\delta\,[f(x) + f(x-\delta) + f(x-2\delta) + \ldots . + f(x-n\delta)$$

$$= \int_{x=u}^{x=x} f(x)\, dx.$$

Da die gewöhnlichen Differentialquotienten beliebiger Ordnung von *bestimmten* Functionen wieder bestimmte Functionen sind, so folgt aus 14 a),

dass $lim\, F[u, x, \xi+p, \delta]f$ eine bestimmte Function von u, x und $\xi+p$ sein muss, wenn $lim\, F[u, x, \xi, \delta]f$ eine bestimmte Function von u, x und ξ ist. Das letztere ist aber nach dem unter A) aufgestellten Theoreme für $real\ \xi \leqq -1$ der Fall; mithin ist auch $lim\, F[u, x, \xi+p, \delta]f$ für $real\,(\xi+p) \leqq p-1$ eine bestimmte Function von u, x und $(\xi+p)$ und man hat, da $(\xi+p)$ jede beliebige complexe Zahl vorstellen kann, den Satz:

„Der Ausdruck $F[u, x, \xi, \delta]f$ nähert sich bei verschwindendem δ, endlichem oder unendlich wachsendem n einer bestimmten Function von u, x und ξ als Grenze, wenn die Differenz $x-u$ eine endliche Grösse ist, mögen die Grössen u, x und ξ was immer für Werthe haben."

C) Lässt man in der Gleichung 2) die Grösse u in $u+\delta$ übergehen, ohne die Grössen x, ξ und δ zu ändern, so geht

$$n=\frac{x-u}{\delta} \text{ in } \frac{x-(u+\delta)}{\delta}=\frac{x-u}{\delta}-1=n-1$$

und damit die Gleichung 2) in die Gleichung

$$F[u+\delta, x, \xi, \delta]f =$$
$$=\frac{f(x)-\binom{\xi}{1}f(x-\delta)+\binom{\xi}{2}f(x-2\delta)-\binom{\xi}{3}f(x-3\delta)+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{\xi}{n-1}f(x-\overline{n-1}\,\delta)}{\delta^{\xi}}$$

über, und wir erhalten, wenn wir die Gleichung 2) von der letzteren subtrahiren und nachher durch δ dividiren

$$18)\quad \frac{F[u+\delta, x, \xi, \delta]f-F[u, x, \xi, \delta]f}{\delta}=-\frac{(-1)^n\binom{\xi}{n}}{\delta^{\xi+1}}f(x-n\delta)$$
$$=-(-1)^n\binom{\xi}{n}n^{\xi+1}\times\frac{f(u)}{(x-u)^{\xi+1}}.$$

Mit dem Verschwinden von δ und unendlichen Wachsen von n geht hier der linke Theil über in:

$$\frac{\partial}{\partial u}\{lim\, F[u, x, \xi, \delta]f\},$$

während im rechten Theile der Ausdruck $(-1)^n\binom{\xi}{n}n^{\xi+1}$ nach den Gleichungen 7), 7a), 8), 9) und 10) dem Grenzwerthe

$$19)\quad \lim_{n=\infty}\left\{(-1)^n\binom{\xi}{n}n^{\xi+1}\right\}=\lim_{n=\infty}\psi(-\xi, n)=\Gamma c\,[-\xi]=\frac{1}{\Gamma(-\xi)}$$

zustrebt.

Wir haben daher die bemerkenswerthe Relation:

$$20)\quad \frac{\partial}{\partial u}\{lim\, F[u, x, \xi, \delta]f\}=-\Gamma c\,[-\xi]\times\frac{f(u)}{(x-u)^{\xi+1}}$$
$$=-\frac{1}{\Gamma(-\xi)}\cdot\frac{f(u)}{(x-u)^{\xi+1}}.$$

II.

Begriff der „begrenzten“ Derivationen und Integrale mit beliebigem Index und ihre Darstellung durch einfache bestimmte Integrale.

Wir fanden in der vorigen Nummer, welche sich mit der allgemeinen Discussion des Ausdruckes $F[u, x, \xi, \delta]f$ beschäftigte, dass derselbe einer bestimmten Function von u, x und ξ als Grenze zustrebt, wenn $x-u$ endlich ist und δ verschwindet, und dass diese Grenzfunction für ganze positive $\xi : \xi = \nu$ von der Untergrenze u unabhängig und dem ξ^{ten} (d. i. dem ν^{ten}) gewöhnlichen Differentialquotienten der Function $f(x)$ gleich wird.

Diese Thatsache, sowie der Umstand, dass der Grenzwerth, welchem sich der Ausdruck $F[u, x, \xi, \delta]f$ für unendlich klein werdende δ und beliebige ξ unaufhörlich nähert, ausser von x und von ξ im Allgemeinen auch noch von u und von den Werthen

$$f(u) = f(x-n\delta),\quad f(u+\delta) = f(x-\overline{n-1}\,\delta),\quad f(u+2\delta) = f(x-\overline{n-2}\,\delta),\ldots$$
$$\ldots f(u+\overline{n-1}\,\delta) = f(x-\delta),\quad f(u+n\delta) = f(x)$$

abhängt, welche die Function $f(x)$ nach und nach annimmt, wenn die Variable x das Werthgebiet

$$u = x-n\delta,\quad x-\overline{n-1}\,\delta,\quad x-\overline{n-2}\,\delta,\ldots x-\delta,\quad x$$

durchläuft; alles dies veranlasst uns, den Grenzwerth:

$$\lim_{\delta=0} F[u, x, \xi, \delta]f$$

für **jedes** (reelle oder complexe) ξ den

> „ξ^{ten} über das geradlinige Argumentgebiet von $x=u$ bis $x=x$ ausgedehnten Differentialquotienten“

oder die

> „ξ^{te} über die gerade Linie vom Punkte u bis zum Punkte x erstreckte Derivation der Function $f(x)$“

zu nennen, und sowohl durch das Symbol:

$$\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi}[f(x)]\right\}_{x=u}^{x=x},$$

als auch durch

$$D^\xi[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

auszudrücken.

Wir fanden ferner [siehe I, Gleichung 17)], dass der Grenzwerth

$$\lim_{\delta=0} F[u, x, \xi, \delta]f$$

für ganze negative $\xi : \xi = -p$ das p-mal hintereinander zwischen den nämlichen Grenzen von $x=u$ bis $x=x$ von der Function $f(x)$ genommene *Integral*

$$\underset{(p \text{ mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \underset{(p-1 \text{ mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \cdots \underset{(3 \text{ mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \underset{(2 \text{ mal})}{\int_{x=u}^{x=x} dx} \underset{(1 \text{ mal})}{\int_{x=u}^{x=x} f(x) . dx}$$

repräsentirt, welches wir Kürze halber durch

$$\int^{p} [f(x)\, dx^{p}]_{x=u}^{x=x} = \int^{-\xi} [f(x)\, dx^{-\xi}]_{x=u}^{x=x}$$

andeuten und das „$(-\xi)^{\text{te}}$ (d. h. hier das p^{te}), von $x=u$ bis $x=x$ erstreckte Integral der Function $f(x)$" nennen wollen.

Dieser Umstand lässt es als zweckmässig erscheinen, für den Grenzwerth

$$\lim_{\delta=0} F[u, x, \xi, \delta]_f$$

oder die Derivation

$$D\ [f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

noch ein weiteres Symbol einzuführen, und diese Derivation nicht blos für ganze negative, sondern für alle reelle oder complexe ξ das

„$(-\xi)^{\text{te}}$ über die Gerade vom Punkte u bis zum Punkte x erstreckte Integral der Function $f(x)$"

zu nennen und durch

$$\int^{-\xi} [f(x)\, dx^{-\xi}]_{x=u}^{x=x}$$

zu bezeichnen, d. h. für jedes ξ zu setzen:

$$\text{I)} \quad D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} = \int^{-\xi} [f(x)\, dx^{-\xi}] = \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} [f(x)]_{x=u}^{x=x} = \lim_{\delta=0} F[u, x, \xi, \delta]_f$$

und (wie aus I) durch Substitution von $(-\xi)$ für ξ gefunden wird:

$$\text{I}a) \quad \int^{\xi} [f(x)\, dx^{\xi}]_{x=u}^{x=x} = D^{-\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} = \frac{d^{-\xi}}{dx^{-\xi}} [f(x)]_{x=u}^{x=x} = \lim_{\delta=0} F[u, x, -\xi, \delta]_f.$$

Ist t eine andere unabhängig veränderliche Grösse, welche dasselbe Werthgebiet

$$u, \quad u+\delta, \quad u+2\delta, \quad u+3\delta \ldots . u+(m-1)\delta, \quad u+m\delta$$

durchläuft, wie die unabhängige Variable x, und versteht man hierbei unter m eine positive ganze Zahl, welche bei verschwindendem δ derart ins Unendliche wächst, dass $u+m\delta$ einem bestimmten Grenzwerthe v zustrebt, mithin

$$1) \qquad \lim (m\delta) = v - u$$

wird, so nennen wir in Uebereinstimmung mit unseren obigen Definitionen und mit der bekannten Definition der gewöhnlichen begrenzten Integrale den Grenzwerth, welchem sich der Ausdruck:

2) $F[u, v, \xi, \delta]_f =$

$$= \frac{f(v) - \binom{\xi}{1} f(v-\delta) + \binom{\xi}{2} f(v-2\delta) - \binom{\xi}{3} f(v-3\delta) + \ldots + (-1)^m \binom{\xi}{m} f(v-m\delta)}{\delta^\xi}$$

$$= \frac{f(u+m\delta) - \binom{\xi}{1} f(u+\overline{m-1}\,\delta) + \binom{\xi}{2} f(u+\overline{m-2}\,\delta) - \ldots + (-1)^m \binom{\xi}{m} f(u)}{\delta},$$

mit dem Verschwinden von δ unaufhörlich nähert,

„die ξ^{te} nach der Unabhängigen t genommene über die gerade Linie vom Punkte $t=u$ bis zum Punkte $t=v$ erstreckte Derivation der Function $f(t)$"

oder auch

„das $(-\xi)^{te}$ nach der Unabhängigen t genommene über die Gerade vom Punkte $t=u$ bis zum Punkte $t=v$ ausgedehnte Integral der Function $f(t)$"

und schreiben demgemäss:

$$\text{I}b)\qquad D^\xi [f(t)]_{t=u}^{t=v} = \int^{-\xi} [f(t)\, dt^{-\xi}]_{t=u}^{t=v} = \lim_{\delta=0} F[u, v, \xi, \delta]_f.$$

Da sich der Ausdruck $F[u, v, \xi, \delta]_f$ in Bezug auf die Function $f(x)$ der Unabhängigen x gerade ebenso verhält, wie bezüglich derselben Function $f(t)$ von der Unabhängigen t, so muss sein Grenzwerth für verschwindende δ ebenso, als

„die ξ^{te} nach der Unabhängigen x genommene von $x=u$ bis $x=v$ geradlinig erstreckte Derivation der Function $f(x)$"

oder

„das $(-\xi)^{te}$ nach x genommene, von $x=u$ bis $x=v$ geradlinig erstreckte Integral von $f(x)$"

bezeichnet, mithin auch

$$\text{I}c)\qquad D^\xi [f(x)]_{x=u}^{x=v} = \int^{-\xi} [f(x)\, dx^{-\xi}]_{x=u}^{x=v} = \lim_{\delta=0} F[u, v, \xi, \delta]$$

gesetzt werden.

Aus der Vergleichung von Ib) und Ic) geht die Relation

$$3)\qquad D^\xi [f(x)]_{x=u}^{x=v} = D^\xi [f(t)]_{t=u}^{t=v}$$

hervor, welche lehrt, dass

„es gleichgültig ist, mit welchem Buchstaben (x oder t etc.) die Unabhängige einer begrenzten Derivation bezeichnet wird, wenn nur ihre Werthgebiete oder mit anderen Worten die Grenzen der Derivation dieselben bleiben."

Nimmt man in den Gleichungen I) und Ic) $\xi = 0$ und berücksichtigt, dass

$$\lim F[u, x, 0, \delta]_f = f(x) \quad \text{[siehe I, Gleichung 16)]}$$

und

$$\lim F[u, v, 0, \delta] f = f(v)$$

ist, so findet man:

$$4)\quad \begin{cases} D^0 [f(x)]_{x=u}^{x=x} = f(x) = \int^0 [f(x)\, dx^0]_{x=u}^{x=x} \quad \text{und} \\ D^0 [f(x)]_{x=u}^{x=v} = \int^0 [f(x)]_{x=u}^{x=v} = f(v), \end{cases}$$

d. h. „die 0te Derivation einer Function ist gleich dem Werthe, welchen diese Function annimmt, wenn für die Unabhängige deren obere Grenze genommen wird."

Ist der reale Bestandtheil des Derivationsindex ξ kleiner, als die negative Einheit oder ihr höchstens gleich, setzt man ferner in Gleichung Ic)

$$u = v = x$$

und beachtet die Relation 12a) der vorhergehenden Nummer, so erhält man:

$$5)\quad D^\xi [f(x)]_{x=x}^{x=x} = D^\xi [f(x)]_{x=u}^{x=u} = D^\xi [f(x)]_{x=v}^{x=v} = 0$$
$$\{ real\, \xi \leqq -1 \}.$$

Die Gleichung 20) in der vorigen Nummer, welche mit Hülfe unserer Definitionsgleichung I) auch in der Form:

$$6)\quad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ D^\xi [f(x)]_{x=u}^{x=x} \right\} = -\Gamma c(-\xi) \times \frac{f(u)}{(x-u)^{\xi+1}} = \frac{-1}{\Gamma(-\xi)} \cdot \frac{f(u)}{(x-u)^{\xi+1}}$$

geschrieben werden kann, liefert nun, wenn sie mit du multiplicirt und dann nach u von $u = x$ bis $u = u$ integrirt wird, wobei x als Constante zu behandeln ist, und $real\, \xi \leqq -1$ sein soll:

$$D^\xi [f(x)]_{x=u}^{x=x} - D^\xi [f(x)]_{x=x}^{x=x} = -\frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{u=x}^{u=u} \frac{f(u)\, du}{(x-u)^{\xi+1}},$$

mithin wegen Gleichung 5):

$$\text{II)}\quad D^\xi [f(x)]_{x=u}^{x=x} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{u=u}^{u=x} \frac{f(u)\, du}{(x-u)^{\xi+1}} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} \frac{f(\vartheta)\, d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi+1}}$$
$$\{ real\, \xi \leqq -1 \},$$

wobei wir im rechten Theile für die Integrationsvariable u eine neue Variable ϑ geschrieben haben, ohne die Integrationsgrenzen zu ändern.

> „Jede begrenzte Derivation, deren Index einen reellen Bestandtheil hat, welcher kleiner ist, als die negative Einheit oder ihr höchstens gleichkommt, kann somit durch ein gleichbegrenztes gewöhnliches (einfaches) Integral dargestellt werden."

Ist der reale Bestandtheil des Integrationsindex grösser, als die negative Einheit: $real\, \xi > -1$, so gilt die Gleichung II) nicht mehr. Nichtsdestoweniger kann aber auch in diesem Falle jede begrenzte Derivation der Function $f(x)$ durch ein einfaches bestimmtes Integral ausgedrückt werden, wie wir sogleich zeigen werden.

Es sei *real* $\xi > -1$, also *real* $(\xi+1)>0$. Wir bezeichnen mit ν eine positive ganze Zahl, deren kleinster Werth gleich oder grösser ist, als *real* $(\xi+1)$, und setzen

$$\alpha) \qquad \xi - \nu = \xi'.$$

Die Grösse ξ' genügt dann der Bedingung: *real* $(\xi') < -1$, da nach der Voraussetzung

$$real\,(\xi+1)-\nu \leqq 0, \quad real\,(\xi-\nu+1)<0,$$

also

$$real\,(\xi-\nu) \leqq -1$$

wird.

Wir wenden auf das unbestimmte, nach der Unabhängigen ϑ genommene Integral

$$\int \frac{f(\vartheta)}{(x-\vartheta)^{\xi'+1}}\,d\vartheta = \int f(\vartheta) \times d\left\{\frac{1}{\xi'}(x-\vartheta)^{-\xi'}\right\}$$

ν-mal hinter einander die theilweise Integration an, multipliciren die so erhaltene Gleichung

$$\int \frac{f(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi'+1}} = \frac{f(\vartheta)(x-\vartheta)^{-\xi'}}{\xi'} - \frac{f'(\vartheta)(x-\vartheta)^{-\xi'+1}}{\xi'(\xi'-1)} + \frac{f''(\vartheta)(x-\vartheta)^{-\xi'+2}}{\xi'(\xi'-1)(\xi'-2)} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{\nu-1} f^{(\nu-1)}(\vartheta)\,(x-\vartheta)^{-\xi'-\nu-1}}{\xi'(\xi'-1)(\xi'-2)\ldots(\xi'-\nu+1}$$

$$+ \frac{(-1)^{\nu}}{\xi'(\xi'-1)('\xi-2)\ldots(\xi'-\nu+1)} \int \frac{f^{(\nu)}(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi'-\nu+1}}$$

mit

$$\frac{1}{\Gamma(-\xi')},$$

berücksichtigen dabei die Relationen:

$$(-\xi')\,\Gamma(-\xi') = \Gamma(-\xi'+1); \quad (-\xi')(-\xi'+1)\,\Gamma(-\xi') = \Gamma(-\xi'+2) \ldots$$

$$\ldots(-\xi')(-+\xi'1)(-\xi'+2)\ldots(-\xi'+\nu-1)\,\Gamma(-\xi') = \Gamma(-\xi'+\nu)$$

und nehmen beide Theile der dadurch in die Form:

$$\frac{1}{\Gamma(-\xi')}\int \frac{f(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi'+1}} = \frac{-f(\vartheta)\,(x-\vartheta)^{-\xi'}}{\Gamma(-\xi'+1)} - \frac{f'(\vartheta)(x-\vartheta)^{-\xi'+1}}{\Gamma(-\xi'+2)} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{f^{(\nu-1)}(\vartheta)\,d\vartheta^{\xi'+\nu-1}}{\Gamma(-\xi'+\nu} + \frac{1}{\Gamma(-\xi'+\nu)}\int \frac{f^{(\nu)}(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi'-\nu+1}}$$

gebrachten Gleichung zwischen den Grenzen $t=u$ und $t=x$, wobei wir voraussetzen, dass die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(\nu-1}(x)$, $f^{(\nu)}(x)$, von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig sind.

Da

$$real\,(\xi') \leqq -1,$$

mithin

$$real\,(-\xi') \geqq +1, \quad real\,(-\xi'+1) \geqq +2 \ldots real\,(-'\xi+\nu-1) \geqq \nu$$

ist, so verschwinden für $\vartheta = x$ sämmtliche rechter Hand ausserhalb des Integralzeichens stehenden Glieder zugleich mit ihren respectiven Factoren:

$$(x-\vartheta)^{-\xi'},\quad (x-\vartheta)^{-\xi'+1}\ldots.(x-\vartheta)^{-\xi'+\nu-1},$$

und wir bekommen für alle x von $x=u$ bis $x=x$:

$$7)\quad \frac{1}{\Gamma(-\xi')}\int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x}\frac{f(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi'+1}}=$$

$$=\frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi'}}{\Gamma(-\xi'+1)}+\frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi'+1}}{\Gamma(-\xi'+2)}+\frac{f''(u)\,(x-u)^{-\xi'+2}}{\Gamma(-\xi'+3)}+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{f^{(\nu-1)}(u)\,(x-u)^{-\xi'+\nu-1}}{\Gamma(-\xi'+\nu)}+\frac{1}{\Gamma(-\xi'+\nu)}\int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x}\frac{f^{(\nu)}(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi'-\nu+1}}.$$

Die Gleichung II), welche für solche ξ, deren reelle Bestandtheile **kleiner**, als die negative Einheit oder derselben höchstens **gleich** sind und für innerhalb der Derivationsgrenzen endliche und stetige Functionen, wie $f(x)$ gültig ist, liefert uns, wenn wir in ihr ξ' für ξ schreiben

$$8)\quad \frac{1}{\Gamma(-\xi')}\int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x}\frac{f(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi'+1}}=D^{\xi'}[f(x)]_{x=u}^{x=x}=\lim_{\delta=0}F[u,\,x,\,\xi',\,\delta]\,f;$$

und wenn daselbst ausserdem noch die Function $f^{(\nu)}(x)$ für $f(x)$, also auch $f^{(\nu)}(\vartheta)$ für $f(\vartheta)$ gesetzt wird

$$8a)\quad \frac{1}{\Gamma(-\xi')}\int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x}\frac{f^{(\nu)}(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi'+1}}=D^{\xi'}[f^{(\nu)}(x)]_{x=u}^{x=x};$$

wenn dagegen in derselben Gleichung II) $\xi'-\nu$ für ξ, und zugleich $f^{(\nu)}(x)$ für $f(x)$ und $f^{(\nu)}(\vartheta)$ für $f(\vartheta)$ genommen wird:

$$9)\quad \frac{1}{\Gamma(-\xi'+\nu)}\int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x}\frac{f^{(\nu)}(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi'-\nu+1}}\,D^{\xi'-\nu}[f^{(\nu)}(x)]_{x=u}^{x=x}.$$

Mit Hülfe von 8) und 9) kann die Gleichung 7) dargestellt werden wie folgt:

$$10)\quad D^{\xi'}[f(x)]_{x=u}^{x=x}=$$

$$=\frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi'}}{\Gamma(-\xi'+1)}+\frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi'+1}}{\Gamma(-\xi'+2)}+\frac{f''(u)\,(x-u)^{-\xi'+2}}{\Gamma(-\xi'+3)}+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{f^{(\nu-1)}(u)\,(x-u)^{-\xi'+\nu-1}}{\Gamma(-\xi'+\nu)}+D^{(\xi'-\nu)}[f^{(\nu)}(x)]_{x=u}^{x=x}.$$

Differenziiren wir sie in dieser Gestalt ν-mal hintereinander nach der Unabhängigen x allein, behandeln also u und x als Constante und beachten, dass

$$\Gamma(-\xi'+1)=(-\xi')\,(-\xi'+1)\,(-\xi'+2)\ldots.(-\xi'-\nu+1)\,\Gamma(-\xi'-\nu+1)$$
$$\Gamma(-\xi'+2)=(-\xi'+1)(-\xi')\,(-\xi'-1)\ldots.(-\xi'-\nu+2)\,\Gamma(-\xi'-\nu+2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Gamma(-\xi'+\nu-1)=(-\xi'+\nu-1)\,(-\xi'+\nu-2)\ldots.(-\xi')\,\Gamma(-\xi')$$

ist, so ergiebt sich

11) $$\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left\{D^{\xi'}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}=$$

$$=\frac{f(u)(x-u)^{-\xi'-\nu}}{\Gamma(-\xi'-\nu+1)}+\frac{f'(u)(x-u)^{-\xi'-\nu+1}}{\Gamma(-\xi'-\nu+2)}+\ldots+\frac{f^{(\nu-1)}(u)(x-u)^{-\xi'-1}}{\Gamma(-\xi')}$$

$$+\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left\{D^{\xi'-\nu}[f^{(\nu)}(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen 14a) und 14b) der vorigen Nummer, welche mit Berücksichtigung der Definitionsgleichung begrenzter Derivationen (I) in die Form:

12) $$\frac{d^p}{dx^p}\left\{D^{\xi'}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}=D^{\xi+p}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

12a) $$\frac{d^p}{dx^p}\left\{D^{\xi-p}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}=D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

{ξ: beliebig; p: ganz und positiv}

gebracht werden können, wenn man daselbst ν für p, ξ' für ξ, und ausserdem in der zweiten Gleichung (12a) die Function $f^\nu(x)$ für $f(x)$ setzt:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left\{D^{\xi'}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}=D^{\xi'+\nu}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left\{D^{\xi'-\nu}[f^{(\nu)}(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}=D^{\xi}[f^{(\nu)}(x)]_{x=u}^{x=x}.$$

Mithin wird [siehe Gleichung 11)]:

$$D^{\xi'+\nu}[f(x)]_{x=u}^{x=x}=$$

$$=\frac{f(u)(x-u)^{-\xi'-\nu}}{\Gamma(-\xi'-\nu+1)}+\frac{f'(u)(x-u)^{-\xi'-\nu+1}}{\Gamma(-\xi'-\nu+2)}+\ldots+\frac{f^{(\nu-1)}(u)(x-u)^{-\xi'-1}}{\Gamma(-\xi')}$$

$$+D^{\xi'}[f^{(\nu)}(x)]_{x=u}^{x=x}$$

und wir erhalten schliesslich, wenn wir wieder $\xi'+\nu=\xi$, $\xi'=\xi-\nu$ setzen [siehe α)] und die Gleichung 8a) zu Hülfe nehmen, für alle x von $x=u$ bis $x=x$:

IIa) $$D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}=$$

$$=\frac{f(u)(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)}+\frac{f'(u)(x-u)^{-\xi+1}}{\Gamma(-\xi+2)}+\frac{f''(u)(x-u)^{-\xi+2}}{\Gamma(-\xi+3)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(\nu-1)}(u)(x-u)^{-\xi+\nu-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)}+\frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)}\int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x}\frac{f^{(\nu)}(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-\nu+1}}$$

{ $real(\xi)>-1$; ν: eine positive ganze Zahl, deren kleinster Werth gleich oder grösser ist, als $real(\xi+1)$; $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\ldots f^{(\nu-1)}(x)$, $f^{(\nu)}(x)$: Functionen, welche durch die ganze gerade Linie vom Punkte $x=u$ bis zum Punkte $x=x$ endlich und stetig sind. }

Beispiele. *a*) Es sei $f(x)=1$.

In diesem Falle ist nach II) für $real(\xi) \leqq -1$:

$$D^{\xi}[1]_{x=u}^{x=x} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} \frac{d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi+1}} = \frac{(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)};$$

für $real\ \xi > -1$ hingegen hat man nach II*a*), wenn ν die kleinste positive ganze Zahl bedeutet, welche gleich oder grösser ist, als $real(\xi+1)$, wegen $f(u)=f'(u)=f''(u)=\ldots\ldots=f^{(\nu)}(u)=0$

$$D^{\xi}[1]_{x=u}^{x=x} = \frac{(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)}.$$

Es ist also für jedes ξ

$$D^{\xi}[1]_{x=u}^{x=x} = \frac{(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)}. \tag{13}$$

b) Es sei $f(x)=(x-u)$ und $real(\lambda) \gtreqless 0$.

Für $real\ \xi \leqq -1$ ist nach II)

$$D^{\xi}[(x-u)^{\lambda}]_{x=u}^{x=x} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} \frac{(\vartheta-u)\ d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi+1}}$$

oder, wenn für mittelst der Gleichung:

$$\vartheta = u + (x-u)\,\omega$$

eine neue Integrationsvariable ω eingeführt und beachtet wird, dass für beliebige p und q, deren reale Bestandtheile den Bedingungen

$$real(p) > 0, \quad real(q) > 0$$

genügen,

$$\int_{\omega=0}^{\omega=1} \omega^{p-1}(1-\omega)^{q-1}\,d\omega = B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ist:

$$D^{\xi}[(x-u)^{\lambda}]_{x=u}^{x=x} = \frac{(x-u)^{\lambda-\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_{\omega=0}^{\omega=1} \omega^{\lambda}(1-\omega)^{-(\xi+1)}d\omega$$

$$= \frac{(x-u)^{\lambda-\xi}}{\Gamma(-\xi)} \times \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(-\xi)}{\Gamma(\lambda+1-\xi)}.$$

$$D^{\xi}[(x-u)^{\lambda}]_{x=u}^{x=x} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\xi)}(x-u)^{\lambda-\xi} \tag{14a}$$

$$\{real\ \xi \leqq -1;\ real\ \lambda \gtreqless 0\}.$$

Für $real\ \xi > -1$ wird nach II*a*), wenn ν die vorige Bedeutung hat und ausserdem $real(\lambda) \gtreqless \nu$ ist [so dass die Functionen $f'(x)=\lambda(x-u)^{\lambda-1}$, $f''(x)=\lambda(\lambda-1)(x-u)^{\lambda-1}\ldots\ldots f^{(\nu)}(x)=\lambda(\lambda-1)\ldots\ldots(\lambda-\nu+1)(x-u)^{\lambda-\nu}$ für alle x von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig sind]:

$$D^{\xi}\left[(x-u)^{\lambda}\right]_{x=u}^{x=x}=\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.(\lambda-\nu+1)}{\Gamma(-\xi+\nu)}\int\limits_{\vartheta=u}^{\vartheta=x}\frac{(\vartheta-u)^{\lambda-\nu}\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-\nu+1}}$$

$$=\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots.(\lambda-\nu+1)}{\Gamma(-\xi+\nu)}(x-u)^{\lambda-\xi}\int\limits_{\omega=0}^{\omega=1}\omega^{\lambda-\nu}(1-\omega)^{\nu-\xi-1}\,d\omega$$

$$=\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots.(\lambda-\nu+1)}{\Gamma(-\xi+\nu)}\times\frac{\Gamma(\lambda-\nu+1)\,\Gamma(-\xi+\nu)}{\Gamma(\lambda+1-\xi)}(x-u)^{\lambda-\xi}$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\xi)}(x-u)^{\lambda-\xi}.$$

Wir haben also wie früher

$$\text{14}b)\qquad D^{\xi}\left[(x-u)^{\lambda}\right]_{x=u}^{x=x}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\xi)}(x-u)^{\lambda-\xi}$$

{*real* $\xi > -1$; *real* $(\lambda) \geqq \nu$; ν: die kleinste positive ganze Zahl, welche gleich oder grösser ist, als *real* $(\xi+1)$.}

III.

Die Zerlegungstheoreme der begrenzten Derivationen.

A) Der Ausdruck

$$F[u,x,\xi,\delta]_{f(x)}=\frac{f(x)-\binom{\xi}{1}f(x-\delta)+\binom{\xi}{2}f(x-2\delta)-\ldots+(-1)^{n}\binom{\xi}{n}f(x-n\delta)}{\delta^{\xi}}$$

$$\{x=u+n\delta\}$$

besitzt offenbar die durch die Gleichungen

$$1)\qquad F[u,x,\xi,\delta]_{\varphi(x)\pm\psi(x)}=F[u,x,\xi,\delta]_{\varphi(x)}\pm F[u,x,\xi,\delta]_{\psi(x)},$$

$$1a)\qquad F[u,x,\xi,\delta]_{\varphi(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\,etc.}=F[u,x,\xi,\delta]_{\varphi(x)}+F[u,x,\xi,\delta]_{\varphi_1(x)}+F[u,x,\xi,\delta]_{\varphi_2(x)}+\text{ etc.}$$

$$2)\qquad F[u,x,\xi,\delta]_{C\,F(x)}=C.F[u,x,\xi,\delta]_{F(x)}$$

ausgedrückten Eigenschaften, wenn wir unter $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\ldots.$, $\psi(x)$, $F(x)$ beliebige Functionen der Unabhängigen x und unter C eine beliebige Constante verstehen.

Lassen wir δ in den Gleichungen 1), 1a), 2) unendlich klein, n unendlich gross werden, so zwar, dass $\lim n\delta=x-u$ wird, und nehmen wir ferner an, die oben erwähnten Functionen seien innerhalb des geradlinigen Intervalles von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig, indem wir uns in diesen Blättern nur auf Derivationen solcher Functionen beschränken, welche innerhalb der Derivationsgrenzen endlich und stetig bleiben, so erhalten wir augenblicklich

aus 1):

$$I)\qquad D^{\xi}[\varphi(x)\pm\psi(x)]_{x=u}^{x=x}=D^{\xi}[\varphi(x)]_{x=u}^{x=x}\pm D^{\xi}[\psi(x)]_{x=u}^{x=x},$$

aus 1 a):

I a) $D^\xi[\varphi(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+ \text{etc.}]=$

$$=D^\xi[\varphi(x)]_{x=u}^{x=x}+D^\xi[\varphi_1(x)]_{x=u}^{x=x}+D^\xi[\varphi_2(x)]_{x=u}^{x=x}+\text{ etc.},$$

aus 2):

II) $$D^\xi[C\times F(x)]_{x=u}^{x=x}=C.D^\xi[F(x)]_{x=u}^{x=x},$$

d. h.

„Jede begrenzte Derivation einer Summe ist gleich der Summe der gleichnamigen Derivationen der einzelnen Summanden".

„Jede begrenzte Derivation einer Differenz ist gleich der Differenz der gleichnamigen Derivationen des Minuends und Subtrahends".

„Jede begrenzte Derivation eines Productes aus einer Constanten und einer beliebigen Function der Unabhängigen x ist gleich dem Producte aus der Constanten in die gleichnamige Derivation der Function".

B) Es ist bekanntlich für jedes ganze positive $\xi:\xi=p$ und beliebige Functionen $\varphi(x)$, $f(x)$:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}[f(x).\varphi(x)]=$$

$$=\varphi(x)\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)+\binom{\xi}{1}\varphi'(x)\frac{d^{\xi-1}}{dx^{\xi-1}}f(x)+\binom{\xi}{2}\varphi''(x)\frac{d^{\xi-2}}{dx^{\xi-2}}f(x)+\ldots.$$

$$\ldots.+\binom{\xi}{p-1}\varphi^{(p-1)}(x)\frac{d^{\xi-p+1}}{dx^{\xi-p+1}}f(x)+\binom{\xi}{p}\varphi^{(p)}(x)\frac{d^{\xi-p}}{dx^{\xi-p}}f(x).$$

Da nun ein gewöhnlicher Differentialquotient beliebiger Ordnung einer begrenzten Derivation von demselben Index gleichgesetzt werden kann, deren Obergrenze die unabhängige Variable, deren Untergrenze aber eine beliebige Constante u ist, so kann man auch schreiben:

3) $$D^\xi[f(x).\varphi(x)]_{x=u}^{x=x}=$$

$$=\varphi(x)D^\xi[f(x)]_{x=u}^{x=x}+\binom{\xi}{1}\varphi'(x)D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x}+$$

$$+\binom{\xi}{2}\varphi''(x)D^{\xi-2}[f(x)]_{x=u}^{x=x}+\ldots.+\binom{\xi}{p-1}\varphi^{(p-1)}(x)D^{\xi-p+1}[f(x)]_{x=u}^{x=x}+$$

$$+\binom{\xi}{p}\varphi^{(p)}(x)D^{\xi-p}[f(x)]_{x=u}^{x=x}.$$

$$\{\xi=p:\text{ ganz, positiv}\}.$$

Der $(p+1)$-gliederige Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ist in dem nachstehenden $(n+1)$-gliederigen Ausdrucke:

$$\varphi(x)D^\xi[f(x)]_{x=u}^{x=x}+\binom{\xi}{1}\varphi'(x)D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x}+\binom{\xi}{2}\varphi''(x)D^{\xi-2}[f(x)]_{x=u}^{x=x}+\ldots$$

$$\ldots.+\binom{\xi}{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)D^{\xi-n+1}[f(x)]_{x=u}^{x=x}+\binom{\xi}{n}\varphi^{(n)}(x)D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

als Specialität enthalten, indem er daraus hervorgeht, wenn ξ ganz und

positiv: $\xi = p$ genommen, und die beliebige ganze positive Zahl n gleich p gesetzt wird.

Die Differenz:

$$4)\quad D^{\xi}[f(x).\varphi(x)]_{x=u}^{x=x} - \varphi(x)\, D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} \binom{\xi}{1} \varphi'(x)\, D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$
$$-\binom{\xi}{2}\varphi''(x)\, D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \ldots - \binom{\xi}{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)\, D^{\xi-n+1}[f(x)]_{u=u}^{x=x} -$$
$$-\binom{\xi}{n}\varphi^{(n)}(x)\, D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

wird daher $=0$, wenn $\xi = p$ ganz und positiv und $n \geq p$ wird.

Dieser bemerkenswerthe Umstand veranlasst uns, den Ausdruck 4) für beliebige complexe ξ näher zu untersuchen.

Bezeichnen wir ihn kurz durch $R[u, x, \xi, n]$, um anzudeuten, dass er von den Grössen u, x, ξ, und n abhängt und nehmen wir an, dass die beiden Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ in dem vom Punkte $x=u$ bis zum Punkte $x=x$ reichenden geradlinigen Intervalle endlich und stetig bleiben.

Es sei also ganz allgemein·

$$R[u,x,\xi,n] = D^{\xi}[f(x).\varphi(x)]_{x=u}^{x=x} - \varphi(x)\, D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \binom{\xi}{1}\varphi'(x)\, D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$
$$5)\qquad -\binom{\xi}{2}\varphi''(x)\, D^{\xi-2}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \ldots - \binom{\xi}{n}\varphi^{(n)}(x)\, D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x}.$$

a) Wir beginnen die Analyse damit, dass wir diese Gleichung partiell nach der Untergrenze u differenziiren (also die Obergrenze x und den Index ξ als Constante behandeln) und dabei berücksichtigen, dass nach II. die Gleichung 6) [wenn daselbst ξ und $\xi - p$ für ξ und beziehungsweise $f(x).\varphi(x)$ und $f(x)$ für $f(x)$ geschrieben wird]:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{D^{\xi}[f(x)\times\varphi(x)]_{x=u}^{x=x}\right\} = -\frac{1}{\Gamma(-\xi)}\cdot\frac{f(u).\varphi(u)}{(x-u)^{\xi+1}}$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{D^{\xi-p}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\} = -\frac{1}{\Gamma(-\xi+p)}\cdot\frac{f(u)}{(x-u)^{\xi-p+1}}$$

ist, wobei p eine der Zahlen $0, 1, 2, 3 \ldots n$ vorstellt.

Wir erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial u}R[u, x, \xi, n] = \frac{-f(u)\,\varphi(u)}{\Gamma(-\xi)\,(x-u)^{\xi+1}} + \frac{f(u)\,\varphi(x)}{\Gamma(-\xi)\,(x-u)^{\xi+1}} +$$
$$+\binom{\xi}{1}\frac{f(u)\,\varphi'(x)}{\Gamma(-\xi+1)\,(x-u)^{\xi}} + \binom{\xi}{2}\frac{f(u)\,\varphi''(x)}{\Gamma(-\xi+2)\,(x-u)^{\xi-1}} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{\xi}{n}\frac{f(u)\,\varphi^{(n)}(x)}{\Gamma(-\xi+n)\,(x-u)^{\xi-n+1}},$$

$$6)\qquad \frac{\partial}{\partial u}R[u, x, \xi, n] =$$
$$= \frac{-f(u)}{\Gamma(-\xi)(x-u)^{\xi+1}}\left\{\varphi(u) - \varphi(x) - \varphi'(x)\,(u-x) - \frac{\varphi''(x)\,(u-x)^2}{1.2} - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots - \frac{\varphi^{(n)}(x)\,(u-x)}{1.2.3\ldots n}\right\}.$$

Nun ist bekanntlich unter der Voraussetzung, dass neben der Function $\varphi(x)$ auch noch alle ihre Differentialquotienten $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ etc. von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig sind,

$$7)\quad \varphi(u)-\varphi(x)-\varphi'(x)(u-x)-\frac{\varphi''(x)(u-x)^2}{1.2}-\frac{\varphi'''(x)(u-x)^3}{1.2.3}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{\varphi^{(n)}(x)(u-x)^n}{1.2.3\ldots n}=-\frac{1}{n!}\int_{t=u}^{t=x}\varphi^{(n+1)}(t)\,(u-t)^n\,dt,$$

folglich wird

$$8)\quad \frac{\partial}{\partial u}R[u,x,\xi,n]=\frac{f(u)}{n!\,\Gamma(-\xi)(x-u)^{\xi+1}}\int_{t=u}^{t=x}\varphi^{(n+1)}(t)\,(u-t)^n\,dt$$

{$\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$.... etc. von $x=u$ bis $x=x$ endliche und stetige Functionen.}

Wenn ausser den Bedingungen, unter welchen die Gleichung 8) besteht, noch *real* $(\xi)<0$ ist, so verschwinden die Derivationen

$$D^{\xi}[f(x)\,\varphi(x)]_{x=u}^{x=x},\quad D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x},\quad D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\ldots D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

und mit ihnen, der Gleichung 5) zufolge, auch $R[u,x,\xi,n]$, **falls die Untergrenze** u **der Obergrenze** x **gleich wird**; integrirt man daher die beiden Seiten der Gleichung 8) in Bezug auf u allein zwischen den Grenzen $u=x$ und $u=u$ (wobei x und ξ als Constante gelten), so ergiebt sich:

$$9)\quad R[u,x,\xi,n]=\frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi)}\int_{u=x}^{u=u}\frac{f(u)\,du}{(x-u)^{\xi+1}}\int_{t=u}^{t=x}\varphi^{(n+1)}(t)\,(u-t)^n\,dt$$

$$=\frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi)}\int_{\omega=x}^{\omega=u}\frac{f(\omega)\,d\omega}{(x-\omega)^{\xi+1}}\int_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=x}\varphi^{(n+1)}(\vartheta)\,(\omega-\vartheta)^n\,d\vartheta=$$

{*real* $(\xi)<0$; $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. von $x=u$ bis $x=x$ endliche und stetige Functionen; ϑ, ω, u und x: Grössen, welche sich unabhängig von einander verändern.}

Das Doppelintegral rechter Hand kann in ein anderes zwischen den Grenzen $\tau=0$, $\tau=1$, und $\tau'=0$, $\tau'=1$ nach den unabhängigen Variablen τ, τ' genommenes Integral verwandelt werden, wenn man zuerst für ϑ mittelst der Substitution $\vartheta=\omega+(x-\omega)\tau$ die Variable τ, und hernach mittelst der Substitution: $\omega=x+(u-x)\tau'$ für ω die unabhängige Variable τ' einführt.

Die obige Gleichung geht dadurch über in

$$9a)\quad R[u,x,\xi,n]=\frac{(-1)^{\xi}(x-u)^{n+1-\xi}}{n!\,\Gamma(-\xi)}$$

$$\int_{\tau'=0}^{\tau'=1}\int_{\tau=0}^{\tau=1}f[x+(u-x)\tau']\,\varphi^{(n+1)}[x+(u-x)(1-\tau)\tau']\,\tau'^{n-\xi}\tau^n\,d\tau'\,d\tau$$

{siehe die bei Gleichung 9) angeführten Bedingungen}.

b) Differenziiren wir jetzt die Gleichung 5) nach der Obergrenze x, ohne die Untergrenze u und den Index ξ zu ändern. Indem wir hierbei den durch die Gleichung 12) der vorigen Nummer ausgedrückten Satz, welcher sich in Worten etwa folgendermaassen aussprechen lässt:

> „Ein gewöhnlicher Differentialquotient beliebiger Ordnung (mit ganzem positivem Index) wird von einer begrenzten Derivation nach der oberen Grenze genommen, indem man einfach den Index der begrenzten Derivation um die Ordnungszahl des Differentialquotienten vermehrt“

benützen, finden wir

$$\frac{\partial}{\partial x} R[u, x, \xi, n] = D^{\xi+1}[f(x).\varphi(x)] -$$

$$- \varphi(x) D^{\xi+1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \binom{\xi}{1}\varphi'(x) D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \varphi'(x) D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$

$$- \binom{\xi}{1}\varphi''(x) D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \binom{\xi}{2}\varphi''(x) D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$

$$- \binom{\xi}{3}\varphi'''(x) D^{\xi-2}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \ldots - \binom{\xi}{2}\varphi'''(x) D^{\xi-2}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$

$$- \binom{\xi}{3}\varphi''''(x) D^{\xi-3}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \ldots - \binom{\xi}{n-1}\varphi^{(n-1)}(x) D^{\xi-n+2}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$

. . . .

$$- \binom{\xi}{n}\varphi^{(n)}(x) D^{\xi-n+1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \ldots - \binom{\xi}{n-1}\varphi^{(n)}(x) D^{\xi-n+1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$

$$- \binom{\xi}{n}\varphi^{(n+1)}(x) D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x} R[u, x, \xi, n] = \Big\{ D^{\xi+1}[f(x)\,\varphi(x)]_{x=u}^{x=x} - \varphi(x) D^{\xi+1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$

$$- \binom{\xi+1}{1}\varphi'(x) D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \binom{\xi+1}{2}\varphi''(x) D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$

$$- \binom{\xi+1}{3}\varphi'''(x) D^{\xi-2}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \ldots - \binom{\xi+1}{n}\varphi^{(n)}(x) D^{\xi+1-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\Big\} -$$

$$- \binom{\xi}{n}\varphi^{(n+1)}(x) D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x},$$

mithin wegen:

$$R[u, x, \xi, n] = D^{\xi+1}[f(x).\varphi(x)]_{x=u}^{x=x} - \varphi(x) D^{\xi+1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$

$$- \binom{\xi+1}{1}\varphi'(x) D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \binom{\xi+1}{2}\varphi''(x) D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} - \ldots$$

$$\ldots - \binom{\xi+1}{n}\varphi^{(n)}(x) D^{\xi+1-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

10) $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} R[u, x, \xi, n] = R[u, x, \xi+1, n] - \binom{\xi}{n} \varphi^{(n+1)}(x) D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x} \\ \text{und} \\ R[u, x, \xi+1, n] = \frac{\partial}{\partial x} R[u, x, \xi, n] + \binom{\xi}{n} \varphi^{(n+1)}(x) D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x}. \end{array}\right.$

Bezeichnen wir durch ν wieder die kleinste positive ganze Zahl, welche gleich oder grösser ist, als *real* $(\xi+1)$, und nehmen wir an, dass $n \geqq \nu$ sei, so wird wegen *real* $(\xi-n) \leqq -1$

$$D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x} \frac{1}{\Gamma(-\xi+n)} \int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} \frac{f(\vartheta)\, d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-n+1}}$$

(siehe Gleichung II) unter II.)

$$\binom{\xi}{n} D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x} = \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-\xi)} \int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} \frac{f(\vartheta)\, d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-n+1}};$$

somit:

10 *a*)
$$R[u, x, \xi+1, n] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} R[u, x, \xi, n] + \frac{(-1)^n \varphi^{(n+1)}(x)}{n!\,\Gamma(-\xi)} \int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} \frac{f(\vartheta)\, d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-n+1}}$$
$$\{n \geqq \nu\}.$$

c) Eine aufmerksame Betrachtung der in den Gleichungen 9 *a*) und 10 *a*) rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke belehrt uns sofort, dass — bei unendlich wachsendem n und unter der Voraussetzung, dass sämmtliche gemeine Differentialquotienten der Function $\varphi(x)$ von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig bleiben —, das Doppelintegral

$$\frac{(x-u)^{n+1-\xi}}{n!} \int_{\tau'=0}^{\tau'=1} \int_{\tau=0}^{\tau=1} f[x+(u-x)\tau']$$
$$.\varphi^{(n+1)}[x+(u-x)(1-\tau)\tau']\, \tau^n \tau'^{n-\xi} d\tau\, d\tau',$$

sowie auch das einfache Integral:

$$\frac{(-1)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(x) \int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} \frac{f(\vartheta)\, d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi+1-n}}$$

für jedes endliche ξ und jedes endliche x von $x=u$ bis $x=x$ der Null ohne Ende zustreben.

Wir haben also für alle x von $x=u$ bis $x=x$

11)
$$\lim_{n=\infty} R[u, x, \xi, n] = 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} \textit{real}(\xi) < 0;\ f(x),\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x) \text{ etc. endlich und} \\ \text{stetig innerhalb der endlichen Grenzen von } x=u \text{ bis } x=x \end{array} \right\}$

und

12) $$\lim_{n=\infty} R[u, x, \xi+1, n] = \frac{\partial}{\partial x}\{\lim_{n=\infty} R[u, x, \xi, n]\}$$

$\left\{\begin{array}{l}f(x),\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x) \ldots \text{ etc. endlich und stetig} \\ \text{innerhalb der endlichen Grenzen von } x=u \text{ bis} \\ x=x; \text{ giltig für jedes endliche } \xi \text{ und alle } x \text{ von} \\ x=u \text{ bis } x=x.\end{array}\right\}$

Aus 12) folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\lim_{n=\infty} R[u, x, \xi, n]\}$$

und damit der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty} R[u, x, \xi+1, n]$$

verschwindet, wenn $R[u, x, \xi, n]$ bei unendlich wachsendem n für irgend einen Werth des Index ξ unter den bei 12) angeführten Bedingungen verschwindet; d. h.

> „Hat man nachgewiesen, dass $R[u, x, \xi, n]$ für einen bestimmten Werth von ξ und alle x von $x=u$ bis $x=x$ bei unendlich wachsendem n gegen die Null convergirt, wenn die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x) \ldots$ innerhalb der endlichen Grenzen $x=u$ und $x=x$ endlich und stetig bleiben, so convergirt er auch unter denselben Umständen für den um eine Einheit grösseren Index „$\xi+1$" gegen die Null."

Nun haben wir aber gezeigt, dass unter den hier erwähnten Bedingungen der Ausdruck $R[u, x, \xi, n]$ für jedes ξ, dessen reeller Bestandtheil negativ ist, verschwindet [siehe 11)]; derselbe verschwindet daher auch für solche ξ, für welche *real* $(\xi) < 1$; infolge dessen auch für solche, für welche *real* $(\xi) < 2$ ist etc. —; kurz er verschwindet unter den gedachten Bedingungen für jedes endliche ξ, gleichviel, ob dessen realer Bestandtheil positiv oder negativ ist.

> „Der Ausdruck $R[u, x, \xi, n]$ verschwindet bei unendlich wachsendem n für jedes endliche ξ und jedes endliche dem geradlinigen Intervalle von $x=u$ bis $x=x$ angehörige x, wenn die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ etc. in dem erwähnten Intervalle endlich und stetig sind",

oder mit anderen Worten [siehe die Gleichung 5)]:

„Es ist für jedes endliche ξ und endliche x und u:

III) $$D^{\xi}[f(x).\varphi(x)]_{x=u}^{x=x} = \varphi(x) D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} +$$
$$+ \binom{\xi}{1}\varphi'(x) D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} + \binom{\xi}{2}\varphi''(x) D^{\xi-2}[f(x)]_{x=x}^{x=x} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{\xi}{p}\varphi^{(p)}(x) D^{\xi-p}[f(x)]_{x=u}^{x=x} + \text{etc. } \textit{in infinitum}$$
$$= \varphi(x) D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x} + \Sigma_{p=1}^{p=\infty}\binom{\xi}{p}\varphi^{(p)}(x) D^{\xi-p}[f(x)]_{x=u}^{x=x},$$

wenn die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. *in infinitum*

innerhalb des Derivationsintervalles (von $x=u$ bis $x=x$) endlich und stetig sind, und p eine von $p=1$ bis $p=\infty$ variirende positive ganze Zahl bedeutet."

Der rechte Theil der letzteren Gleichung III) geht offenbar, wenn $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function vom p^{ten} Grade ist, in eine endliche aus $(p+1)$ Gliedern bestehende Reihe über, weil in diesem Falle die Differentialquotienten: $\varphi^{(p+1)}(x)$, $\varphi^{(p+2)}(x)$ etc. verschwinden.

d) Die Gleichung 9) giebt den Werth des Ausdrucks $R[u, x, \xi, n]$ für jedes ganze positive n und solche ξ, deren reeller Bestandtheil negativ ist durch das Doppelintegral

$$\frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi)}\int\limits_{\omega=x}^{\omega=u}\frac{f(\omega)\,d\omega}{(x-\omega)^{\xi+1}}\int\limits_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=x}\varphi^{(n+1)}(\vartheta)\,(\omega-\vartheta)^n\,d\vartheta,$$

vorausgesetzt, dass die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ etc. innerhalb der Geraden vom Punkte $x=u$ bis zum Punkte $x=x$ endlich und stetig sind.

Es lässt sich nun zeigen, dass das angeführte Doppelintegral den Werth des Ausdrucks $R[u, x, \xi, n]$ nicht blos für solche ξ, deren reeller Bestandtheil negativ ist, sondern überhaupt für beliebige ξ vorstellt, wenn nur n gleich oder grösser ist, als ν [wo ν wieder die kleinste positive Zahl bedeutet, welche gleich oder grösser ist, als $real\,(\xi+1)$], und die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ .... etc. von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig bleiben.

Um dieses nachzuweisen, nehmen wir an, die Gleichung

$$13)\quad R[u, x, \xi, n]=\frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi)}\int\limits_{\omega=x}^{\omega=u}\frac{f(\omega)\,d\omega}{(x-\omega)^{\xi+1}}\int\limits_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=x}\varphi^{(n+1)}(\vartheta)(\omega-\vartheta)^n\,d\vartheta$$

bestehe für einen bestimmten, sonst aber beliebigen Werth von ξ und jedes n, welches der Bedingung $n \geqq \nu \geqq real\,(\xi+1)$ genügt, setzen abkürzend

$$\alpha)\qquad \frac{f(\omega)}{(x-\omega)^{\xi+1}}\int\limits_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=x}\varphi^{(n+1)}(\vartheta)\,(\omega-\vartheta)^n\,d\vartheta=\Phi(x, \omega)$$

und differenziiren partiell nach x. In der dadurch erhaltenen Gleichung

$$\beta)\quad \frac{\partial}{\partial x}R[u, x, \xi, n]=-\frac{\Phi(x, x)}{n!\,\Gamma(-\xi)}+\frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi)}\int\limits_{\omega=x}^{\omega=u}\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, \omega)\,.\,d\omega$$

verschwindet das erste Glied rechter Hand; denn substituirt man $x+\varepsilon$ für ω in α), wo ε eine verschwindende Grösse bezeichnet, und übergeht dann bezüglich ε zur Grenze, so wird

$$\Phi(x, x+\varepsilon) = \frac{f(x+\varepsilon)}{(-\varepsilon)^{\xi+1}} \int_{\vartheta=x+\varepsilon}^{\vartheta=x} \varphi^{(n+1)}(\vartheta)\,(x+\varepsilon-\vartheta)^n\, d\vartheta =$$

$$= \frac{(-1)^{-\xi} f(x+\varepsilon)}{\varepsilon^{\xi+1}} \times \varphi^{(n+1)}(x).\varepsilon^n.\varepsilon = (-1)^{-\xi}\varphi^{(n+1)}(x) \times \varepsilon^{n-\xi}$$

und

$$\Phi(x, x) = \lim_{\varepsilon=0} \Phi(x, x+\varepsilon) = 0, \text{ wegen } n \geqq real(\xi+1).$$

Es ist also [siehe β) und α)]:

$$\frac{\partial}{\partial x} R[u, x, \xi, n] = \frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi)} \int_{\omega=x}^{\omega=u} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \omega).d\omega =$$

$$= \frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi)} \int_{\omega=x}^{\omega=u} \Bigg\{ \frac{-(\xi+1) f(\omega)}{(x-\omega)^{\xi+2}} \int_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=x} \varphi^{(n+1)}(\vartheta)\,(\omega-\vartheta)^n\, d\vartheta +$$

$$+ \frac{f(\omega) \times \varphi^{(n+1)}(x)\,(\omega-x)^n}{(x-\omega)^{\xi+1}} \Bigg\} d\omega = \frac{(-1)^n \varphi^{(n+1)}(x)}{n!\,\Gamma(-\xi)} \int_{\omega=x}^{\omega=u} \frac{f(\omega)\,d\omega}{(x-\omega)^{\xi+n}} +$$

$$+ \frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi-1)} \int_{\omega=x}^{\omega=u} \frac{f(\omega)\,d\omega}{(x-\omega)^{\xi+2}} \int_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=x} \varphi^{(n+1)}(\vartheta)\,(\omega-\vartheta)^n\, d\vartheta$$

und der Gleichung 10a) zufolge:

$$R[u, x, \xi+1, n] = \frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi-1)} \int_{\omega=x}^{\omega=u} \frac{f(\omega)\,d\omega}{(x-\omega)^{\xi+2}} \int_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=x} \varphi^{(n+1)}(\vartheta)\,(\omega-\vartheta)^n\, d\vartheta.$$

Dieselbe Gleichung ergiebt sich aber auch, wenn man in 13) $\xi+1$ an die Stelle von ξ treten lässt.

Ist daher die Gleichung 13) für einen bestimmten, sonst beliebigen Werth von ξ erwiesen, und $n \geqq real(\xi+1)$, so gilt sie auch für den um eine Einheit grösseren Werth $\xi+1$.

Nun besteht die Gleichung 13) für alle ξ, welche der Bedingung $real(\xi) < 0$ genügen; folglich gilt sie auch für alle ξ, für welche $real(\xi) < 1$, infolge dessen für alle ξ, für welche $real(\xi) < 2$ ist etc.; kurz, sie gilt für jedes ξ, wenn nur die ganze positive Zahl n gleich oder grösser ist, als der jeweilige reale Bestandtheil von $(\xi+1)$: $n \geqq real(\xi+1)$.

„Es ist sonach für jedes endliche ξ, x und u, und jedes ganze positive n, welches gleich oder grösser ist, als $real(\xi+1)$:

$$R[u, x, \xi, n] =$$

$$= D^\xi [f(x).\varphi(x)]_{x=u}^{x=x} = -\varphi(x) D^\xi [f(x)]_{x=u}^{x=x} - \binom{\xi}{1} \varphi'(x)\, D^{\xi-1} [f(x)]_{x=u}^{x=x} -$$

$$- \binom{\xi}{2} \varphi''(x)\, D^{\xi-2} [f(x)]_{x=u}^{x=x} - \ldots - \binom{\xi}{n} \varphi^{(n)}(x)\, D^{\xi-n} [f(x)]_{x=u}^{x=x} =$$

$$= \frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi)} \int_{\omega=x}^{\omega=u} \frac{f(\omega)\,d\omega}{(x-\omega)^{\xi+1}} \int_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=x} \varphi^{(n+1)}(\vartheta)\,(\omega-\vartheta)^n\, d\vartheta,$$

vorausgesetzt, dass die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. in dem geradlinigen Intervalle $(x=u,\ x=x)$ endlich und stetig sind",

oder mit anderen Worten:

„Der Fehler, welchen man begeht, wenn man die begrenzte Derivation $D^\xi[f(x).\ \varphi(x)]_{x=u}^{x=x}$ aus der unendlichen Reihe:

$$\varphi(x)\ D^\xi\,[f(x)]_{x=u}^{x=x} + \binom{\xi}{1}\varphi'(x)\,D^{\xi-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x} +$$
$$+\binom{\xi}{2}\varphi''(x)\,D^{\xi-2}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\ldots+\binom{\xi}{n}\varphi^{(n)}(x)\,D^{\xi-n}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\ldots$$

berechnet, die Rechnung aber mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede:

$$\binom{\xi}{n}\varphi^{(n)}(x)\,D^{\xi-n}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

abbricht, beträgt unter der Voraussetzung, dass $n \gtreqless real(\xi+1)$ ist und die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. innerhalb des Intervalles von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig bleiben:

$$\frac{1}{n!\,\Gamma(-\xi)}\int\limits_{\omega=x}^{\omega=u}\frac{f(\omega)\,d\omega}{(x-\omega)^{\xi+1}}\int\limits_{\vartheta=\omega}^{\vartheta=x}\varphi^{(n+1)}(\vartheta)\,(\omega-\vartheta)^n\,d\vartheta."$$

IV.

Derivationen von Derivationen, genommen nach der unteren und nach der oberen Grenze.

A) Abermalige Derivirung begrenzter Derivationen nach ihrer oberen Grenze.

a) Wie wir bereits wissen, werden nach der aus I. 14*a*) abgeleiteten Gleichung:

$$\text{I)}\qquad \frac{d^p}{dx^p}\left\{D^\xi\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\} = D^{\xi+p}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

[siehe II., Gleichung 12)],

welche wir hier der Uebersicht wegen nochmals anführen, gewöhnliche Differentialquotienten mit beliebigen ganzen positiven Exponenten (p) nach der oberen Grenze x von begrenzten Derivationen dadurch gebildet, dass man den Derivationsindex um die ganze positive Ordnungszahl (p) des Differentialquotienten vermehrt.

Anders verhält es sich, wenn man umgekehrt von einem gewöhnlichen Differentialquotienten

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = f^{(p)}(x)$$

mit beliebigem ganzem positivem Index p eine beliebige „ξ^{te}" von $x=u$ bis $x=x$ erstreckte Derivation nach der Unabhängigen x zu nehmen hat. In diesem Falle ist es keineswegs erlaubt, den Ausdruck

$$D^{\xi}\left\{\frac{d^p}{dx^p}f(x)\right\}_{x=u}^{x=x}$$

der Derivation

$$D^{\xi+p}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

gleichzusetzen. Um dies einzusehen und um den Unterschied der zwei letzterwähnten Derivationen zu ermitteln, sei μ die kleinste positive ganze Zahl, welche gleich oder grösser ist, als $real\,(\xi+1)$, mithin p die kleinste positive ganze Zahl, welche gleich oder grösser ist, als $real\,(\xi-\mu+p+1)$; ausserdem seien die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\ldots f^{(p)}(x)$ endlich und stetig in dem Intervalle ($x=u$, $x=x$).

Unter diesen Voraussetzungen ist es gestattet, von der Gleichung IIa) unter II. Gebrauch zu machen, indem man in ihr für ξ: „$\xi-\mu+p$" und für ν: „p" schreibt.

Dies giebt:

$$D^{\xi+p-\mu}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}=\frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi-p+\mu}}{\Gamma(-\xi-p+\mu+1)}+$$
$$+\frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi-p+\mu+1}}{\Gamma(-\xi-p+\mu+2)}+\frac{f''(u)\,(x-x)^{-\xi-p+\mu+2}}{\Gamma(-\xi-p+\mu+3)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(p-1)}(u)\,(x-u)^{-\xi+\mu-1}}{\Gamma(-\xi+\mu)}+\frac{1}{\Gamma(-\xi+\mu)}\int\limits_{\vartheta=u}^{\vartheta=x}\frac{f^{(p)}(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-\mu+1}}\,.$$

Da $f^{(p)}(x)$ von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig und $real\,(\xi-\mu)\leqq-1$ ist, so ist es erlaubt, in der Gleichung II) unter II. für $f(x)$: „$f^{(p)}(x)$" und für das dort vorkommende der Bedingung $real\,(\xi)\leqq-1$ unterworfene ξ: „$\xi-\mu$" zu setzen. Subtrahirt man die so gewonnene Gleichung:

$$D^{\xi-\mu}\,[f^{(p)}(x)]_{x=u}^{x=x}=\frac{1}{\Gamma(-\xi+\mu)}\int\limits_{\vartheta=u}^{\vartheta=x}\frac{f^{(p)}(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-\mu+1}}$$

von der obigen, differenziirt die hierdurch entstehende Gleichung:

$$D^{\xi+p-\mu}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}-D^{\xi-\mu}[f^{(p)}(x)]_{x=u}^{x=x}=\frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi-p+\mu}}{\Gamma(-\xi-p+\mu+1}$$
$$+\frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi-p+\mu+1}}{\Gamma(-\xi-p+\mu+2)}+\frac{f''(u)\,(x-x)^{-\xi-p+\mu+2}}{\Gamma(-\xi-p+\mu+3)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(p-1)}(u)\,(x-u)^{-\xi+\mu-1}}{\Gamma(-\xi+\mu)}$$

μ-mal hintereinander nach x, und bedenkt, dass nach dem zu Anfang dieser Nummer Gesagten

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left\{D^{\xi+p-\mu}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}=D^{\xi+p}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

und

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left\{D^{\xi-\mu}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}=D^{\xi}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x}\,,$$

ferner, dass

$$\frac{(-\xi-p+\mu)(-\xi-p+\mu+1)\dots(-\xi-p+1)}{\Gamma(-\xi-p+\mu+1)}=\frac{1}{\Gamma(-\xi-p+1)}$$

$$\frac{(-\xi-p+\mu+1)(-\xi-p+\mu)\dots(-\xi-p+2)}{\Gamma(-\xi-p+\mu+2)}=\frac{1}{\Gamma(-\xi-p+2)}$$

$$\frac{(-\xi+\mu-1)(-\xi+\mu+2)\dots(-\xi+\mu-\mu)}{\Gamma(-\xi+\mu)}=\frac{1}{\Gamma(-\xi)}$$

ist, so erhält man schliesslich:

$$\text{II)}\quad D^{\xi+p}[f(x)]_{x=u}^{x=x}-D^{\xi}[f^{(p)}(x)]_{x=u}^{x=x}=$$

$$+\frac{f(u)(x-u)^{-\xi-p}}{\Gamma(-\xi-p+1)}+\frac{f'(u)(x-u)^{-\xi-p+1}}{\Gamma(-\xi-p+2)}+\frac{f''(u)(x-u)^{-\xi-p+2}}{\Gamma(-\xi-p+3}+\dots$$

$$\dots+\frac{f^{(p-1)}(u)(x-u)^{-\xi-1}}{\Gamma(-\xi)},$$

oder

$$\text{II}a)\quad D^{\xi}\left\{\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right\}_{x=u}^{x=x}=D^{\xi+p}[f(x)]_{x=u}^{x=x}-$$

$$-\left[\frac{f(u)(x-u)^{-\xi-p}}{\Gamma(-\xi-p+1)}+\frac{f'(u)(x-u)^{-\xi-p+1}}{\Gamma(-\xi-p+2)}+\frac{f''(u)(x-u)^{-\xi-p+2}}{\Gamma(-\xi-p+3)}+\text{etc.}\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(p-1)}(u)(x-u)^{-\xi-1}}{\Gamma(-\xi)}\right].$$

Man sieht daraus, dass sich die beiden Derivationen

$$D^{\xi}\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_{x=u}^{x=x}$$

und

$$D^{\xi+p}[f(x)]_{x=u}^{x=x}=\frac{d^p}{dx^p}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}$$

nur um eine algebraische Function von x unterscheiden. Nach den von uns gemachten Voraussetzungen gelten die obigen Gleichungen II) und II a) nur dann, wenn die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\dots$, $f^{(p)}(x)$ in dem Intervalle ($x=u$, $x=x$) endlich und stetig bleiben.

b) Wir gehen nunmehr zur Lösung der allgemeineren Aufgabe über: „von einer gegebenen, innerhalb ihres Derivationsintervalles endlichen und stetigen begrenzten Derivation:

$$D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

eine beliebige, z. B. η^{te} gleichbegrenzte Derivation nach der Obergrenze x zu bilden."

Es sei η' eine der Bedingung $real(\eta')\leqq-1$ unterworfene, sonst beliebige Grösse, und Kürze halber

$$\text{1)}\qquad D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}=F(x),$$

2) $F[u, x, \xi, \delta]_{f(x)} =$

$$= \frac{f(x) - \binom{\xi}{1} f(x-\delta) + \binom{\xi}{2} f(x-2\delta) - \ldots + (-1)^n \binom{\xi}{n} f(x-n\delta)}{\delta^{\xi}} = \Phi(x),$$

wo $x - n\delta = u$ und δ beliebig klein ist.

Nach unserer Definition der begrenzten Derivationen ist die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ eine mit δ verschwindende Function von x, und nach einem in I. ausgesprochenen Satze ist der Ausdruck $F[u, x, \xi, \delta]_{f(x)}$ eine Function von x, welche für alle x von $x=u$ bis $x=x$ beliebig klein wird, wenn ein Gleiches von der Function $f(x)$ gilt, $real\, \xi \leqq -1$ und $x - u$ endlich ist.

Der Ausdruck

$$F[u, x, \eta', \delta]_{F(x)-\Phi(x)} = F[u, x, \eta', \delta]_{F(x)} - F[u, x, \eta', \delta]_{\Phi(x)}$$

ist daher (aus ähnlichen Gründen) eine mit δ zugleich verschwindende Grösse, d. h. es ist

$$\lim_{\delta=0} \{ F[u, x, \eta', \delta]_{F(x)} \quad F[u, x, \eta', \delta]_{\Phi(x)} \} = 0$$

$$\lim_{\delta=0} \{ F[u, x, \eta', \delta]_{F(x)} \} = \lim \{ F[u, x, \eta', \delta]_{\Phi(x)} \},$$

also wegen

$$\lim_{\delta=0} \{ F[u, x, \eta', \delta]_{F(x)} \} = D^{\eta'} [F(x)]_{x=u}^{x=x}$$

3) $$D^{\eta'} [F(x)]_{x=u}^{x=x} = \lim_{\delta=0} \{ F[u, x, \eta', \delta]_{\Phi(x)} \}.$$

Nun hat man aber:

4) $F[u, x, \eta', \delta]_{\Phi(x)} =$

$$= \frac{\Phi(x) - \binom{\eta'}{1} \Phi(x-\delta) + \binom{\eta'}{2} \Phi(x-2\delta) - \ldots + (-1)^n \binom{\eta'}{n} \Phi(x-n\delta)}{\delta^{\eta'}}$$

und nach Gleichung 2):

$$\begin{cases} \Phi(x) = \dfrac{f(x) - \binom{\xi}{1} f(x-\delta) + \binom{\xi}{2} f(x-2\delta) - \ldots + (-1)^n \binom{\xi}{n} f(x-n\delta)}{\delta^{\xi}} \\[2ex] \Phi(x-\delta) = \dfrac{f(x-\delta) - \binom{\xi}{1} f(x-2\delta) + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{\xi}{n-1} f(x-n\delta)}{\delta^{\xi}} \\[2ex] \Phi(x-2\delta) = \dfrac{f(x-2\delta) - \ldots + (-1)^{n-2} \binom{\xi}{n-2} f(x-n\delta)}{\delta^{\xi}} \\ \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi(x-n\delta) = \dfrac{(-1)^0 \binom{\xi}{0} f(x-n\delta)}{\delta^{\xi}} \end{cases}$$

indem x bei **ungeändertem** u infolge der Relation:

$$x - n\delta = u$$

nur dadurch nacheinander die Werthe

$$x,\quad x-\delta,\quad x-2\delta, \ldots\, x-n\delta$$

annehmen kann, wenn n gleichzeitig die entsprechenden Werthe:

$$n,\quad n-1,\quad n-2, \ldots\, n-n=0$$

erhält.

Multiplicirt man diese letzteren Ausdrücke für

$$\Phi(x),\quad \Phi(x-\delta),\quad \Phi(x-2\delta) \ldots\, \Phi(x-n\delta)$$

der Reihe nach beziehungsweise mit:

$$\frac{1}{\delta^{\eta'}},\quad -\binom{\eta'}{1}\cdot\frac{1}{\delta^{\eta'}},\quad +\binom{\eta'}{2}\cdot\frac{1}{\delta^{\eta'}}, \ldots\, (-1)^n\binom{\eta'}{n}\cdot\frac{1}{\delta^{\eta'}},$$

addirt dieselben sodann und berücksichtigt dabei die Gleichung 4) nebst den Relationen

$$\binom{\xi}{1}+\binom{\eta'}{1}=\binom{\xi+\eta'}{1},\quad \binom{\xi}{2}+\binom{\xi}{1}\binom{\eta'}{1}+\binom{\eta'}{2}=\binom{\xi+\eta'}{2}, \ldots$$

$$\ldots\binom{\xi}{n}+\binom{\xi}{n-1}\binom{\eta'}{1}+\binom{\xi}{n-2}\binom{\eta'}{2}+\ldots+\binom{\xi}{1}\binom{\eta'}{n-1}+\binom{\eta'}{n}=\binom{\xi+\eta'}{n},$$

so bekommt man

$$F[u,\, x,\, \eta',\, \delta]_{\Phi(x)} =$$

$$= \frac{f(x)-\binom{\xi+\eta'}{1}f(x-\delta)+\binom{\xi+\eta'}{2}f(x-2\delta)-\ldots+(-1)^n\binom{\xi+\eta'}{n}f(x-n\delta)}{\delta^{\xi+\eta'}}$$

$$= F[u,\, x,\, \xi+\eta',\, \delta]_{f(x)}$$

und nach 3):

$$D^{\eta'}[F(x)]_{x=u}^{x=x} = \lim_{\delta=0}\{F[u,\, x,\, \eta'\, \delta]_{\Phi(x)}\} = \lim_{\delta=0}\{F[u,\, x,\, \xi+\eta',\, \delta]_{f(x)}\} =$$

$$= D^{\xi+\eta'}[f(x)]_{x=u}^{x=x},$$

d. h. [siehe Gleichung 1)]

$$5)\qquad D^{\eta'}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\} = D^{\xi+\eta'}\{f(x)\}_{x=u}^{x=x}$$

$\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right.$ zugleich mit $f(x)$ endlich und stetig von $x=u$ bis $\left.x=x\right\}$.

Durch ν-malige Differentiation dieser Gleichung nach x ergiebt sich, wenn ν eine beliebige positive ganze Zahl (die Null eingeschlossen) bedeutet, und die aus dem bekannten Satze über die gewöhnliche Differentiation begrenzter Derivationen nach der oberen Grenze x hervorgehenden Relationen

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}D^{\eta'}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x} = D^{\eta'+\nu}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x}$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}D^{\xi+\eta'}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x} = D^{\xi+\eta'+\nu}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x}$$

in Anwendung gebracht werden:

6) $$D^{\eta'+\nu}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x}=D^{\xi+\eta'+\nu}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x}$$

$\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right.$ zugleich mit $f(x)$ endlich und stetig von $x=u$ bis $\left.x=x\right\}$.

Setzen wir hier $\eta'+\nu=\eta$, so kann η jeden beliebigen Zahlenwerth annehmen, gleichviel, ob derselbe reell oder complex ist, und wir haben schliesslich den Satz:

„Von einer gegebenen, innerhalb ihres Derivationsintervalles endlichen und stetigen begrenzten Derivation

$$\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}$$

wird eine beliebige [η^{te}] gleichbegrenzte Derivation dadurch gebildet, dass man von der ursprünglichen Function [$f(x)$] eine gleichbegrenzte Derivation nimmt, deren Index die Summe der Indices [ξ, η] der beiden Derivationen ist:

III) $$D^{\eta}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x}=D^{\xi+\eta}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

$\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right.$ zugleich mit $f(x)$ endlich und stetig von $x=u$ bis $\left.x=x\right\}$."

Ist nicht blos die Derivation

$$D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x},$$

sondern auch die Derivation

$$D^{\eta}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

zugleich mit $f(x)$ endlich und stetig von $x=u$ bis $x=x$, so besteht nicht nur die Gleichung III):

$$D^{\eta}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x}=D^{\xi+\eta}[f(x)]_{x=u}^{x=x},$$

sondern gleichzeitig auch noch die ähnliche Gleichung

$$D^{\xi}\left\{D^{\eta}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x}=D^{\xi+\eta}[f(x)]_{x=u}^{x=x}.$$

Daraus fliesst aber sofort der nachstehende bemerkenswerthe Satz:

„Zwei (oder mehrere) gleichbegrenzte Derivationen, welche einzeln für sich von einer gegebenen Function der Unabhängigen x genommen, Functionen erzeugen, die innerhalb des Derivationsintervalles zugleich mit der gegebenen Function endlich und stetig sind, können in beliebiger Ordnung von der letzteren Function genommen werden",

d. h.: Es ist

III a) $$D^{\xi}\left\{D^{\eta}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x}=D^{\eta}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x},$$

wenn

$$D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x},\quad D^{\eta}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

zugleich mit $f(x)$ von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig sind, und ebenso *ist für eine* beliebige Anzahl gleichbegrenzter Derivationen:

$$D^{(\xi)},\quad D^{(\xi')},\quad D^{(\xi'')}\ \ldots\ \text{etc.}$$

$$\text{III}\,b)\quad D^{\xi} D^{\xi'} D^{\xi''} \ldots [f(x)]_{x=u}^{x=x} = D^{\xi} D^{\xi''} D^{\xi'} \ldots [f(x)]_{x=u}^{x=x}$$
$$= D^{\xi'} D^{\xi} D^{\xi''} \ldots [f(x)]_{x=u}^{x=x} = D^{\xi'} D^{\xi''} D^{\xi} \ldots [f(x)]_{x=u}^{x=x}$$
$$= D^{\xi''} D^{\xi} D^{\xi'} \ldots [f(x)]_{x=u}^{x=x} = D^{\xi''} D^{\xi'} D^{\xi} \ldots [f(x)]_{x=u}^{x=x},$$

wenn

$$D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x},\quad D^{\xi'}[f(x)]_{x=u}^{x=x},\quad D^{\xi''}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

zugleich mit $f(x)$ von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig sind.

B) Abermalige Derivirung begrenzter Derivationen nach ihrer unteren Grenze.

Betrachten wir jetzt die untere Grenze u der Derivation:

$$D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

als unabhängig variabel, und

$$D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$

als eine Function derselben, wobei die Obergrenze x und der Index ξ als Constante gelten sollen, und setzen wir ferner voraus, dass die Function $f(x)$ von u unabhängig und in dem Intervalle ($x=u$, $x=x$) endlich und stetig ist.

a) Die aus der Gleichung 20) in I. abgeleitete Gleichung 6) in II.:

$$\text{IV)}\qquad \frac{d}{du}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\} = \frac{-f(u)}{\Gamma(-\xi)\,(x-u)^{\xi+1}}$$

lehrt uns zunächst das Verfahren, welches einzuschlagen ist, wenn das Differential einer begrenzten Derivation nach der unteren Grenze gebildet werden soll.

Wenn wir dieselbe $(p-1)$-mal hintereinander nach u differenziiren, wobei p irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhalten wir nach einigen einfachen Reductionen die Formel:

$$\text{IV}\,a)\qquad \frac{d^p}{du^p}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\} =$$
$$-\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x-u)^{-\xi-p}}{\Gamma(-\xi-p+1)}f(u) + \dbinom{p-1}{1}\dfrac{(x-u)^{-\xi-p+1}}{\Gamma(-\xi-p+2)}f'(u) + \\ \qquad + \dbinom{p-1}{2}\dfrac{(x-u)^{-\xi-p+2}}{\Gamma(-\xi-p+3)}f''(u) + \text{etc.} \\ \ldots + \dbinom{p-1}{p-2}\dfrac{(x-u)^{-\xi-2}}{\Gamma(-\xi-1)}f^{(p-2)}(u) + \dfrac{(x-u)^{-\xi-1}}{\Gamma(-\xi)}f^{(p-1)}(u)\end{array}\right\},$$

nach welcher überhaupt beliebige gewöhnliche Differentialquotienten begrenzter Derivationen nach der unteren Grenze gebildet werden können.

b) Es seien a, b, c drei von einander verschiedene (im Allgemeinen complexe) Grössen, welche geometrisch genommen drei um endliche Strecken von einander abstehende Punkte der Ebene vorstellen; die Function $f(x)$ sei für alle Punkte x, welche in der Fläche des, durch die

drei Eckpunkte a, b, c bestimmten ebenen Dreieckes liegen, endlich und stetig; desgleichen die Derivation:

$$D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=c},$$

wenn der Punkt u die geradlinige Strecke vom Punkte a bis zum Punkte b durchläuft. Endlich setzen wir, um kurz anzudeuten, dass wir die Derivation

$$D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=c}$$

als Function der Unabhängigen u auffassen:

$$7)\qquad D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=c} = F(u),$$

also:

$$7a)\qquad \frac{d}{du}\left\{D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=c}\right\} = \frac{-f(u)}{\Gamma(-\xi)\,(c-u)^{\xi+1}} = F'(u).$$

Es leuchtet ein, dass unter den gemachten Voraussetzungen sowohl $F(u)$ als auch $F'(u)$ von $u=a$ bis $u=b$ endliche und stetige Functionen von u sind.

Schreiben wir in der Gleichung II a) für ξ: $\eta-1$ (wo η eine beliebige endliche Grösse vorstellt), nehmen die Grösse a statt u zur unteren, die Grösse b statt x zur oberen Grenze der daselbst vorkommenden Derivationen und setzen $p=1$, so wird unter der Bedingung, dass $f(x)$, $f'(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig sind:

$$D^{\eta-1}[f'(x)]_{x=a}^{x=b} = D^{\eta}[f(x)]_{x=a}^{x=b} - \frac{f(a)\,(b-a)^{-\eta}}{\Gamma(-\eta+1)}.$$

Wenn wir nun hier die unabhängige Variable x der Derivationen:

$$D^{\eta-1}[f'(x)]_{x=a}^{x=b},\quad D^{\eta}[f(x)]_{x=a}^{x=b}$$

mit dem Buchstaben u statt mit x bezeichnen, ohne jedoch die Grenzen a und b zu ändern (wodurch an den Werthen der Derivationen Nichts geändert wird), und wenn wir dann die Function $F(u)$ an die Stelle der Function $f(u)$ treten lassen [was erlaubt ist, da die Functionen $F(u)$ und $F'(u)$ von $u=a$ bis $u=b$ endlich und stetig sind], so erhalten wir schliesslich

$$D^{\eta-1}[F'(u)]_{u=a}^{u=b} = D^{\eta}[F(u)]_{u=a}^{u=b} - \frac{F(a)\,(b-a)^{-\eta}}{\Gamma(-\eta+1)},$$

oder wegen $F(u) = D^{\xi}[f(x)]_{x=u}^{x=c}$, $F(a) = D^{\xi}[f(x)]_{x=a}^{x=c}$

$$F'(u) = -\frac{f(u)}{\Gamma(-\xi)\,(c-u)^{\xi+1}}$$

[siehe 7) und 7a)]:

$$\text{V)}\qquad \frac{d^{\eta}}{du^{\eta}}\left\{\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}}[f(x)]_{x=u}^{x=c}\right\}_{u=a}^{u=b} = -\frac{1}{\Gamma(-\xi)}\,\frac{d^{\eta-1}}{du^{\eta-1}}\left\{\frac{f(u)}{(c-u)^{\xi+1}}\right\}_{u=a}^{u=b} + \frac{(b-a)^{-\eta}}{\Gamma(-\eta+1)}\,\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}}[f(x)]_{x=a}^{x=c}.$$

Diese Gleichung gilt, wenn $f(x)$ für jeden Punkt x, welcher in die Fläche des, durch die Eckpunkte a, b, c bestimmten Dreieckes fällt, endlich und stetig ist, und ein Gleiches von der Derivation

$$D^{\xi}\left[f(x)\right]_{x=u}^{x=c}$$

gilt, wenn der Punkt u die gerade Strecke vom Punkte $u=a$ bis zum Punkte $u=b$ durchläuft.

V.

Anwendung der begrenzten Derivationen.

Obgleich wir uns hier auf die Theorie der „begrenzten" Derivationen solcher Functionen beschränkt haben, welche innerhalb des Derivationsintervalles endlich und stetig verlaufen, so gestatten uns doch schon die bis jetzt entwickelten Sätze die Auflösung von Aufgaben, welche mittelst des Calculs von Liouville oder auf andere Weise entweder gar nicht oder doch nur mit den grössten Schwierigkeiten und auf Umwegen gelöst werden können.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, lassen wir zum Schlusse einige Aufgaben mit ihren Auflösungen folgen, und bitten den geehrten Leser, es zu versuchen, dieselben auf eine **wesentlich andere**, ebenso einfache Weise zu lösen.

I. Aufgabe. „Es sei $f(x)$ eine von $x=u$ bis $x=x$ endliche und stetige sonst aber **unbekannte** Function der Unabhängigen x; u eine beliebige, λ eine der Bedingung *real* $\lambda \geqq 0$ unterworfene, sonst ebenfalls beliebige endliche Constante. Man bestimme die Function $f(x)$ dermassen, dass das bestimmte nach der von x unabhängigen Variabeln ϑ genommene Integral

$$\int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} f(\vartheta)\,(\vartheta-x)^{\lambda}\,d\vartheta$$

einer gegebenen von $x=u$ bis $x=x$ endlichen und stetigen Function $F(x)$ gleich wird."

Auflösung. Man setze $\lambda=-(\xi+1)$, also $\xi=-\lambda-1$, und beachte, dass nach II. Gleichung II) wegen *real* $\xi \leqq -1$

$$\int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} f(\vartheta)\,(\vartheta-x)^{\lambda}\,d\vartheta=(-1)^{\lambda}\,\Gamma(-\xi)\;D^{\xi}\left[f(x)\right]_{x=u}^{x=x},$$

mithin der Aufgabe zufolge

$$(-1)^{\lambda}\,\Gamma(-\xi)\,D^{\xi}\left[f(x)\right]_{x=u}^{x=x}=F(x),$$

$$D^{-\lambda-1}\left[f(x)\right]_{x=u}^{x=x}=\frac{1}{(-1)^{\lambda}\,\Gamma(\lambda+1)}\,F(x)$$

ist.

Nimmt man von dieser Gleichung die $(\lambda+1)^{\text{te}}$ von $x=u$ bis $x=x$ erstreckte Derivation nach der Unabhängigen x und setzt dem Theorem III) in IV. gemäss

$$D^{\lambda+1}\left\{D^{-\lambda-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x}\right\}_{x=u}^{x=x} = D^{\lambda+1-\lambda-1}[f(x)]_{x=u}^{x=x}$$
$$= D^0\,[f(x)]_{x=u}^{x=x} = f(x)$$

[siehe II., 4)], so erhält man

$$\text{I)} \qquad f(x) = \frac{1}{(-1)^{\lambda}\,\Gamma(\lambda+1)}\,D^{\lambda+1}[F(x)]_{x=u}^{x=x}.$$

„Die gesuchte Function $f(x)$ ist daher:

$$\frac{1}{(-1)^{\lambda}\,\Gamma(\lambda+1)}\,D^{\lambda+1}[F(x)]_{x=u}^{x=x}.\text{“}$$

II. Aufgabe. „Es seien x und y zwei unabhängige Variable, deren Spielraum dadurch bestimmt ist, dass wir festsetzen, die Variable y ändere sich von $y=\varphi(x)$ bis $y=y$, die Variable x von $x=u$ bis $x=x$. Die Function $\varphi(x)$ sei innerhalb des Spielraumes der Unabhängigen x, also von $x=u$ bis $x=x$ endlich und stetig, und u eine endliche Constante. Ferner seien ϑ_1, ϑ_2 zwei andere Unabhängige, von welchen sich die zweite ϑ_2 von $\vartheta_2=\varphi(\vartheta_1)$ bis $\vartheta_2=y$, die erste ϑ_1 von $\vartheta_1=u$ bis $\vartheta_1=x$ ändert, so dass ϑ_1 und ϑ_2 den nämlichen Spielraum haben, wie x und y. Endlich sei $\lambda_2=\psi(\vartheta_1)$ eine innerhalb des Spielraumes von ϑ_1, d. h. von $\vartheta_1=u$ bis $\vartheta_1=x$ endliche und stetige Function, deren realer Bestandtheil positiv ist oder verschwindet, und λ_1 eine derselben Bedingung *real* $\lambda_1 \geqq 0$ unterworfene Constante.

Man bestimme eine unbekannte, aber in dem angegebenen Spielraume der Unabhängigen x, y endliche und stetige Function $f(x, y)$ derart, dass das Doppelintegral

$$\int\limits_{\vartheta_1=u}^{\vartheta_1=x}\int\limits_{\vartheta_2=\varphi(\vartheta_1)}^{\vartheta_2=y} f(\vartheta_1, \vartheta_2)\,(\vartheta_1-x)^{\lambda_1}\,(\vartheta_2-y)^{\lambda_2}\,d\vartheta_1\,d\vartheta_2$$

einer gegebenen innerhalb des festgesetzten Spielraumes der Unabhängigen x, y endlichen und stetigen Function $F(x, y)$ gleich wird.“

Auflösung. Setzen wir das einfache Integral:

$$\int\limits_{\vartheta_2=\varphi(\vartheta_1)}^{\vartheta_2=y} f(\vartheta_1, \vartheta_2)\,(\vartheta_2-y)^{\lambda_2}\,d\vartheta_2,$$

welche offenbar eine Function von ϑ_1 und y ist gleich $f_1(\vartheta_1, y)$:

$$\text{1)} \qquad \int\limits_{\vartheta_2=\varphi(\vartheta_1)}^{\vartheta=y} f(\vartheta_1, \vartheta_2)\,(\vartheta_2-y)^{\lambda_2}\,d\vartheta_2 = f_1(\vartheta_1, y),$$

so ist der Aufgabe zufolge:

$$\text{2)} \qquad \int\limits_{\vartheta_1=u}^{\vartheta_1=x} f_1(\vartheta_1, y)\,(\vartheta_1-x)^{\lambda_1}\,d\vartheta_1 = F(x, y).$$

Aus der Gleichung 2) folgt aber augenblicklich (siehe die Aufgabe I und ihre Lösung):

$$\text{3)} \qquad f_1(x, y) = \frac{1}{(-1)^{\lambda_1}\,\Gamma(\lambda_1+1)}\,D^{\lambda_1+1}[F(x, y)]_{x=u}^{x=x}.$$

Schreibt man in 1) für die Unabhängige ϑ_1: x, was erlaubt ist, da x denselben Spielraum hat, wie ϑ_1, und sucht aus der so entstehenden Gleichung

$$\int_{\vartheta_2=\varphi(x)}^{\vartheta_2=y} f(x, \vartheta_2)\,(\vartheta_2-y)^{\psi(x)}\,d\vartheta_2=f_1(x, y)$$

die Function $f(x, y)$, so bekommt man

$$4)\qquad f(x, y)=\frac{1}{(-1)^{\psi(x)}\Gamma[1+\psi(x)]}\,D^{\psi(x)+1}\,[f_1(x, y)]_{y=\varphi(x)}^{y=y}$$

(siehe die Aufgabe I und ihre Lösung), oder wenn man hier den Werth von $f_1(x, y)$ aus 3) substituirt:

$$\text{II)}\quad f(x, y)=$$

$$=\frac{1}{(-1)^{\lambda_1+\psi(x)}\Gamma(1+\lambda_1)\,\Gamma[1+\psi(x)]}\,D^{\psi(x)+1}\left\{D^{\lambda_1+1}\,[F(x, y)]_{x\ \ u}^{x=x}\right\}_{y=\varphi(x)}^{y=y}$$

III. Aufgabe. „Es seien x, y, z drei unabhängige Variable; die Unabhängige z variire von $z=\varphi(x, y)$ bis $z=z$, die Unabhängige y von $y=\varphi_1(x)$ bis $y=y$, die Unabhängige x von $x=u$ bis $x=x$; $\varphi(x, y)$, $\varphi_1(x)$ seien respective Functionen von x und y, und von x allein, welche innerhalb des oben angegebenen Spielraumes der Variablen x, y endlich und stetig sind, u sei eine endliche Constante.

Ferner seien ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 drei andere Unabhängige, von welchen die erste ϑ_1 von $\vartheta_1=u$ bis $\vartheta_1=x$, die zweite von $\vartheta_2=\varphi_1(\vartheta_1)$ bis $\vartheta_2=y$, die dritte von $\vartheta_3=\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2)$ bis $\vartheta_3=z$ variirt; so dass die Unabhängigen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 denselben Spielraum haben, wie x, y und z.

Endlich sei $\lambda_3=\psi(\vartheta_1, \vartheta_2)$ eine der Bedingung $real(\lambda_3)\geqq 0$ unterworfene Function von ϑ_1 und ϑ_2, $\lambda_2=\psi_1(\vartheta_1)$ eine der ähnlichen Bedingung $real(\lambda_2)\geqq 0$ unterworfene Function von ϑ_1, beide innerhalb des Spielraumes der ϑ_1 und ϑ_2 endlich und stetig, λ_1 eine der Bedingung $real(\lambda_1)\geqq 0$ unterliegende endliche Constante.

Man bestimme eine innerhalb des oben festgesetzten Spielraumes der Unabhängigen x, y, z endliche und stetige Function $f(x, y, z)$ derart, dass das dreifache Integral

$$\int_{\vartheta_1=u}^{\vartheta_1=x}\int_{\vartheta_2=\varphi_1(\vartheta_1)}^{\vartheta_2=y}\int_{\vartheta_3=\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2)}^{\vartheta_3=z} f(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)\,(\vartheta_1-x)^{\lambda_1}\,(\vartheta_2-y)^{\lambda_2}\,(\vartheta_3-z)^{\lambda_3}\,d\vartheta_1\,d\vartheta_2\,d\vartheta_3$$

einer gegebenen innerhalb des Spielraumes der Unabhängigen x, y, z endlichen und stetigen Function $F(x, y, z)$ gleich wird."

Auflösung. Setzt man:

$$1)\qquad \int_{\vartheta_3=\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2)}^{\vartheta_3=z} f(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)\,(\vartheta_3-z)^{\lambda_3}\,d\vartheta_3=f_1(\vartheta_1, \vartheta_2, z),$$

$$2)\qquad \int_{\vartheta_2=\varphi_1(\vartheta_1)}^{\vartheta_2=y} f_1(\vartheta_1, \vartheta_2, z)\,(\vartheta_2-y)^{\lambda_2}\,d\vartheta_2=f_2(\vartheta_1, y, z),$$

so wird der Aufgabe zufolge:

$$3) \qquad \int_{\vartheta_1=u}^{\vartheta_1=x} f_2(\vartheta_1, y, z)(\vartheta_1 - x)^{\lambda_1} d\vartheta_1 = F(x, y, z).$$

Aus 3) folgt:

$$4) \qquad f_2(x, y, z) = \frac{1}{(-1)^{\lambda_1}\Gamma(\lambda_1+1)} D^{\lambda_1+1}[F(x, y, z)]_{x=u}^{x=x}$$

aus 2), nachdem daselbst x für ϑ_1 geschrieben worden:

$$5) \qquad f_1(x, y, z) = \frac{1}{(-1)^{\psi_1(x)}\Gamma[1+\psi_1(x)]} D^{\psi_1(x)+1}\{f_2(x, y, z)\}_{y=\varphi_1(x)}^{y=y},$$

endlich aus 1), nachdem daselbst x für ϑ_1, y für ϑ_2 genommen worden:

$$6) \; f(x, y, z) = \frac{1}{(-1)^{\psi(x,y)}\Gamma[1+\psi(x, y)]} D^{\psi(x, y)+1}\{f_1(x, y, z)\}_{z=\varphi(x, y)}^{z=z}.$$

Es ist also:

$$\text{III)} \quad f(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{\lambda_1+\psi_1(x)+\psi(x,y)}\Gamma(1+\lambda_1)\Gamma[1+\psi_1(x)]\Gamma[1+\psi(x, y)]} \times$$

$$\times D^{1+\psi(x,y)}\Big\{ D^{1+\psi_1(x)}\Big[D^{1+\lambda_1}(F[x, y, z])_{x=u}^{x=x}\Big]_{y=\varphi_1(x)}^{y=y}\Big\}_{z=\varphi(x, y)}^{z=z}.$$

XIX.

Grundzüge von Plücker's neuer Raumgeometrie.

Von

Dr. DRONKE,

Director der K. Provinzial-Gewerbschule in Coblenz.

---

§. 1.

Die gerade Linie.

Bereits in einer früheren Mittheilung war es mir vergönnt, die Grundzüge der neuen Raumgeometrie Plücker's in kurzen Worten anzudeuten. Es soll hier versucht werden, dieselben unter Anführung von Beispielen aus der Mechanik und Physik weiter auszuführen. Es werden hierbei die Bezeichnungen, wie sie bereits in der früheren Mittheilung eingeführt worden sind, als bekannt vorausgesetzt.

Es seien die Gleichungen zweier Ebenen im Raume

$$1) \quad \begin{cases} \Omega \equiv ax + by + cz + d\omega = 0 \\ \Omega' \equiv a'x + b'y + c'z + d'\omega = 0. \end{cases}$$

Der Schnitt dieser beiden bestimmt eine Axe. Wir können uns diese auch vorstellen als eine Gerade, welche von einer um sie rotirenden Ebene umhüllt wird. Diese Ebene wird in jeder ihrer Lagen dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$2) \quad \Omega + \mu \Omega' = 0,$$

wo μ einen constanten Factor bedeutet. Unter allen diesen von der Gleichung dargestellten Ebenen haben aber folgende vier eine besondere Lage: diejenige, welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht und jene drei, welche auf den drei Coordinatenebenen senkrecht stehen. Die Gleichungen derselben ergeben sich, wenn man einführt eine der Bedingungen

$$3) \quad \begin{aligned} a + \mu a' &= 0 \\ b + \mu b' &= 0 \\ c + \mu c' &= 0 \\ d + \mu d' &= 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichungen μ, so erhält man als die Gleichungen der vier ebengenannten Ebenen:

$$4)\quad \begin{aligned} &(ad'-a'd)\,x+(bd'-b'd)\,y+(cd'-c'd)\,z=0\\ &(ac'-a'c)\,x+(bc'-b'c)\,y+(c'd-cd')\,\omega=0\\ &(ab'-a'b)\,x+(b'c-bc')\,z+(b'd-bd')\,\omega=0\\ &(ab'-a'b)\,y+(ac'-a'c)\,z+(ad'-a'd)\,\omega=0. \end{aligned}$$

Wie bereits bemerkt, geht jede dieser Ebenen durch die Axe, und ist letztere also wiederum umgekehrt durch je zwei der obigen Ebenen bestimmt. Zur Bestimmung einer Geraden sind jedoch fünf Coordinaten nothwendig und in obigen vier Gleichungen sind die sechs Coordinaten $(ad'-a'd)$, $(ac'-a'c)$, $(ab'-a'b)$, $(bd'-b'd)$, $(bc'-b'c)$ und $(cd'-c'd)$ enthalten. Zwischen denselben muss daher eine Bedingungsgleichung statthaben. Um diese zu bestimmen, multiplicire man die erste Gleichung mit $(bc'-b'c)$, die zweite mit $(b'd-bd')$ und die dritte mit $(cd'-c'd)$, addire hierauf die drei Gleichungen, so erhält man sofort als Bedingungsgleichung die folgende:

$$5)\quad (ad'-a'd)(bc'-b'c)+(ac'-a'c)(b'd-bd') + (ab'-a'b)(cd'-c'd)=0.$$

Es können also die sechs obigen Grössen, mit beliebigen Vorzeichen, als die Coordinaten einer Axe betrachtet werden. Um dieselben auf fünf zurückzuführen, denken wir uns alle einzelnen durch $(ab'-a'b)$ dividirt; alsdann setzen wir:

$$6)\quad \begin{aligned} &\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=r,\quad -\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=s,\quad -\frac{ad'-a'd}{ab'-a'b}=\sigma,\\ &\frac{bd'-b'd}{ab'-a'b}=\varrho,\quad \frac{cd'-c'd}{ab'-a'b}=\eta, \end{aligned}$$

so sind r, s, ϱ, σ, η und 1 die sechs Coordinaten der Axe und es muss noch nach 5) die Gleichung statthaben:

$$7)\quad -r\sigma+s\varrho+\eta=0$$

oder

$$8)\quad \eta=s\varrho-r\sigma.$$

Die Bedeutung der sechs Coordinaten ergiebt sich sofort, wenn wir die Gleichungen der vier Ebenen 4) in folgender Form schreiben, wobei $\omega=1$ gesetzt ist:

$$9)\quad \begin{aligned} -\sigma x+\varrho y+\eta z&=0\\ -sx+ry+\eta&=0\\ x-rz-\varrho&=0\\ y-sz-\sigma&=0. \end{aligned}$$

Die drei letzten dieser vier Gleichungen stellen also im Raum die durch die Axe gehenden und auf den drei Coordinatenebenen senkrecht stehenden Ebenen dar, in der xy-, xz- und yz-Ebene stellen sie die Projectionen der Axe dar. Zur Bestimmung der Axe selbst wollen wir stets die beiden *letzten* Gleichungen benutzen.

Bezeichnet man mit α, β, γ die drei Winkel, welche die Axe mit den drei Coordinatenaxen bildet, es seien ferner λ, μ, ν die drei Winkel, welche eine Normale auf der durch den Coordinatenanfangspunkt und die Axe gehenden Ebene mit den drei Coordinatenaxen bildet, so ist

$$10)\quad \begin{aligned} &\cos\alpha.\cos\lambda+\cos\beta.\cos\mu+\cos\gamma.\cos\nu=0\\ &\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=0\\ &\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=0. \end{aligned}$$

Es bedeute ferner noch p das vom Coordinatenanfangspunkte auf die Axe gefällte Perpendikel. Alsdann ergiebt sich sofort folgender Complex von Gleichungen:

$$11)\quad \begin{aligned} &r:s:1\,(-\sigma):\varrho:\eta\\ &=(bc'-b'c):(a'c-ac'):(ab'-a'b):(ad'-a'd):(bd'-b'd):(cd'-c'd)\\ &=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma:p\cos\lambda:p\cos\mu:p\cos\nu. \end{aligned}$$

Wir können daher je sechs dieser Glieder als die Coordinaten einer Axe ansehen. Die Bedingungsgleichung 5) für die Coordinaten

$$\cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma,\quad p\cos\lambda,\quad p\cos\mu,\quad p\cos\nu$$

geht in die erste Gleichung 10) hierbei über.

Wenn in den Gleichungen 1) die Grössen x, y, z und ω als variabel angesehen wurden, so stellten sie Ebenen dar. Denken wir uns nun x, y, z, ω als constant und a, b, c, d als variabel, so stellt eine jede Gleichung 1) einen Punkt dar und es wird daher durch

$$12)\quad \begin{cases} \Omega\equiv ax+by+cz+d\omega=0\\ \Omega'\equiv ax'+by'+cz'+d\omega'=0 \end{cases}$$

eine Gerade mittelst zweier in ihr liegender Punkte bestimmt, d. h. die Gleichungen 12) stellen einen Strahl vor. Indem man dieselben Betrachtungen, wie oben bei der Axe anstellt, ersieht man sofort, dass jeder Punkt, dessen Gleichung, unter μ einen beliebigen constanten Factor verstanden,

$$13)\quad \Omega+\mu\Omega'=0$$

ist, in dem durch 12) betimmten Strahle liegen muss. Indem man hierauf wiederum mit Hülfe der Gleichungen:

$$14)\quad \begin{aligned} x+\mu x'=0,\quad y+\mu y'=0\\ z+\mu z'=0,\quad \omega+\mu\omega'=0 \end{aligned}$$

den Factor μ eliminirt, erhält man die vier Punkte:

$$15)\quad \begin{aligned} &(x\omega'-x'\omega)\,a+(y\omega'-y'\omega)\,b+(z\omega'-z'\omega)\,c=0\\ &(xz'-x'z)\,a+(yz'-y'z)\,b+(z'\omega-z\omega')\,d=0\\ &(xy'-x'y)\,a+(y'z+yz')\,c+(y'\omega-y\omega')\,d=0\\ &(x'y-xy')\,b+(x'z-xz')\,c+(x'\omega-x\omega')\,d=0. \end{aligned}$$

Die drei letzten Punkte sind diejenigen, in welchen der Strahl die xy-, die xz- und yz-Ebene trifft; der durch die erste Gleichung bestimmte Punkt liegt im Unendlichen auf dem Strahl. Es sind also die sechs Coordinaten des Strahles:

$$(x\omega'-x'\omega),\quad (y\omega'-y'\omega),\quad (z\omega'-z'\omega),$$
$$(xz'-x'z),\quad (yz'-y'z),\quad (xy'-x'y)$$

mit beliebigem Vorzeichen.

Multiplicirt man wiederum die erste der vier Gleichungen 15) mit $(yz'-y'z)$, die zweite mit $(y'\omega-y\omega')$, die dritte mit $(z\omega'-z'\omega)$, und addirt hierauf diese drei Gleichungen, so erhält man als Bedingungsgleichung, welche zwischen den sechs Coordinaten statthaben muss:

$$16)\qquad (x\omega'-x'\omega)(yz'-y'z)+(xz'-x'z)(y'\omega-y\omega') + (xy'-x'y)(z\omega'-z'\omega)=0.$$

Führen wir nun auch hier folgende Bezeichnungen ein:

$$17)\qquad -\frac{x\omega'-x'\omega}{xy'-x'y}=\varkappa,\quad \frac{y\omega'-y'\omega}{xy'-x'y}=\tau,\quad \frac{z\omega'-z'\omega}{xy'-x'y}=\zeta,$$
$$-\frac{xz'-x'z}{xy'-x'y}=q,\quad \frac{yz'-y'z}{xy'-x'y}=t,$$

so wandeln sich die Gleichungen 15) sofort in die folgenden um:

$$18)\qquad \begin{aligned} -\varkappa a+\tau b+\zeta c&=0\\ -qa+tb-\zeta d&=0\\ a-tc-\tau d&=0\\ b-qc-kd&=0. \end{aligned}$$

Aus den eingeführten Bezeichnungen findet man sofort weiter wiederum folgende Proportion:

$$19)\qquad -k:\tau:\zeta:t:q:1=$$
$$=(x\omega'-x'\omega):(y\omega'-y'\omega):(z\omega'-z'\omega):(yz'-y'z):(x'z-xz'):(xy'-x'y)$$
$$=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma:p\cos\lambda:p\cos\mu:p\cos\nu.$$

Diese gewonnenen Resultate erhalten sofort eine praktische Bedeutung, wenn man zur Mechanik übergeht. Es wirke z. B. auf einen Körper eine Kraft ein, deren Grösse durch die Entfernung der beiden Bestimmungspunkte eines Strahles und deren Richtung durch die Richtung des Strahles gegeben ist; bildet man alsdann die drei Componenten X, Y, Z der Kraft, sowie die drei in die Coordinatenebenen fallenden Kräftepaare L, M, N, so kann man sofort als die sechs Coordinaten der Kraft die Grössen X, Y, Z, L, M, N ansehen und erhält so die Gleichungen:

$$20)\qquad X:Y:Z:L:M:N=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma:p\cos\lambda:p\cos\mu:p\cos\nu,$$
$$21)\qquad XL+YM+ZN=0.$$

Findet umgekehrt diese Beziehung zwischen den Componenten und den Kräftepaaren statt, so lässt sich an Stelle derselben eine Einzelkraft setzen. Letztere Gleichung sagt aus, dass die Axe, welche das Kräftepaar geometrisch darstellt, senkrecht zu der Resultante steht.

Hat man eine Reihe von Kräften, deren Coordinaten die ebengenannten Grössen sind, so erhält man nach der Grundformel der Statik als die sechs resultirenden Coordinaten:

$$\Sigma^x,\quad \Sigma^y,\quad \Sigma^z,\quad \Sigma^L,\quad \Sigma^M,\quad \Sigma^N,$$

und genügen diese der Gleichung 21), so erhält man eine resultirende Kraft. Findet aber diese Gleichung nicht statt, und ist φ der Neigungswinkel zwischen der Resultante R und der Axe des resultirenden Kräftepaares P, so ist bekanntlich

$$22)\qquad \cos\varphi = \frac{\Sigma^x\ \Sigma^L + \Sigma^y\ \Sigma^M + \Sigma^z\ \Sigma^N}{R\,.\,P}$$

und es findet alsdann keine Beziehung zwischen den sechs Coordinaten statt. In diesem Falle nennt Plücker die den Effect bewirkende Ursache eine Dyname; ich schlage statt dessen, um Verwechselung zu verhüten, den Namen Kratoide vor und soll dieser letztere auch in dieser Abhandlung beibehalten bleiben.

Bei den drei Coordinaten

$$xy' - x'y, \quad zx' - z'x, \quad yz' - y'z$$

einer Axe (oder einer Kraft) bleiben die Grössen identisch, wenn man x', y', z' durch $(x'-x)$ $(y'-y)$ und $(z'-z)$ ersetzt. Daher können wir auch als die sechs Coordinaten ansehen die Grössen X, Y, Z, $Yz - Zy$, $Zx - Xz$, $Xy - Yx$ und bedeuten hierbei x, y, z die Coordinaten eines in der Richtung der Kraft liegenden Punktes, deren Intensität durch X, Y, Z bestimmt ist.

Kehren wir zu einer Axe zurück und setzen noch

$$x' - x = dx, \quad y' - y = dy, \quad z' - z = dz,$$

d. h. wir nehmen zwei aufeinanderfolgende Punkte zur Bestimmung der Axe, so sind deren Coordinaten dx, dy, dz, $(y\,dz - z\,dy)$, $(z\,dx - x\,dz)$, $(x\,dy - y\,dx)$, und treten diese in dasselbe Verhältniss zu einander, wie die oben gebrauchten Coordinaten. Entsprechendes gilt natürlich auch für die Axe, wenn wir zu deren Bestimmung zwei aufeinanderfolgende Ebenen nehmen.

Als Hauptergebniss ist die Einführung der neuen Coordinaten und der Complex der Gleichungen 11), 19) und 20) zu betrachten.

§. 2.

Complexe.

Allgemeines.

Besteht eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den Coordinaten der Geraden — seien es Axen oder Strahlen —, so sagen wir, die geraden Linien, deren Coordinaten der Gleichung genügen, stellen einen Complex n^{ten} Grades dar. Es ist dabei nach den im Vorhergehenden gegebenen Gleichungen zwischen den verschiedenen Coordinaten der Complex derselbe, welche Coordinaten man auch nehmen mag, wenn nur die homogene Function dieselbe bleibt. Es sind also z. B. die beiden Complexe

$$23)\qquad \begin{array}{l} \Omega_n \equiv F(r, s, 1, -\sigma, \varrho, \eta) = 0 \quad \text{und} \\ \Omega_n \equiv F(-k, \tau, \zeta, \iota, q, 1) = 0 \end{array}$$

identisch, wenn F dieselbe Function bedeutet. n bedeutet hierbei den Grad der Gleichung, also auch den Grad des Complexes.

Zunächst lassen sich sofort von den Complexen n^{ten} Grades die folgenden beiden Eigenschaften nachweisen.

1) Alle Geraden eines Complexes vom n^{ten} Grade, welche in irgend einer Ebene des Raumes liegen, umhüllen in dieser eine Curve von der n^{ten} Classe;

2) Alle gerade Linien des Complexes, die durch einen Punkt des Raumes gehen, bilden einen Kegel der n^{ten} Ordnung, dessen Spitze der Schnittpunkt der Geraden ist.

Um den ersteren Theil des Satzes zu beweisen, denke man sich in dem durch die Gleichung

$$24)\quad \begin{array}{l} \Omega_n \equiv F\{(bc'-b'c),\ (a'c-ac'),\ (ab'-a'b),\ (ad'-a'd), \\ \qquad (bd'-b'd),\ (cd'-c'd)\} = 0 \end{array}$$

dargestellten Complexe die Ebene (a', b', c', d') zunächst als constant, so wird dieselbe durch die Ebene (a, b, c, d) in einer Geraden geschnitten; indem man nun alle Ebenen (a, b, c, d) nimmt, welche zu dem Complexe gehören, erhält man unendlich viele Gerade in der Ebene (a', b', c', d') und es umhüllen diese eine Curve, deren Classe gleich dem Grade des Complexes ist. Indem wir nun alle Ebenen (a', b', c', d') des Raumes nehmen, erhalten wir obigen Satz, dass ein Complex des n^{ten} Grades durch jede Ebene des Raumes in einer Curve n^{ter} Classe geschnitten wird.

Betrachten wir nun solche Ebenen, die durch eine gemeinsame Axe gehen, so schneiden alle Tangenten an die Curven — also die in den Ebenen liegenden Geraden des Complexes die Axe und zwar gehen in jeder Ebene n Tangenten durch denselben Punkt der Axe. Dieser Punkt ist dabei ganz beliebig; dagegen schneidet keine Gerade, die Tangente an eine Curve, die nicht in einer durch die gemeinschaftliche Axe gehenden Ebene liegt, ist, die genannte Axe. Es stellen daher die durch einen Punkt der Axe gehenden Tangenten (je n in einer Ebene) an die Curven einen Kegel von der n^{ten} Ordnung dar; da nun der Punkt der Axe, die Spitze des Kegels, beliebig angenommen werden kann, so gilt der oben gegebene Satz ganz allgemein.

Dasselbe Resultat würde sich ergeben haben, wenn wir statt des Complexes von Axen [24)] den hiermit identischen Strahlencomplex

$$25)\quad \begin{array}{l} \lambda\Omega_n \equiv F[(x\omega'-x'\omega),\ (y\omega'-y'\omega),\ (z\omega'-z'\omega), \\ \qquad (yz'-y'z),\ (x'z-xz'),\ (xy'-x'y)] = 0 \end{array}$$

der Betrachtung unterzogen hätten. Nimmt man nämlich hierin den Punkt (x', y', z', ω') als constant und den Punkt (x, y, z, ω) als veränderlich, so stellt die obige Gleichung 25) einen Kegel der n^{ten} Ordnung dar; d. h. alle Strahlen eines Complexes vom n^{ten} Grade, die durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen, stellen einen Kegel der n^{ten} Ordnung dar, dessen Spitze der genannte Punkt ist.

Hieraus folgt nun sofort, dass wir einen Complex von Geraden von dem n^{ten} Grade auffassen können sowohl als den Complex von Curven der n^{ten} Classe, von denen jede Ebene des Raumes eine enthält, oder als den Complex von Kegeln der n^{ten} Ordnung, wobei jeder Punkt des Raumes die Spitze eines Kegels ist.

Nehmen wir, wie wir dies bereits oben gethan, alle die Ebenen, welche sich in einer gemeinsamen Axe schneiden; die alsdann durch die in den Ebenen liegenden Curven gebildeten Flächen werden von Plücker Flächen des Complexes genannt; sie werden, wie man sofort aus dem Vorstehenden ersieht, umhüllt von Kegeln der n^{ten} Ordnung, deren Spitzen in der gemeinschaftlichen Axe der Ebenen liegen; wir können daher die Flächen des Complexes sowohl durch die Curven n^{ter} Classe, sowie auch durch die Kegel n^{ter} Ordnung entstanden denken, wo die Ebenen der Curven in einer Geraden, dem geometrischen Ort der Spitzen der Umhüllungskegel sich schneiden. Alle Geraden des Complexes Ω_n, welche zugleich Tangenten an die Fläche sind, gehen durch die gemeinsame Axe der Ebenen und es ist daher diese letztere eine n fache Gerade des Complexes, und jede Ebene schneidet die Fläche in einer Curve n^{ter} Classe, welche auf der Axe einen n fachen Punkt — den Schnittpunkt der Ebene mit der Axe — besitzt. In derselben Weise entspricht jedem Umhüllungskegel der Fläche eine n fache Ebene, welche die n fache Gerade in sich aufnimmt.

Es ist die Schnittcurve einer Ebene, welche durch die n fache Linie (die Schnittlinien der Ebenen) geht, mit der Fläche des Complexes eine Curve von der n^{ten} Classe. Die Ordnung derselben würde daher $n(n-1) \equiv n^2 - n$ sein. Die n fache Gerade aber, welche nicht in der Bestimmung der Curve mittelst der Tangenten auftritt, erhebt die Ordnung von $n^2 - n$ zu n^2; dies ist also im Allgemeinen die Ordnung der Schnittcurven der Oberfläche. Da nun die Ordnung der Schnittcurven mit der der Flächen übereinstimmt, so ist also die Ordnung der Flächen eines Complexes vom n^{ten} Grade gleich n^2.

Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn man statt der Schnittcurven die Umhüllungskegel nimmt, und es ist also die Ordnung und die Classe der Flächen: n^2.

§. 3.

Complexe ersten Grades.

Wenden wir die im Vorhergehenden gewonnenen Resultate auf die Complexe vom ersten Grade an, so ergeben sich sofort folgende Gesetze:

1) Alle geraden Linien eines Complexes vom ersten Grade, die in einer Ebene liegen, gehen in derselben durch einen Punkt.

2) Alle geraden Linien, welche durch einen Punkt des Raumes gehen, liegen in einer Ebene.

3) Die Flächen des Complexes gehen in gerade Linien über; die Umhüllungskegel derselben sind Ebenen; die Erzeugungscurven sind Punkte.

Es sei nun die Gleichung eines Complexes:

$$26)\qquad Ar+Bs+C+D\sigma+E\varrho+F\eta=0,$$

wo r, s, 1, $(-\sigma)$, ϱ und η die Coordinaten einer Axe sind. Nehmen wir nun irgend einen Punkt x', y', z', ω' und suchen die Ebene, in welcher die durch den Punkt gehenden Geraden liegen. Wir setzen daher $\omega'=1$, alsdann ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen 9) die Beziehung:

$$27)\qquad sx'-ry'=s\varrho-r\sigma.$$

Als Gleichung der Ebene findet man sofort:

$$28)\qquad A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D(y'z-yz')+E(x'z-xz')$$
$$+F(x'y-xy')=0;$$

hierfür könnten wir auch schreiben nach Hinzufügung der entsprechenden Glieder:

$$29)\qquad (A-Fy'-Ez')(x-x')+(B+Fx'-Dz')(y-y')$$
$$+(C+Ex'+Dy')(z-z')=0.$$

Umgekehrt sei eine Ebene

$$30)\qquad a'x+b'y+c'z+d'=0$$

eines Complexes gegeben und man soll die Schnittpunkte aller Geraden, die in der Ebene liegen, bestimmen. Jede Gerade der Ebene muss alsdann den Gleichungen genügen (nach dem Früheren):

$$31)\qquad \begin{aligned} a'r+b's+c'&=0\\ a'\varrho+b'\sigma+d'&=0\\ a'\eta+c'\sigma-d's&=0\\ b'\eta-q\varrho+d'r&=0. \end{aligned}$$

Je zwei Gleichungen von diesen vier folgen unmittelbar aus den beiden andern. Eliminirt man mittelst dieser Gleichungen die Grössen r, ϱ und $(\eta\equiv r\sigma-s\varrho)$ aus der Gleichung des Complexes, so erhält man:

$$32)\qquad (Ba'-Ab'-Fd')s+(Da'-Eb'+Fc')\sigma$$
$$-Ac'+Ca'-Ed'=0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf die beiden Grössen s und σ vom ersten Grade und stellt demgemäss eine gerade Linie dar, welche parallel der X-Axe ist und die YZ-Ebene in einem Punkte schneidet, dessen Coordinaten sich sofort als

$$33)\qquad \begin{aligned} z'&=\frac{Ba'-Ab'-Fd'}{Da'-Eb'+Fc'}\\ y'&=\frac{Ca'-Ac'-Ed'}{Da'-Eb'+Fc'} \end{aligned}$$

ergeben. Alle gerade Linien der gegebenen Ebene 30) schneiden diese *Gerade 32)*, d. h. die z und y Coordinate des Schnittpunktes der Geraden

des Complexes, die in der Ebene liegen, sind durch 33) bestimmt. Eliminirt man mittelst der ersten, zweiten und vierten Gleichung von 31) die Grössen s, σ und η, so erhielten wir in entsprechender Weise eine, der Y-Axe parallele Gerade und hierdurch als x-Coordinate des Schnittpunktes der in der Ebene 30) liegenden Geraden des Complexes

$$34)\qquad x'=\frac{Cb'-Bc'-Dd'}{Da'-Eb'+Fc'}.$$

Der zu einer Ebene (a', b', c', d') zugehörige Punkt wird daher auch durch die Gleichung dargestellt:

$$35)\qquad A(bc'-b'c)+B(a'c-ac')+C(ab'-a'b)+D(a'd-ad')$$
$$+E(bd'-b'd)+F(c'd-cd')=0.$$

Nehmen wir nun zwei Ebenen (a, b, c, d) und (a', b', c', d'), so schneiden sich dieselben in einer Geraden, die wir mit $(a\,a')$ bezeichnen wollen. Die zu einem Complexe gehörigen in den beiden Ebenen gelegenen Geraden schneiden sich in den zugeordneten Punkten P und P'; die Verbindungslinie dieser letzteren sei (PP'). Eine beliebige Ebene durch (PP') gelegt, schneidet die Gerade (aa') in einem Punkte Q, alsdann sind QP und QP' Linien des Complexes und es ist daher, da sich QP und QP' im Punkte Q schneiden, wiederum Q der zu der Ebene QPP' zugeordnete Punkt, d. h. es schneidet jede durch zwei Punkte gehende Ebene die Schnittlinie der beiden den Punkten zugeordneten Ebenen in dem der ersten zugeordneten Punkte. Mit anderen Worten: Der geometrische Ort aller zugeordneten Punkte zu den Ebenen, welche durch zwei festliegende Punkte gehen, ist eine gerade Linie, nämlich die Schnittlinie der beiden den festen Punkten zugeordneten Ebenen. Diese beiden merkwürdigen Geraden [im obigen Beispiele (aa') und (PP')] sind conjugirte Linien. Dreht man daher eine Ebene um eine Gerade, so beschreibt ihr zugehöriger Punkt die zu der ersteren conjugirte Gerade. Jede Gerade, welche die beiden conjugirten Linien schneidet, ist eine Gerade des Complexes.

Obiger Satz lässt sich umkehren und lautet alsdann: Alle Ebenen, deren zugeordnete Punkte auf einer Geraden liegen, schneiden sich in der zu jener conjugirten Linie.

Die obigen Resultate lassen sich ohne weitere Schwierigkeit mit dem Principe der polaren Reciprocität verbinden und geben alsdann die bekannten Sätze zwischen Pol und Polarebene.

Bestimmen wir nun die zum Coordinatenanfangspunkt zugeordnete Ebene. Die Gleichung 28) giebt uns die zum Punkte x', y', z' zugeordnete Ebene. Setzen wir daher in dieser Gleichung:

$$36)\qquad x'=0,\quad y'=0,\quad z'=0,$$

so erhalten wir sofort als Ebene, welche alle im Coordinatenanfangspunkte sich schneidenden Geraden des Complexes enthält:

$$37)\qquad Ax+By+Cz=0.$$

Um die den im Unendlichen gelegenen Punkten der drei Axen zugeordneten Ebenen zu finden, dividire man die Gleichung 28) successive durch x', y', z' und setze alsdann:

$$\begin{aligned} x' &= \infty \\ y' &= \infty \\ z' &= \infty . \end{aligned} \tag{39}$$

Hierdurch erhält man für jene drei Ebenen die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} Ez + Fy - A &= 0 \\ Dz - Fx - B &= 0 \\ C + Dy + Ex &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Verbindet man Gleichung 37) mit je einer von 40), so erhält man die den drei Coordinatenaxen conjugirten Geraden. Die der X-Axe conjugirte wird also bestimmt durch den Schnitt der beiden Ebenen:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ Ez + Fy - A \;= 0. \end{cases} \tag{41}$$

Diese schneidet die XY-Ebene in dem Punkte

$$x = -\frac{B}{F}, \quad y = \frac{A}{F}, \tag{42}$$

die XZ-Ebene in dem Punkte

$$x = -\frac{C}{E}, \quad z = \frac{A}{E} \tag{43}$$

und die YZ-Ebene in

$$y = \frac{AC}{FC - EB}, \quad z = \frac{-AB}{FC - EB}. \tag{44}$$

Sucht man in derselben Weise die Schnitte der zu der Y-Axe conjugirten Geraden mit den drei Coordinatenebenen, so erhalten wir, wenn wir dieselbe Reihenfolge wie oben beibehalten:

$$x = -\frac{B}{F}, \quad y = \frac{A}{F}, \tag{45}$$

$$x = \frac{-BC}{AD + CF}, \quad z = \frac{AB}{CF + AD}, \tag{46}$$

$$y = -\frac{C}{D}, \quad z = \frac{B}{D}. \tag{47}$$

Bestimmen wir nun noch ebenso die drei Schnittpunkte der der Z-Axe conjugirten Geraden, so erhalten wir die Werthe:

$$x = \frac{BC}{AD - BE}, \quad y = \frac{-AC}{AD - BE}, \tag{48}$$

$$x = -\frac{C}{E}, \quad z = \frac{A}{E}, \tag{49}$$

$$y = -\frac{C}{D}, \quad z = \frac{B}{D}. \tag{50}$$

Bemerken wir nun, dass die Gleichungen 42) und 45), ebenso 43) und 49), und schliesslich 47) und 50) identisch sind, so ergiebt sich sofort, dass die drei den Coordinatenaxen conjugirten Geraden sich in den Coordinatenebenen und zwar in den zu diesen zugehörigen Punkten gegenseitig schneiden, oder mit anderen Worten: Die zu drei in einem Punkte sich schneidenden Geraden im Raume conjugirten Geraden bilden ein Dreieck, dessen Spitzen in den durch je zwei der ersten Geraden bestimmten Ebenen und zwar in den zu diesen zugehörigen Punkten liegen und umgekehrt.

Um den letzten Theil des Satzes nachzuweisen, dass nämlich die den Axen conjugirten Geraden die Ebenen in ihren zugehörigen Punkten schneiden, kehren wir zu der Gleichung 35) zurück. Um die den Coordinatenebenen zugeordneten Punkte zu bestimmen, dividiren wir successive durch c', b', a' und setzen alsdann

$$51)\qquad \begin{aligned} c' &= \infty \\ b' &= \infty \\ a' &= \infty . \end{aligned}$$

Alsdann erhalten wir als Gleichungen für die gesuchten Punkte:

$$52)\qquad \begin{aligned} Ab - Ba + Fd &= 0 \\ Ca - Ac - Ed &= 0 \\ Bc - Cb + Dd &= 0. \end{aligned}$$

Es ergeben sich hieraus als die Coordinaten der drei Punkte:

$$53)\qquad \begin{aligned} &x = -\frac{B}{F}, \quad y = \frac{A}{F}, \quad z = 0, \\ &x = -\frac{C}{E}, \quad y = 0, \quad z = \frac{A}{E}, \\ &x = 0, \quad y = -\frac{C}{D}, \quad z = \frac{B}{D}. \end{aligned}$$

Diese Werthe zeigen die Richtigkeit des obigen Satzes und gleichzeitig ergiebt sich daraus die merkwürdige Beziehung, dass das Product aus drei Coordinaten xyz dividirt durch das Product der drei anderen Coordinaten gleich ist der negativen Einheit.

Setzt man in der Gleichung 35)

$$d' = \infty ,$$

so ergiebt sich als Punkt, der zu einer im Unendlichen gelegenen Ebene zugehörig ist:

$$54)\qquad Eb - Da - Fc = 0,$$

d. h. der Punkt liegt selbst auch im Unendlichen, und zwar in einer Richtung, welche bestimmt ist durch

$$55)\qquad \frac{x}{D} = \frac{y}{E} = \frac{z}{F}.$$

Diese Richtung, welche durch das Verhältniss

$$D : E : F$$

bestimmt wird, nennen wir die charakteristische Richtung des Complexes; sie ist fest mit demselben verbunden.

Eine zu der obigen senkrechte Ebene wird bestimmt durch die Gleichung

56) $$Dx + Ey + Fz = 0.$$

Verschiebt man das Coordinatensystem parallel mit sich selbst, so bleibt das Verhältniss, welches die charakteristische Richtung bestimmt, dasselbe; es ändert sich dagegen, sobald eine Drehung des Systems stattfindet. Eine der drei Constanten D, E, F wird gleich Null, sobald die durch dieselben bestimmte charakteristische Richtung in eine der Coordinatenebenen YZ, XZ oder XY fällt. Zwei derselben (z. B. D und E) verschwinden, wenn die Richtung in eine Axe (z. B. hier die Z-Axe) fällt.

Umgekehrt wie es bei dem Verhältnisse der drei Constanten $D:E:F$ eines Complexes ist, ist es bei den drei übrigen:

$$A:B:C.$$

Dieses Verhältniss bleibt dasselbe, wenn das Coordinatensystem gedreht wird, ändert sich jedoch, sobald das System parallel mit sich selbst verschoben wird. Liegt nun eine der drei Coordinatenaxen in der zum Coordinatenanfangspunkte zugehörigen Ebene, so verschwindet die entsprechende Constante; zwei derselben werden gleich Null, sobald zwei Coordinatenaxen Gerade des Complexes sind, d. h. wenn die beiden in der zum Anfangspunkte gehörigen Ebene liegen.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun weiter, dass alle die Ebenen, welche zu den Punkten, die auf einer in der charakteristischen Richtung eines Complexes laufenden Geraden liegen, zugehören, parallel sind, und umgekehrt liegen die zu parallelen Ebenen zugehörigen Punkte auf einer Geraden, deren Richtung diejenige der charakteristischen des Complexes ist. Weiter schliessen wir daraus, dass es eine Gerade — die Axe des Complexes — giebt, auf welcher die zu ihren Punkten zugehörigen Ebenen senkrecht stehen.

Dreht man einen Complex um seine Axe oder verschiebt man denselben in der Richtung derselben, so bleibt er ungeändert. Es werden namentlich also auch gerade Linien, welche parallel in gleicher Entfernung mit der Axe des Complexes sind, von den ihren Punkten zugehörigen Ebenen unter demselben Winkel geschnitten.

Um nun diesen Winkel zu bestimmen, denken wir uns das Coordinatensystem so gewählt, dass eine Coordinatenaxe, z. B. die Z-Axe mit der Axe des Complexes zusammenfällt; die XY-Ebene ist alsdann die zum Coordinatenanfangspunkt zugehörige Ebene; die Gleichung des Complexes ist alsdann nach dem Früheren:

57) $$s\varrho - r\sigma = k.$$

Die zu einem Punkte (x', y', z') zugehörige Ebene wird daher dargestellt durch:

$$y'x - yx' = k(z - z'). \tag{58}$$

Denken wir uns den Punkt in der yz-Ebene, so ist $z' = 0$, also die Gleichung der zugehörigen Ebene

$$y'x - yx' = kz. \tag{59}$$

Ist der Winkel, den diese Ebene mit der Z-Axe bildet, λ, so erhält man als Bestimmungsgleichung für denselben:

$$\cos\lambda = \frac{k}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + k^2}} \tag{60}$$

oder

$$x'^2 + y'^2 = k^2 \operatorname{tang}^2\lambda. \tag{61}$$

Der Winkel λ ist aber derselbe, den auch die zu dem Punkte (x', y', z') zugehörige Ebene mit der durch denselben Punkt gehenden mit der Z-Axe parallelen Geraden bildet.

Es seien nun ferner zwei Punkte $(x'y'z')$ und $(x''y''z'')$ gegeben; die durch dieselbe bestimmte Gerade hat alsdann nach dem Obigen in dem Complexe

$$s\varrho - r\sigma = k$$

als conjugirte Gerade die durch die folgenden beiden Gleichungen bestimmte:

$$\left\{\begin{array}{l} xy' - x'y = k(z - z') \\ xy'' - x''y = k(z - z''). \end{array}\right. \tag{62}$$

Setzt man aus der ersten Gleichung die Werthe von y oder x in die zweite, so erhält man für obige Gleichungen die neuen:

$$\begin{array}{l} x(x'y'' - x''y') = k\{(x' - x'')z - (x''z' - x'z'')\} \\ y(x'y'' - x''y') = k\{(y' - y'')z - (y''z' - y'z'')\}. \end{array} \tag{63}$$

Sind nun die Coordinaten der ersten Geraden r, s, ϱ und σ, so hat man bekanntlich

$$\begin{array}{c} r = \dfrac{x'' - x'}{z'' - z'}, \quad s = \dfrac{y'' - y'}{z'' - z'}, \\ \varrho = \dfrac{x''z' - x'z''}{z'' - z'}, \quad \sigma = -\dfrac{y''z' - y'z''}{z'' - z'}, \\ s\varrho - r\sigma = \dfrac{x''y' - x'y''}{z'' - z'}. \end{array} \tag{64}$$

Da nun für die der genannten Geraden conjugirte Linie nach 62) sein muss:

$$x''y' - x'y'' = k(z'' - z'), \tag{65}$$

so hat man für die Coordinaten r', s', ϱ', σ' der conjugirten die Gleichungen:

$$\begin{array}{c} r' = k.\dfrac{x'' - x'}{x''y' - x'y''}, \quad s' = k.\dfrac{y'' - y'}{x''y' - x'y''}, \\ \varrho' = k.\dfrac{x''z' - x'z''}{x''y' - x'y''}, \quad \sigma' = -k.\dfrac{y''z' - y'z''}{x''y' - x'y''}. \\ s'\varrho' - r'\sigma' = k. \end{array} \tag{66}$$

Aus der Vergleichung der entsprechenden Formeln ergiebt sich sofort folgende merkwürdige Beziehung zwischen den Coordinaten zweier conjugirter Geraden eines Complexes von der oben gegebenen Form:

$$67)\qquad \frac{r}{r'} = \frac{s}{s'} = \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{s\varrho - r\sigma}{k}.$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir, dass sich zwei conjugirte Gerade eines Complexes nicht schneiden können; die Gleichung zur Bestimmung ihres Neigungswinkels lässt sich sofort aus den Grössen r, r', s, s' ableiten. Aus obigen Gleichungen ersehen wir ferner, dass zwei conjugirte Gerade nie parallel sein können; haben sie einen Punkt gemeinsam, so fallen sie ganz ineinander oder sind identisch, d. h. die Gerade gehört dem Complex selbst an. Es kann daher jede Linie des Complexes umgekehrt wiederum als zwei ineinander fallende conjugirte Gerade aufgefasst werden.

(Fortsetzung folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

XXXI. Ueber die vier- und fünfpunktige Berührung einer Geraden mit einer algebraischen Fläche. Von Dr. GORDAN, Prof. a. d. Universität Giessen. Die Frage nach derjenigen auf einer Oberfläche zu ziehenden Curve, in deren Punkten eine Gerade die Fläche vierpunktig berühren kann, ist von Herrn Salmon und Herrn Clebsch so weit geführt worden, dass man die Gleichung einer Fläche $(11\,n-24)^{\text{ter}}$ Ordnung angiebt, welche die gegebene Fläche n^{ter} Ordnung in jener Curve schneidet.

Die Ableitung der letzten, welche in dem Lehrbuche von Salmon reproducirt wird, ist indessen noch mit nicht unbedeutenden Rechnungen verknüpft. Es soll im Folgenden nun die Frage mit Hülfe einiger geometrischen Betrachtungen in anderer Weise gelöst werden, welche, wie ich glaube, wesentlich einfacher ist, und zugleich einen Blick in die geometrische Natur der algebraischen Processe zu sehen erlaubt, welche die Behandlung dieser wichtigen Frage erfordert. Ich wende sodann dieselbe Methode auf die Ausrechnung derjenigen Punkte an, in welcher eine fünfpunktige Berührung möglich ist.

§. 1.

Die Gleichung einer Fläche 2ter Ordnung sei in symbolischer Form

$$a_x^2=0 \qquad (a_x=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4),$$

wobei der Buchstabe a auch beliebig durch b, c, d ersetzt werden kann. Die Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten (u_1, u_2, u_3, u_4) wird dann bekanntlich erhalten, wenn man in dem Quadrate der Determinante $\Sigma - a_1 b_2 c_3 u_4$ die Producte gleichartiger Buchstaben durch die Coefficienten der Fläche ersetzt. Bezeichnet man der Kürze wegen diese Determinante (wie auch bei anderen ähnlichen geschehen soll) durch $(abcu)$, so ist die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten symbolisch ausgedrückt durch:

$$(a\,b\,c\,u)^2=0.$$

Führt man auch noch für die u symbolische Coefficienten d ein, so geht der durch das Quadrat der symbolischen Determinante dargestellte Ausdruck in die Hesse'sche Determinante der Fläche über, welche durch $\varDelta$ bezeichnet werden soll, so dass

$$\varDelta=(abcd)^2.$$

Gehen wir von der Gleichung der Oberfläche in Ebenencoordinaten aus und bezeichnen sie symbolisch durch

?

so vertreten die α die aus drei Reihen abc gebildeten Unterdeterminanten, und die Determinante Δ nimmt auch die Form an:

$$\Delta = d_\alpha^2 = a_\alpha^2 \text{ etc.}$$

§. 2.

Im Folgenden wird öfters von einer Hülfsformel Gebrauch gemacht, welche in folgender Weise abgeleitet werden kann.

Multiplicirt man $\Delta = (abcd)^2$ mit u_x und ersetzt dann $(abcd)u_x$ durch einen Werth aus der bekannten Identität:

$$u_x (abcd) = a_x (ubcd) + b_x (aucd) + c_x (abud) + d_x (abcu),$$

so erhält man vier Grössen, welche denselben Werth haben, weil die a, b, c, d symbolisch für dieselben reellen Grössen gesetzt sind. Behält man aber nur einen dieser Ausdrücke mit 4 multiplicirt bei, so hat man:

$$\Delta u_x = 4 a_x (abcd)(ubcd) = 4 u_\alpha a_\alpha a_x.$$

Setzt man hierin für u_c den Ausdruck $b_c b_x$, welcher den Differentialquotienten von f nach x_i, dividirt durch 2, bedeutet, so geht die Gleichung über in:

$$\Delta b_x^2 = 4 a_\alpha b_\alpha a_x b_x$$

und wenn man endlich die Quadrate und Producte der x durch Coefficienten der Fläche in Ebenencoordinaten, oder die x selbst durch die Symbole β ersetzt:

$$\Delta b_s^2 = 4 a_\alpha b_\alpha a_s b_s,$$

was auch mit Rücksicht auf den symbolischen Ausdruck von Δ in der Form geschrieben werden kann:

$$\text{I)} \qquad 4 a_\alpha b_\alpha a_s b_s - a_\alpha^2 b_s^2 = 0.$$

§. 3.

Auf der Fläche 2ter Ordnung nehme ich jetzt vier Punkte an, welche ein windschiefes Viereck bilden. Von diesen ist einer, x, ein ganz beliebiger Punkt der Fläche; zwei andere, y, z, liegen irgendwie auf der durch x gelegten Erzeugenden; der vierte endlich, ξ, ist vollständig bestimmt als der Durchschnitt der beiden anderen durch y und z gehenden Erzeugenden. Auf der Fläche liegen die Geraden

$$xy, \quad xz, \quad \xi y, \quad \xi z.$$

Die absoluten Werthe der Tetraedercoordinaten z, ξ kann man dann offenbar so bestimmen, dass die Gleichung der Fläche in Ebenencoordinaten

$$u_x u_y + u_y u_z = 0$$

übergeht, dass aber die für die u identische Gleichung stattfindet:

$$\text{II)} \qquad u_\alpha^2 = (abcu)^2 = u_x u_\xi + u_y u_z.$$

Man kann aus dieser Formel eine etwas allgemeinere ableiten, indem man nach den u differenziirt, und die Differentialquotienten mit neuen Grössen v multiplicirt, so dass man hat:

$$\text{II}a)\qquad 2u_\alpha v_\alpha = 2(abcv) = u_x v_\xi + v_x u_\xi + u_y v_z + v_y u_z.$$

Zwischen den Coordinaten der vier Punkte x, y, z, ξ giebt es eine Reihe von Relationen, welche durch die Lage dieser Punkte auf der Fläche bedingt wird. Erstens liegen alle Punkte in der Fläche und man hat also:

$$\text{III})\qquad a_x^2 = 0,\quad a_y^2 = 0,\quad a_z^2 = 0,\quad a_\xi^2 = 0.$$

Aber die Tangentenebene jeder der vier Punkte geht auch durch die beiden benachbarten Ecken des windschiefen Vierecks. Daher hat man noch die Gleichungen:

$$\text{III}a)\qquad a_x a_y^0 = 0,\quad a_x a_z = 0,\quad a_\xi a_y = 0,\quad a_\xi a_z = 0.$$

Unter den Producten der vier symbolischen Ausdrücke a_x, a_ξ, a_y, a_z sind also nur die beiden $a_x \,.\, a_\xi$ und $a_y \,.\, a_z$ von Null verschieden. Diese nehmen sehr einfache Werthe an, wie man auf folgende Weise findet. Ersetzt man in den Gleichungen II) und IIa) die u durch a, die v durch b, so hat man:

$$\text{IV})\qquad \begin{aligned} a_\alpha^2 = b_s^2 &= a_x a_\xi + a_y a_z = \Delta \\ 2a_\alpha b_\alpha = 2a_s b_s &= a_x b_\xi + b_x a_\xi + a_y b_z + b_y a_z. \end{aligned}$$

Führt man diese Ausdrücke in die Identität I) ein, so geht dieselbe über in:

$$(a_x b_\xi + a_y b_z + b_x a_\xi + b_y a_z)^2 - (a_x a_z + a_y a_z)(b_x b_\xi + b_y b_z) = 0.$$

Wenn man aber alle wegen der Formeln III), IIIa) verschwindende Producte auslässt, so bleibt von dem Quadrat nur $2a_x b_x a_\xi b_\xi + 2a_y b_y a_z b_z$ übrig und für die obige Gleichung kann man also setzen:

$$(a_x a_\xi - a_y a_z)(b_x b_\xi - b_y b_z) = 0,$$

oder da beide Factoren den gleichen Werth haben:

$$a_x a_\xi = a_y a_z.$$

Die beiden gesuchten Ausdrücke sind also gleich und wegen der Gleichung

$$a_x a_\xi + a_y a_z = \Delta$$

hat jeder den Werth $\frac{\Delta}{2}$, so dass man den Gleichungen III) und IIIa) die beiden hinzufügen kann:

$$\text{IV}a)\qquad a_x a_\xi = a_y a_z = \frac{\Delta}{2}.$$

§. 4.

Die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung sei symbolisch $a_x^n = 0$. Soll die Verbindungslinie des Punktes x der Fläche mit einem Punkte y im Punkte x die Fläche vierpunktig berühren, so müssen die vier Gleichungen erfüllt sein:

$$a_x^n = 0,\quad a_x^{n-1} a_y = 0,\quad a_x^{n-2} a_y^2 = 0,\quad a_x^{n-3} a_y^3 = 0.$$

Man erhält die Gleichung der Fläche, welche in der Ortscurve der Punkte x die gegebene Fläche schneidet, indem man aus diesen Gleichungen die y eliminirt, was immer möglich sein muss. Uebrigens genügt es, den Fall $n=3$ zu betrachten, wie im Folgenden geschehen soll, und dann im Resultate die Coefficienten der Fläche 3[ter] Ordnung durch dritte Differentialquotienten der gegebenen Fläche zu ersetzen.

§. 5.

Betrachten wir also die Gleichungen, welche für die 27 Geraden der Fläche 3[ter] Ordnung gelten:

1) $$a_x^3=0,\quad a_x^2 a_y=0,\quad a_x a_y^2=0,\quad a_y^3=0,$$

so sagt die erste und die letzte nur aus, dass x und y auf der Fläche liegen. Die zweite bezeichnet y als der Tangentenebene von x angehörig; die dritte sagt aus, dass y auf der Polare von x liegt, deren Gleichung, wenn x die laufenden Coordinaten sind, durch

$$a_x\, a_\chi^2=0$$

dargestellt wird. Auf dieser Fläche liegt offenbar die ganze Gerade xy, welche eine der 27 Geraden der Fläche 3[ter] Ordnung ist. Auf der Oberfläche $a_x a_\chi^2=0$ giebt es zwei Schaaren von Geraden; ich nenne diejenige die erste, in der die Gerade xy auftritt, die andere Schaar die zweite. Durch die Punkte xy gehen dann noch 2 Gerade der zweiten Schaar, und diese mögen von irgend einer Geraden der ersten Schaar beziehungsweise in den Punkten z und ξ geschnitten werden, so dass auf dieser Polare das windschiefe Viereck wieder entsteht und die Gerade der Fläche 3[ter] Ordnung eine Seite desselben bildet.

Die Formeln des §. 4 geben sofort Formeln, welche sich auf diese Polare beziehen, wenn man nur immer das Product zweier symbolischer Buchstaben $a_i\, a_x$ durch einen Factor a_x ergänzt.

Es ist also:

$$\begin{array}{cccc} a_x^3=0 & a_x a_y^2=0 & a_x a_z^2=0 & a_x a_\xi^2=0 \\ a_x^2 a_y=0 & a_x^2 a_y=0 & a_x a_y a_\xi=0 & a_x a_z a_\xi=0 \end{array}$$

$$a_x^2\, a_\xi=\frac{\varDelta}{2}\quad a_x a_y a_z=\frac{\varDelta}{2}$$

und $\varDelta$ hat daher die Bedeutung

$$\varDelta=a_x b_x c_x\,(abcu)^2.$$

Die in §. 3 benutzten Identitäten werden hier:

$$u_x u_z+u_y u_z=a_x b_x c_x\,(abcu)^2$$
$$u_x v_\xi+v_x u_\xi+u_y v_z+v_y u_z=2a_x b_x c_x\,(abcu)\,(abcv).$$

Die beiden Ausdrücke $(abcu)\,(abcv)$ und $(abcu)^2$ wollen wir, der Bezeichnung des Herrn Clebsch folgend, auch durch $\binom{u}{v}$ und $\binom{u}{u}$ bezeichnen. Sie entstehen durch Ränderung der Determinante und es ist, wenn

man durch f_{ix} den zweiten Differentialquotienten von f dividirt durch 2 bezeichnet:

$$(abcu)(abcv) = -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & v_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & v_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & v_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

§. 6.

Indem man diese Relationen benutzt, wird es nun möglich, ohne Hinzuziehung von Hülfsgrössen aus obigen Gleichungen die y zu eliminiren, und also die Gleichung derjenigen Oberfläche 9ter Ordnung zu bilden, welche die Fläche 3ter Ordnung in ihren 27 Geraden schneidet.

Da nämlich die Ausdrücke 1) für einen Punkt x einer solchen Geraden, wenn y ein beliebiger anderer Punkt auf ihr ist, sämmtlich verschwinden, so verschwindet auch die Combination

$$0 = (a_x b_\xi + a_y b_z)^3 + (b_x a_\xi + b_y a_z)^3,$$

deren beide Theile übrigens identisch sind, und durch Vertauschung der a und der b in einander übergehen.

Für diese Gleichung kann man auch die folgende setzen:

$$0 = \{a_x b_\xi + b_x a_\xi + a_y b_z + b_y a_z\}^3 -$$
$$- 3(a_x b_\xi + a_y b_z + b_x a_\xi + b_y a_z)(a_x b_\xi + a_y b_z)(b_x a_\xi + b_y a_z).$$

Aber nach den Formeln des §. 5 ist erstlich:

$$a_x b_\xi + b_x a_\xi + a_y b_z + b_y a_z = 2\binom{a}{b},$$

sodann hat man

$$-(a_x b_\xi + a_y b_y)(b_x a_\xi + b_y a_z) + (a_x a_\xi + a_y a_z)(b_x b_\xi + b_y b_z) =$$
$$= (a_x b_y - b_x b_y)(a_\xi b_z - b_\xi a_y),$$

was, wie unten gezeigt werden soll, durch Multiplication mit

$$„a_x b_\xi + b_x a_\xi + a_y b_z + b_y a_z“$$

verschwindet; in dem Factor dieses Ausdruckes kann man daher für

$$(a_x b_\xi + a_y b_z)(b_x a_\xi + b_y a_z)$$

den Ausdruck setzen:

$$(a_x a_\xi + a_y a_z)(b_x b_\xi + b_y b_z) = \binom{a}{a}\binom{b}{b}.$$

Mithin verwandelt sich auch die oben gegebene Gleichung in:

$$8\binom{a}{b}^3 - 6\binom{a}{b}\binom{a}{a}\binom{b}{b} = 0,$$

was die bekannte Gleichung der Fläche ist, welche die Fläche $a_x^3 = 0$ in ihren 27 Geraden schneidet.

§. 7.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass der Ausdruck

$$K = (a_x b_y - b_x a_y)(a_\xi b_z - b_\xi a_z)(a_x b_\xi + b_x a_\xi + a_y b_z + b_y a_z)$$

verschwindet. Dieser Ausdruck besteht aus zwei vollkommen identischen Theilen, welche man erhält, indem man vor dem ersten Factor einmal nur das Glied $a_x b_y$, das andere Mal nur das Glied $b_x a_y$ nimmt; beide Theile unterscheiden sich nur durch Vertauschung von a und b; hier kann man also auch setzen:

$$K = 2 a_x b_y (a_\xi b_z - b_\xi a_z)(a_x b_\xi + b_x a_\xi + a_y b_z + b_y a_z).$$

Aber wenn man die Multiplication ausführt, so bleibt nach den Formeln des §. 5, indem man nur zunächst für die Producte der a ihre Werthe setzt:

$$\begin{aligned} K &= 2 a_x 2 a_\xi b_y b_z b_\xi - 2 a_x a_y a_z b_y b_z b_\xi \\ &= \varDelta (b_y b_z b_\xi - b_y b_z b_\xi) = 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

§. 8.

Ich wende mich jetzt zur Untersuchung derjenigen Punkte, in denen eine Gerade die Fläche fünfpunktig berühren kann. Ist wiederum x ein solcher Punkt, y ein beliebiger Punkt der berührenden Geraden, so müssen die fünf Gleichungen bestehen:

$$a_x^n = 0, \quad a_x^{n-1} a_y = 0, \quad a_x^{n-2} a_y^2 = 0, \quad a_x^{n-3} a_y^3 = 0, \quad a_x^{n-4} a_y^4 = 0.$$

Die Elimination der y muss hier auf zwei Gleichungen führen, Gleichungen von Oberflächen, welche sich mit der gegebenen in einer Anzahl von Punkten schneiden, unter denen die Punkte der fünfpunktigen Berührung enthalten sind. Eine solche Gleichung ist die in §. 6 entwickelte Ortsgleichung für die Punkte der vierpunktigen Berührung; es kommt aber nur noch darauf an, eine weitere Gleichung herzustellen. Uebrigens genügt es hier wieder, eine Oberfläche vierter Ordnung als gegeben anzunehmen; denn aus den für eine solche gewonnenen Resultaten leitet man dann das Allgemeine ab, indem man an Stelle der Coefficienten der Fläche 4ter Ordnung die vierten Differentialquotienten der Gleichung einer Fläche $n$ter Ordnung setzt.

Ich gehe also von den Gleichungen aus:

$$\text{2)} \qquad a_x^4 = 0, \quad a_x^3 a_y = 0, \quad a_x^2 a_y^2 = 0, \quad a_x a_y^3 = 0, \quad a_y^4 = 0.$$

Bei einer solchen Fläche vierten Grades liegt dann die Gerade xy offenbar ganz in der Fläche, die Polare des Punktes x ist eine Fläche dritter Ordnung $a_x a_X^3 = 0$, welche unter ihren 27 Geraden die Gerade xy enthält; die zweite Polare von x ist eine Fläche zweiter Ordnung $a_x^2 a_X^2 = 0$, welche die Gerade xy zu einer Erzeugenden hat. Ist wieder xy die zweite durch x gehende Erzeugende dieser Fläche, und $x\xi$ eine Erzeugende, welche durch einen beliebig auf xz gewählten Punkt z geht, so hat man wieder das windschiefe Viereck $xy\xi z$, und es bestehen die Gleichungen:

$$\text{3)} \qquad \begin{gathered} a_x^4 = 0 \quad a_x^2 a_y^2 = 0 \quad a_x^2 a_y^2 = 0 \quad a_x^2 a_\xi^2 = 0 \\ a_x^3 a_y = a_x^3 a_z = 0 \quad a_x^2 a_\xi a_y = a_x^2 a_\xi a_z = 0 \\ a_x^3 a_\xi = a_x^2 a_y a_z = \frac{\varDelta}{2}, \end{gathered}$$

wo nun $\varDelta$ den symbolischen Ausdruck hat: $\varDelta = a_x^2 b_u^2 c_x^2 d_x^2 (abcd)^2$.

Die Identitäten II) und IIa) aber verwandeln sich in:

$$4)\qquad \begin{aligned} u_x v_\xi + v_x u_\xi + u_y v_z + v_y u_z &= 2\binom{u}{v} \\ u_x u_\xi + u_y u_z &= \binom{u}{u}. \end{aligned}$$

§. 9.

Ich bilde jetzt aus 2 die Combination

$$a_y^4 b_z^4 + b_y^4 a_z^4 = 0,$$

in welcher die b dieselbe symbolische Bedeutung haben, wie die a, und wo also beide Theile sich nur durch Vertauschung dieser Bezeichnung unterscheiden.

Dieser Gleichung kann man die Form geben:

$$0 = (a_y b_x + b_y a_x)^4 - 4 b_y a_x b_y b_x (a_y b_x + b_y a_x)^2 + 2 a_y^2 b_x^2 b_y^2 a_x^2$$

oder wenn man die Gleichungen 4) benutzt:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left[2\binom{a}{b} - a_x b_\xi - b_x a_\xi\right]^4 - 4\left[2\binom{a}{b} - a_x b_\xi - b_x a_\xi\right]^2 \left[\binom{a}{a} - a_x a_\xi\right] \\ & \left[\binom{b}{b} - b_x b_\xi\right] + 2\left[\binom{a}{a} - a_x a_\xi\right]^2 \left[\binom{b}{b} - b_x b_\xi\right]^2. \end{aligned}$$

Dieser Gleichung gebe ich die Form:

$$0 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5,$$

wo verschiedene A die folgende Bedeutung haben sollen:

$$\begin{aligned} A_1 = {} & 16\binom{a}{b}^4 - 16\binom{a}{b}^2\binom{a}{a}\binom{b}{b} + 2\binom{a}{a}^2\binom{b}{b}^2 \\ A_2 = {} & -32\binom{a}{b}^3 (a_x b_\xi + b_x a_\xi) + 16\Big[2\binom{a}{b}^2\binom{b}{b} a_x a_\xi + \binom{a}{a}\binom{b}{b}\binom{a}{b}(a_x b_\xi + b_x a_\xi)\Big] \\ & - 4\Big[\binom{a}{a}^2\binom{b}{b} b_x b_\xi + \binom{b}{b}^2\binom{a}{a} a_x a_\xi\Big] \\ A_3 = {} & 24\binom{a}{b}^2 (a_x b_\xi + b_x b_\xi)^2 - 16\Big[\binom{a}{b}^2 a_x a_\xi b_x b_\xi + 2\binom{a}{b}\binom{b}{b} a_x b_\xi (a_x b_\xi + b_x a_\xi) \\ & + \tfrac{1}{4}\binom{a}{a}\binom{b}{b}(a_x b_\xi + b_x a_\xi)^2 \Big[+ 8 a_x a_\xi b_x b_\xi \binom{a}{a}\binom{b}{b} \\ A_4 = {} & -8\binom{a}{b} a_x b_\xi + b_x a_\xi)^3 + 8\Big[2\binom{a}{b} a_x b_x a_\xi b_\xi (a_x b_\xi + b_x a_\xi) \\ & + \binom{b}{b} a_x a_\xi (a_x b_\xi + b_x a_\xi)^2\Big] \\ A_5 = {} & (a_x b_\xi + b_x a_\xi)^4 - 4 a_x b_\xi b_x a_\xi (a_x b_\xi + b_x a_\xi)^2. \end{aligned}$$

Von diesen Grössen verschwindet A_5 identisch, indem nach 4) alle sich nicht aufhebenden Glieder gleich Null werden.

§. 10.

In den Ausdrücken von A_2, A_3, A_4 sind schon einige Formeln zusammengezogen, welche sich nur durch Vertauschung der a mit den b von einander unterscheiden.

§. 11.

Wendet man eben dies überall an, wo es möglich ist, so nimmt A_4 den Ausdruck an:

$$A_4 = -16\binom{a}{b}(a_x^3 b_\xi^3 + a_x^2 a_\xi b_x b_\xi^2) + 8\binom{b}{b} a_x^2 b_\xi^2 + b_x^2 a_\xi^2 + 2 a_x b_x a_\xi b_\xi) a_x a_\xi.$$

In der letzten Klammer kann man $a_x a_z$ durch $\frac{\Delta}{2}$ und $a_x^2 a_\xi^2$ durch Null ersetzen; wenn man nur noch in den übrigen Formeln $\binom{a}{b}$ und $\binom{b}{b}$ mit Hülfe der Gleichungen 4) ausdrückt, so hat man:

$$A_4 = -8(a_x b_\xi + b_x a_\xi + a_y b_z + b_y a_z)(a_x^3 b_\xi^3 + a_x^2 a_\xi b_x b_\xi^2) +$$
$$+ 8(b_x b_\xi + b_y b_\xi) b_x^2 a_\xi^3 a_x + 4\Delta b_\xi^2 \binom{b}{b},$$

oder wenn man die Gleichungen 3) anwendet:

$$A_4 = -16 a_x^3 a_\xi b_x b_\xi^3 + 16 b_x^3 b_\xi a_x a_\xi^3 + 4\Delta b_\xi^2 \binom{b}{b} = 4\Delta b_\xi^2 \binom{b}{b}.$$

Der Ausdruck A_3 kann in der Form geschrieben werden:

$$A_3 = 16\binom{a}{b}^2 (3 a_x^2 b_\xi^2 + 2 a^x a_\xi b_x b_\xi) - 32\binom{a}{b}\binom{b}{b}(a_x^2 a_\xi b_\xi + a_\xi^2 a_x b_x) -$$
$$-8\binom{a}{a}\binom{b}{b} a_x^2 b_\xi^2,$$

nur ist nach 4) und 3)

$$4 a_x^2 \binom{a}{b}^2 = a_x (a_x b_\xi + b_x a_\xi + a_y b_z + b_y a_z)^2 = 2 a_x^3 a_\xi (b_x b_\xi + b_y b_z) = \Delta \binom{b}{b}$$

$$4a)\quad 2 a_x^2 a_\xi \binom{a}{b} = a_x^2 a_\xi (a_x b_\xi + b_x a_\xi + a_y b_z + b_y a_z) = \frac{\Delta}{2} b_\xi$$

$$a_x^2 \binom{a}{a} = a_x^2 (a_x a_\xi + a_y a_z) = \Delta.$$

Daher verwandelt sich der Ausdruck noch in:

$$A_3 = -4\Delta b_\xi^2 \binom{b}{b} + 32 a_x b_x a_\xi b_\xi \binom{a}{b}^2 - 32 a_x b_x a_\xi^2 \binom{a}{b}\binom{b}{b}$$

und man hat also:

$$5)\qquad A_3 + A_4 = 32 a_x b_x a_\xi b_\xi \binom{a}{b}^2 - 32 a_x b_x a_\xi^2 \binom{a}{b}\binom{b}{b}.$$

Endlich zieht sich noch A_2 zusammen in:

$$6)\qquad A_2 = -64\binom{a}{b}^3 a_x b_\xi + 32\binom{a}{b}^2\binom{b}{b} a_x a_\xi + 32 a_x b_\xi \binom{a}{b}\binom{a}{a}\binom{b}{b}$$
$$-8 a_x a_\xi \binom{a}{a}\binom{b}{b}^2.$$

§. 12.

Die ganze Gleichung der gesuchten Flächen ordnet sich jetzt also folgendermassen:

$$7)\qquad 0 = A_1 + A_2 + (A_3 + A_4),$$

wo A_1 den Hülfspunkt ξ gar nicht enthält, A_2 linear, $A_3 + A_4$ quadratisch

[vergl. 5) und 6)]. Dagegen sind die Punkte y, z in der Endform nicht mehr vorhanden. Daher genügt auch jetzt der Punkt ξ nur noch den beiden Gleichungen

$$a_x^2 a_\xi^2 = 0 \qquad a_x^3 a_\xi = \frac{\Delta}{2}.$$

Die erste bezeichnet ihn als beliebigen Punkt einer Fläche zweiter Ordnung, die zweite bestimmt nur die **absoluten** Werthe der Coordinaten, wenn ξ auf dieser Fläche irgendwie gewählt ist.

Wegen dieser Willkürlichkeit der Punkte ξ, welche aus derGleichung 7) nicht mehr herausgeschafft werden kann, sieht man, dass man nicht zu einer einzigen Fläche gelangt, welche die Curve der vierpunktigen Berührung in den gesuchten Punkten schneidet, sondern zu einer Schaar von Flächen, deren einzelne Glieder den verschiedenen Annahmen über ξ entsprechen.

§. 13.

Es ist schliesslich nicht schwer, die Gleichung der Flächenschaar 7 in diejenige Gestalt zu bringen, unter welcher Herr Clebsch sie im 58. Band des Crelle'schen Journals ohne Ausführung der Rechnung gegeben hat.

Zu diesem Zweck nehme ich eine Hülfsebene mit den Coordinaten $c_1 c_2 c_3 c_4$ an, welche durch die Punkte y, z geht, übrigens aber beliebig ist.

Es ist dann $c_y = 0$, $c_z = 0$; da aber y, z selbst beliebige Punkte der beiden durch x gehenden Erzeugenden der Fläche 2ter Ordnung $a_x^2 a_\chi^2 = 0$ waren, so ist hierdurch über die Ebene im Grunde nichts ausgesagt, sondern durch eine beliebig gewählte Ebene c sind dann nur die Punkte y, z, also auch ξ vollkommen bestimmt. Wegen der Gleichungen $c_y = 0$, $c_z = 0$ hat man nun auch

$$\binom{c}{c} = c_x c_\xi; \qquad 2\binom{a}{c} = a_x c_\xi + c_x a_\xi.$$

Es folgt daraus:

$$a_\xi c_x^2 = 2 c_x \binom{a}{c} - a_x \binom{c}{c}, \qquad b_\xi c_x^2 = 2 c_x \binom{b}{c} - b_x \binom{c}{c}.$$

Multiplicirt man also die Gleichung 7) mit c_x^2:

$$0 = c_x^2 A_1 + c_x^2 A_2 + c_x^2 (A_3 + A_4), \tag{10}$$

so ist zunächst nach 6)

$$c_x^2 A_2 = 2 c_x \Big[-64 \binom{a}{b}^3 a_x \binom{b}{c} + 32 \binom{a}{b}^2 \binom{b}{b} \binom{a}{c} a_x + 32 \binom{a}{b} \binom{a}{a} \binom{b}{b} \binom{b}{c} a_x - 8 \binom{b}{b}^2 \binom{a}{a} \binom{a}{c} a_x \Big] - M \binom{c}{c}, \tag{11}$$

wo M der Ausdruck ist, in welchen A_2 übergeht, wenn darin ξ durch x ersetzt wird. Es ist aber der so entstehende Ausdruck

$$M = -64 a_x b_x \binom{a}{b}^3 + 32 \binom{a}{b}^2 \binom{b}{b} a_x^2 + 32 \binom{a}{b} \binom{a}{a} \binom{b}{b} a_x b_x - 8 \binom{a}{a} \binom{b}{b}^2 a_x^2,$$

oder mit Benutzung der Gleichungen 4a), indem das 2te und 4te Glied sich aufheben.

$$12)\qquad M = -64\binom{a}{b}^3 a_x b_x + 32 a_x b_x \binom{a}{b}\binom{a}{a}\binom{b}{b}.$$

Endlich wird mit Benutzung der Gleichungen 8)

$$c_x^2(A_3+A_4) = 32 c_x^2\left[a_x a_\xi b_x b_\xi \binom{a}{b}^2 - a_x b_x a_\xi^2 \binom{a}{a}\binom{b}{b}\right]$$

$$= 32\, c_x \Big\{ a_x b_x \binom{a}{b}^2 b_\xi \Big[2\binom{a}{c} - a_x c_\xi\Big]$$

$$- a_x b_x a_\xi \binom{b}{b}\binom{a}{b}\Big[2\binom{a}{c} - a_x c_\xi\Big]\Big\}.$$

Die mit c_ξ multiplicirten Theile aber werden nach $4a$)

$$8 c_x \Delta \left[b_x b_\xi \binom{b}{b} - b_x b_\xi \binom{b}{b}\right]$$

und heben sich also auf, so dass nur bleibt:

$$c_x^2(A_3+A_4) = 64 a_x b_x c_x \left[b_\xi \binom{a}{b}^2\binom{a}{c} - a_\xi \binom{a}{b}\binom{b}{b}\binom{a}{c}\right],$$

was nach 8) wieder übergeht in:

$$64 a_x b_x \Big\{\binom{a}{b}^2\binom{a}{c}\Big[2\binom{b}{c} - b_x c_\xi\Big] - \binom{a}{b}\binom{b}{b}\binom{a}{c}\Big[2\binom{a}{c} - a_x c_\xi\Big]\Big\}.$$

Bildet man sich nun aus der ersten Gleichung $4a$), in welcher die Eigenschaft der b gar nicht benutzt wird, indem man noch den b differenziirt, und die Differentialquoten mit den c multiplicirt, die Gleichung:

$$4 a_x^2 \binom{a}{b}\binom{a}{c} = \Delta\binom{b}{c},$$

so sieht man, dass in dem erhaltenen Ausdruck die mit ξ multiplicirten Glieder sich abermals zerstören, und dass man erhält:

$$13)\qquad c_x^2(A_3+A_4) = 128 a_x b_x \binom{a}{b}^2\binom{a}{b}\binom{b}{c} - 128 a_x b_x \binom{a}{b}\binom{b}{b}\binom{a}{c}^2.$$

Führt man nun die Ausdrücke 11), 12) und 13), aus denen die ξ ganz verschwunden sind, in 10) ein, so erhält man die Gleichung:

$$0 = c_x^2\left[16\binom{a}{b}^4 - 16\binom{a}{b}^2\binom{a}{a}\binom{b}{b} + 2\binom{a}{a}^2\binom{b}{b}^2\right]$$

$$+ a_x c_x\Big[-128\binom{a}{b}^3\binom{b}{c} + 64\binom{a}{b}^2\binom{b}{b}\binom{a}{c} + 64\binom{a}{a}\binom{b}{b}\binom{a}{b}\binom{b}{c}$$

$$- 16\binom{b}{b}^2\binom{a}{a}\binom{a}{c}\Big]$$

$$+ a_x b_x\Big[64\binom{a}{b}^3\binom{c}{c} - 32\binom{a}{a}\binom{a}{b}\binom{b}{b}\binom{c}{c} + 128\binom{a}{c}\binom{b}{c}\binom{a}{b}^2$$

$$- 128\binom{a}{b}\binom{b}{b}\binom{a}{c}^2\Big],$$

welches die von Herrn **Clebsch** gegebene Gleichung ist.

XXXII. Geodätische Aufgabe. Es kann der Fall eintreten, dass man einen wohl auf dem Felde, nicht aber auf dem Plane gegebenen Punkt, von dem man weiss, dass er sich auf einer zuverlässig und nach gegebenen Bedingungen ausgesteckten geraden Linie befindet, durch Winkelmessung in dem Punkte selbst zu bestimmen, und dabei zwei gegebene Objecte ausserhalb der Linie, aber kein brauchbares in derselben in Sicht hat. Wäre letzteres der Fall, so würde die Bestimmung durch einfachen oder — zur Controle und Vermittelung — doppelten trigonometrischen Rückwärtseinschnitt über eines oder jedes der beiden Objecte erfolgen; unter den angenommenen Umständen aber ist man auf die Auflösung der folgenden Aufgabe angewiesen:

Ein Punkt auf einer gegebenen Geraden soll aus dem daselbst gemessenen Winkel α zwischen zwei gegebenen Punkten P und P', welche ausserhalb der Geraden liegen, bestimmt werden.

Die Auflösung durch Construction würde einen über PP' beschriebenen Kreisbogen erfordern, welcher den Winkel α fasst, und kann unter Umständen zweideutig werden; da aber, wenn die Bestimmung nicht überhaupt zu unsicher ausfallen soll, die beiden möglichen Punkte nicht zu nahe bei einander liegen dürfen, so wird es im praktischen Falle keine Schwierigkeit haben, den wirklichen Punkt zu unterscheiden.

Zur Auflösung durch die Rechnung seien folgende Zeichen eingeführt:

Rechtwinklige Coordinaten der gegebenen Objecte P und P', im Sinne der Winkelmessung von links nach rechts aufgezählt: a, b und a', b'.

Die Linie sei aus einem gegebenen Punkt P'', dessen Coordinaten a'', b'', unter dem gegebenen Azimuth ω ausgesteckt. x, y Coordinaten und r'' Entfernung des Standpunkts von P'', endlich r und r' Längen, φ und φ' Azimuthe der Sehlinien nach P und P'.

Unmittelbar aus diesen Bezeichnungen ergiebt sich:

$$1)\quad \begin{aligned} a-x&=r\cos\varphi, & a'-x&=r'\cos\varphi',\\ b-y&=r\sin\varphi, & b'-y&=r'\sin\varphi', \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von r und r':

$$(a-x)\sin\varphi-(b-y)\cos\varphi=0,$$
$$(a'-x)\sin\varphi'-(b'-y)\cos\varphi'=0,$$

oder, da

$$x=a''+r''\cos\omega,\quad y=b''+r''\sin\omega:$$

$$2)\quad \begin{aligned} (a-a'')\sin\varphi-(b-b'')\cos\varphi&=r''\sin(\varphi-\omega),\\ (a'-a'')\sin\varphi'-(b'-b'')\cos\varphi'&=r''\sin(\varphi'-\omega). \end{aligned}$$

Setzt man

$$a-a''=e\cos\varepsilon,\quad b-b''=e\sin\varepsilon,$$
$$a'-a''=e'\cos\varepsilon',\quad b'-b''=e'\sin\varepsilon',$$

oder

$$3)\quad \begin{aligned} tang\,\varepsilon &= \frac{b-b''}{a-a''},\quad e=\frac{a-a''}{\cos\varepsilon}=\frac{b-b''}{\sin\varepsilon}\\ tang\,\varepsilon' &= \frac{b'-b''}{a'-a''},\quad e'=\frac{a'-a''}{\cos\varepsilon'}=\frac{b'-b''}{\sin\varepsilon'},\end{aligned}$$

womit e und e' als Längen, ε und ε' als Azimuthe von $P''P$ und $P''P'$ bezeichnet sind, so gehen die vorigen Gleichungen über in:

$$4)\quad \begin{aligned} e\sin(\varphi-\varepsilon) &= r''\sin(\varphi-\omega),\\ e'\sin(\varphi'-\varepsilon') &= r''\sin(\varphi'-\omega).\end{aligned}$$

Diese geben durch Elimination von r'' und Anwendung bekannter Formeln, wenn zugleich $\varphi'+\varphi=\psi$ und der Annahme gemäss $\varphi'-\varphi=\alpha$ gesetzt wird:

$$e\,\{\cos(\alpha-\omega+\varepsilon)-\cos(\psi-\omega-\varepsilon)\}=e'\,\{\cos(\alpha+\omega-\varepsilon')-\cos(\psi-\omega-\varepsilon')\}.$$

Zur Abkürzung setzt man:

$$5)\quad \begin{aligned} S &= e'\cos(\alpha+\omega-\varepsilon')-e\cos(\alpha-\omega+\varepsilon)\\ &= (e'\cos\varepsilon'-e\cos\varepsilon)\cos(\psi-\omega)+(e'\sin\varepsilon'-e\sin\varepsilon)\sin(\psi-\omega)\\ &= (a'-a)\cos(\psi-\omega)+(b'-b)\sin(\psi-\omega).\end{aligned}$$

Die Substitutionen

$$a'-a=c\cos\gamma,\quad b'-b=c\sin\gamma,$$

oder

$$6)\quad tang\,\gamma=\frac{b'-b}{a'-a},\quad c=\frac{a'-a}{\cos\gamma}=\frac{b'-b}{\sin\gamma}$$

geben c und γ als Länge und Azimuth von PP' zu erkennen und liefern:

$$c\cos(\psi-\omega-\gamma)=S.$$

Versteht man unter μ den positiven spitzen oder stumpfen Winkel, der die Gleichung:

$$7)\quad \cos\mu=\frac{S}{c}=\frac{S}{a'-a}\cos\gamma=\frac{S}{b'-b}\sin\gamma$$

befriedigt, so wird jetzt:

$$8)\quad \psi-\omega-\gamma=\pm\mu,\quad \psi=\omega+\gamma\pm\mu$$

und

$$9)\quad \varphi'=\frac{\psi+\alpha}{2},\quad \varphi=\frac{\psi-\alpha}{2}.$$

Die Gleichungen 4) liefern nun in der doppelten Berechnung von r'' eine Probe, x und y ergeben sich endlich aus 2). Die Entscheidung, ob beide Zeichen vor μ zulässig sind, oder nur eines und welches, hat vom theoretischen Standpunkte aus nach den Gleichungen 1) zu erfolgen, welche positive Werthe für r und r' liefern müssen; im praktischen Falle wird es dieser Entscheidung nicht bedürfen, weil die wirklichen Werthe von φ und φ' überschläglich geschätzt werden können.

Recapitulation des Ganges der Rechnung. e und e', ε und ε' *nach 3)*; S nach 5); γ nach 6), c ist unentbehrlich; μ nach 7); ψ nach 8);

φ' und φ nach 9); r'' doppelt mit Probe nach 4); x und y nach 2); etwa noch r und r' doppelt mit Probe nach 1).

Die Auflösung vereinfacht sich, wenn $\omega = 0$ oder $\omega = 90^0$. (Die gegebene Gerade ist Seite eines Messtischquadrats.) Unter ersterer Annahme gilt 5)

$$\begin{aligned} S &= e' \cos(\alpha - \varepsilon') - e \cos(\alpha + \varepsilon) \\ &= (e' \cos \varepsilon' - e \cos \varepsilon) \cos \alpha + (e' \sin \varepsilon' + e \sin \varepsilon) \sin \alpha \\ &= (a' - a) \cos \alpha + (b' + b - 2b'') \sin \alpha. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck könnte noch mit einem Gewinn für die logarithmische Rechnung umgestaltet werden, jedenfalls aber werden e, e', ε, ε' entbehrlich; denn aus 2) ergiebt sich $y = b''$, aus 1) sodann, nachdem φ und φ' im Uebrigen wie oben berechnet sind, unter Elimination von r und r' zur Probe doppelt:

$$x = a - (b - b'') \operatorname{cotang} \varphi = a' - (b' - b'') \operatorname{cotang} \varphi'.$$

Stuttgart, April 1867. C. W. BAUR.

XXXIII. Note über die Integration der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten. Die allgemeinste Form eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten ist bekanntlich

$$1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots . a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = X,$$

worin $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$ gegebene constante Grössen bedeuten und X eine bekannte Function von x allein ist.

Setzt man

$$2) \qquad \begin{cases} a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots . \alpha_n = S_{n,\,1} = S_{n-1,\,1} + \alpha_n \\ a_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \ldots . \quad = S_{n,\,2} = S_{n-1,\,2} + \alpha_n S_{n-1,\,1} \\ a_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \ldots . = S_{n,\,3} = S_{n-1,\,3} + \alpha_n S_{n-1,\,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = \alpha_1 . \alpha_2 \alpha_3 \ldots . \alpha_n \quad = S_{n,\,n} = \alpha_n S_{n-1,\,n-1}\,, \end{cases}$$

so ergiebt sich zunächst, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_n$ Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \ldots . (-1)^{n-1} a_{n-1} z + (-1)^n a_n = 0$$

sind.

Durch Substitution der Werthe von $a_1, a_2 \ldots . a_n$ aus 2) in 1) verwandelt sich die Differentialgleichung 1) in die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + S_{n-1,\,1}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + S_{n-1,\,2}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots . + S_{n-1,\,n-1}\,y\right] \\ &+ \alpha_n\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + S_{n-1,\,1}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + S_{n-1,\,2}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots . + S_{n-1,\,n-1}\,y\right] \end{aligned}\right\} = x,$$

d. h. in eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+S_{n-1,1}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+S_{n-1,2}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+\ldots+S_{n-1,n-1}y.$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Integration

$$3)\quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+S_{n-1,1}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots S_{n-1,n-1}y=e^{-\alpha_n x}\left[\int e^{\alpha_n x}X\,dx+C_n\right],$$

wo C_n eine willkürliche Constante ist.

Da nun $S_{n-1,1}$, $S_{n-1,2}$, ... $S_{n-1,n-1}$ dieselben Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$ sind, wie $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3} \ldots S_{n,n}$ von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, so lässt sich die Gleichung 3) auch in folgende Form verwandeln:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+S_{n-2,1}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+S_{n-2,2}\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}}+\ldots S_{n-2,n-2}y\right]$$
$$+\alpha_{n-1}\left[\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+S_{n-2,1}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+S_{n-2,2}\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}}+\ldots S_{n-2,n-2}y\right]$$
$$=e^{-\alpha_n x}\left[\int e^{\alpha_n x}X\,dx+C_n\right],$$

deren Integration zu der Gleichung

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+S_{n-2,1}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+S_{n-2,2}\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}}+\ldots+S_{n-2,n-2}y$$
$$=e^{-\alpha_{n-1}x}\left[\int e^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)x}\left(\int e^{\alpha_n x}X\,dx+C_n\right)+C_{n-1}\right]$$

führt u. s. w.

Auf diese Weise gelangt man nach n aufeinanderfolgenden Integrationen zu der primitiven Gleichung mit ihren zugehörigen n willkürlichen Constanten.

Für den Fall, dass die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ nicht einander gleich sind, kann man zu dem allgemeinen Integral folgendermaassen gelangen: Die Coefficienten $S_{n-1,1}, S_{n-1,2}, \ldots S_{n-1,n-1}$ in 3) sind nämlich Functionen von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$; man kann daher in diesem Falle α_n in 3) nach einander mit $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ vertauschen und erhält auf diese Weise n Differentialgleichungen, zwischen welchen man die $n-1$ Differentialquotienten eliminiren kann.

Um die Anwendung dieses Verfahrens zu zeigen, nehmen wir die Gleichung 3[ter] Ordnung

$$\frac{d^3y}{dx^3}+a_1\frac{d^2y}{dx^2}+a_2\frac{dy}{dx}+a_3y=X.$$

Setzt man hierin

$$a_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$
$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3$$
$$a_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Wurzeln der Gleichung

$$z^3-a_1z^2+a_2z-a_3=0$$

sind, so erhält man

$$\frac{d^3y}{dx^3}+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\frac{dy}{dx}+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\frac{dy}{dx}+\alpha_1\alpha_2\alpha_3 y=X,$$

oder auch

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha_1+\alpha_2)\frac{dy}{dx}+\alpha_1\alpha_2 y\right]+\alpha_3\left[\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha_1+\alpha_2)\frac{dy}{dx}+\alpha_1\alpha_2 y\right]=X,$$

woraus durch Integration und Vertauschung von α_3 mit α_1 und α_2 die drei Gleichungen

$$\text{A)}\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha_1+\alpha_2)\frac{dy}{dx}+\alpha_1\alpha_2 y=e^{-\alpha_3 x}\left[\int e^{\alpha_3 x}X\,dx+C_3\right],$$

$$\text{B)}\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha_1+\alpha_3)\frac{dy}{dx}+\alpha_1\alpha_3 y=e^{-\alpha_2 x}\left[\int e^{\alpha_2 x}X\,dx+C_2\right],$$

$$\text{C)}\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha_2+\alpha_3)\frac{dy}{dx}+\alpha_2\alpha_3 y=e^{-\alpha_1 x}\left[\int e^{\alpha_1 x}X\,dx+C_1\right]$$

hervorgehen.

Setzt man der Kürze wegen

$$e^{-\alpha x}\left[\int e^{\alpha x}X\,dx+C\right]=\lambda,$$

so ergiebt sich, indem man nach einander zwei und zwei der Gleichungen A), B), C) von einander abzieht, das System der drei Gleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx}+\alpha_1 y=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_3}[\lambda_3-\lambda_2],$$

$$\frac{dy}{dx}+\alpha_2 y=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_3}[\lambda_3-\lambda_1],$$

$$\frac{dy}{dx}+\alpha_3 y=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}[\lambda_2-\lambda_1].$$

Indem man nun irgend zwei dieser Gleichungen von einander subtrahirt, kommt man zur primitiven Gleichung:

$$y=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\lambda_3-(\alpha_1-\alpha_3)\lambda_2+(\alpha_2-\alpha_3)\lambda_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}.$$

Ist z. B. $\alpha_1=\alpha_2$, so wird der Ausdruck für y unendlich; sobald man indess zu den Gleichungen A), B), C) zurückkehrt, gehen diese über in:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\alpha_1\frac{dy}{dx}+\alpha_1^2 y=\lambda_3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha_1+\alpha_3)\frac{dy}{dx}+\alpha_1\alpha_3 y=\lambda_2,$$

woraus durch Subtraction

$$\frac{dy}{dx}+\alpha_1 y=\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\alpha_1-\alpha_3}$$

und darnach durch Integration:

$$y=e^{-\alpha_1 x}\left[\int e^{\alpha_1 x}\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\alpha_1-\alpha_3}\,dx+C\right].$$

Sind endlich alle drei Wurzeln gleich

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha,$$

so reduciren sich die Gleichungen A), B), C) auf die eine Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\alpha \frac{dy}{dx} + \alpha^2 y = \lambda,$$

die sich auch schreiben lässt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + \alpha y\right) + \alpha\left(\frac{dy}{dx} + \alpha y\right) = \lambda,$$

so dass man die primitive Gleichung vermittelst zweier Integrationen erhält.

Auch ohne Rücksicht auf die Beschaffenheit der Wurzeln kann man die Gleichung

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)\frac{dy}{dx} + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 y = X$$

'ort unter der Form

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + \alpha_1 y\right) + \alpha_2\left(\frac{dy}{dx} + \alpha_1 y\right)\right] + \alpha_3\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + \alpha_1 y\right)\right.$$
$$\left. + \alpha_2\left(\frac{dy}{dx} + \alpha_1 y\right)\right] = X$$

schreiben, welche vermittelst dreier Integrationen zur primitiven Gleichung führt.

Copenhagen, 11. August 1867.

Dr. phil. Camillo Tychsen.

XXXIV. Bemerkungen über Raumcurven. Von A. Enneper. In dem Punkte (ξ, η, ζ) einer Curve doppelter Krümmung sei ϱ der Krümmungshalbmesser und r der Torsionsradius. Sind ϱ und r beide constant, so ist die Curve die Helix eines Kreiscylinders, ein Resultat, welches zuerst Puiseux durch eine gewandte analytische Rechnung gefunden hat. Dieses Resultat hat später Bertrand, mit Hülfe geometrischer Betrachtungen, dahin erweitert, dass eine Curve, für welche $\frac{\varrho}{r}$ constant ist, die Kanten einer beliebigen Cylinderfläche unter constantem Winkel schneidet. (*Journal de Mathém. t. XIII*, *p.* 423). Einen sehr einfachen analytischen Beweis dieses Satzes hat Serret gegeben (*J. d. M. t. XVI*, *p.* 197). Nimmt man $\frac{\varrho}{r}$ gleich einer linearen Function des Bogens s, also:

$$\text{1)} \qquad \frac{\varrho}{r} = gs + h,$$

wo g und h Constanten sind, so lässt sich durch eine sehr einfache Rechnung nachweisen, dass eine Curve, charakterisirt durch die Gleichung 1), die kürzeste Linie einer beliebigen Kegelfläche ist. Für den Fall, dass

$g = 0$, rückt die Spitze der Kegelfläche unendlich weit, man hat dann eine Cylinderfläche, deren kürzeste Linien bekanntlich Schraubenlinien sind.

Seien:

$$\alpha, \beta, \gamma;$$
$$\lambda, \mu, \nu;$$
$$l, m, n$$

die Winkel, welche respective die Tangente, Hauptnormale und die Axe der Krümmungsebene im Punkte (ξ, η, ζ) einer Curve mit den Coordinatenaxen bildet. Setzt man in den Gleichungen:

$$\frac{\partial \cos l}{\partial s} = \frac{\varrho}{r} \frac{\partial \cos \alpha}{\partial s}, \quad \frac{\partial \cos m}{\partial s} = \frac{\varrho}{r} \frac{\partial \cos \beta}{\partial s}, \quad \frac{\partial \cos n}{\partial s} = \frac{\varrho}{r} \frac{\partial \cos \gamma}{\partial s}, \quad \frac{\varrho}{r} = gs + h,$$

so gehen dieselben über in:

$$2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \cos l}{\partial s} = \dfrac{\partial}{\partial s} \{(gs+h) \cos \alpha\} - g \cos \alpha, \\ \dfrac{\partial \cos m}{\partial s} = \dfrac{\partial}{\partial s} \{(gs+h) \cos \beta\} - g \cos \beta, \\ \dfrac{\partial \cos n}{\partial s} = \dfrac{\partial}{\partial s} \{(gs+h) \cos \gamma\} - g \cos \gamma. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf:

$$\cos \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial s}, \quad \cos \beta = \frac{\partial \eta}{\partial s}, \quad \cos \gamma = \frac{\partial \zeta}{\partial s},$$

geben die Gleichungen 2) integrirt:

$$3) \quad \begin{cases} \cos l = (gs+h) \cos \alpha + g\xi - \xi_0, \\ \cos m = (gs+h) \cos \beta + g\eta - \eta_0, \\ \cos n = (gs+h) \cos \gamma + g\zeta - \zeta_0, \end{cases}$$

wo ξ_0, η_0, ζ_0 Constanten sind. Die Gleichungen 3) respective mit $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ multiplicirt und addirt geben:

$$4) \quad (g\xi - \xi_0) \cos \lambda + (g\eta - \eta_0) \cos \mu + (g\zeta - \zeta_0) \cos \nu = 0.$$

Die Gleichung der rectificirenden Ebene im Punkte (ξ, η, ζ) ist:

$$(x - \xi) \cos \lambda + (y - \eta) \cos \mu + (z - \zeta) \cos \nu = 0.$$

Mittelst der Gleichung 4) geht die vorstehende Gleichung über in:

$$5) \quad (gx - \xi_0) \cos \lambda + (gy - \eta_0) \cos \mu + (gz - \zeta_0) \cos \nu = 0.$$

Ist g von Null verschieden, so zeigt die Gleichung 5), dass die rectificirende Ebene durch den festen Punkt $\left(\frac{1}{g}\xi_0, \frac{1}{g}\eta_0, \frac{1}{g}\zeta_0\right)$ geht. Gehen die rectificirenden Ebenen einer Curve durch einen festen Punkt, so berühren dieselben eine beliebige Kegelfläche, auf welcher die Curve liegt. Diese Kegelfläche ist die rectificirende Fläche der Curve; da durch Abwickelung derselben die Curve in eine Gerade übergeht, so folgt, dass die Curve die kürzeste Linie einer beliebigen Kegelfläche ist. Für $g = 0$ geht die Gleichung 4) über in:

$$6) \quad \xi_0 \cos \lambda + \eta_0 \cos \mu + \zeta_0 \cos \nu = 0.$$

Diese Gleichung zeigt unmittelbar, dass die rectificirende Ebene einer festen Geraden parallel ist. Die rectificirende Fläche ist also eine beliebige Cylinderfläche und die Curve eine kürzeste Linie derselben. Schreibt man die Gleichung 6) auf folgende Weise:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\xi_0 \cos\alpha + \eta_0 \cos\beta + \zeta_0 \cos\gamma) = 0,$$

so erhält man durch Integration das Theorem von **Bertrand**. Sei (ξ, η, ζ) ein Punkt der Wendecurve einer developpabeln Fläche, ferner Φ_1 eine Parallelfläche von Φ und (ξ_1, η_1, ζ_1) der Punkt der Wendecurve derselben, welcher dem Punkte (ξ, η, ζ) entspricht. Bedeutet g eine beliebige Constante, so finden die Gleichungen statt:

$$\xi_1 = \xi + \frac{1}{g}\left(\cos l - \frac{\varrho}{r}\cos\alpha\right),$$

$$\eta_1 = \eta + \frac{1}{g}\left(\cos m - \frac{\varrho}{r}\cos\beta\right),$$

$$\zeta_1 = \zeta + \frac{1}{g}\left(\cos n - \frac{\varrho}{r}\cos\gamma\right).$$

Diese Gleichungen nach s differentiirt, geben:

$$g\frac{\partial \xi_1}{\partial s} = \left\{g - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\varrho}{r}\right\}\cos\alpha, \quad g\frac{\partial \eta_1}{\partial s} = \left\{g - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\varrho}{r}\right\}\cos\beta,$$

$$g\frac{\partial \zeta_1}{\partial s} = \left\{g - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\varrho}{r}\right\}\cos\gamma.$$

Sind ξ_1, η_1, ζ_1 constant, so ist die Fläche Φ_1 eine Kegelfläche, die vorstehenden Gleichungen geben dann

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\varrho}{r} = g,$$

welche Gleichung auf die Gleichung 1) führt. Hieraus folgt:

> Die Wendecurve der Parallelfläche zu einer Kegelfläche ist eine kürzeste Linie einer zweiten Kegelfläche, welche mit der ersten dieselbe Spitze hat.

Ist U eine beliebige Function von u, $U' = \frac{\partial U}{\partial u}$, $U'' = \frac{\partial^2 U}{\partial u^2}$, ferner φ der Winkel, unter welchem eine Helix die Kanten einer Cylinderfläche schneidet, so hat man für einen Punkt (ξ, η, ζ) der Helix die Gleichungen:

7) $\quad \xi = U''\cos u + U'\sin u, \quad \eta = U''\sin u - U'\cos u, \quad \zeta = (U'' + U)\cot\varphi,$

wenn die Kanten der cylindrischen Fläche parallel der Axe der z genommen werden. Aus den Gleichungen 7) findet man leicht:

8) $\quad \cos\alpha = \cos u \sin\varphi, \quad \cos\beta = \sin u \sin\varphi, \quad \cos\gamma = \cos\varphi.$

Setzt man:

$$\frac{\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}} = \cos\Theta,$$

so ergiebt sich mittelst der Gleichungen 7) und 8):

$$9) \qquad \frac{U''+U\cos^2\varphi}{\sqrt{(U'^2+U^2\cos^2\varphi)}}=\cot\Theta\sin\varphi.$$

Nimmt man Θ constant, so sind durch die Gleichungen 7) und 9) die Curven bestimmt, welche gleichzeitig die Kanten einer cylindrischen und conischen Fläche unter constanten Winkeln schneiden. Der Einfachheit halber ist die Spitze der Kegelfläche zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\cot\Theta\sin\varphi=p,\quad \Omega=(u-u_0)\sqrt{(p^2-\cos^2\varphi)},$$

sind u_0 und q Constanten, so giebt die Gleichung 9) integrirt:

$$U(p^2-\cos^2\varphi)+pq=q\cos\varphi\,\frac{e^{\Omega}+e^{-\Omega}}{2}.$$

Setzt man diesen Werth von U in die Gleichungen 7), so leitet man ohne Schwierigkeit die folgende ab:

$$10) \qquad \xi^2+\eta^2+\frac{q^2\cos^2\varphi}{p^2-\cos^2\varphi}=\left\{\zeta\tan\varphi+\frac{pq}{p^2-\cos^2\varphi}\right\}^2\frac{p^2-\cos^2\varphi}{p^2+\sin^2\varphi}.$$

Nimmt man zur Vereinfachung:

$$\frac{q^2\cos^2\varphi}{p^2-\cos^2\varphi}=\pm b^2,\quad \frac{p^2-\cos^2\varphi}{p^2+\sin^2\varphi}=\pm\frac{b^2}{a^2}\cot^2\varphi,$$

also:

$$\left(\frac{pq}{p^2-\cos^2\varphi}\right)^2=(a^2\pm b^2)\tan^2\varphi,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $p^2\gtrless\cos^2\varphi$, so giebt die Gleichung 10):

$$\frac{\{\zeta\pm\sqrt{(a^2-b^2)}\}^2}{a^2}+\frac{\xi^2+\eta^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{\{\zeta\pm\sqrt{(a^2+b^2)}\}^2}{a^2}-\frac{\xi^2+\eta^2}{b^2}=1.$$

Diese Gleichungen enthalten folgendes Theorem:

> Wird die grosse Axe einer Ellipse oder Hyperbel zur Rotationsaxe genommen, ist C eine Curve der Rotationsfläche, deren Tangenten mit Parallelen zur Rotationsaxe einen constanten Winkel bilden, so schneidet die Curve C die Kanten einer Kegelfläche unter einem constanten Winkel, deren Spitze einer der Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel ist.

Ist $\Theta=\varphi$, so giebt die Gleichung 9):

$$2U+\frac{q}{\sin\varphi\cos\varphi}=q(u-u_0)^2\cot\varphi,$$

wo q und u_0 Constanten sind. Aus der vorstehenden Gleichung und den Gleichungen 7) findet man:

$$\xi^2+\eta^2=2q(\zeta+\tfrac{1}{2}q),$$

welche Gleichung folgenden Satz enthält:

> Die Curve, welche die Kanten einer conischen und cylindrischen Fläche unter demselben Winkel schneidet, liegt auf einem Rotationsparaboloid. Die Kanten der cylindrischen Fläche sind der Rotationsaxe parallel, die Spitze der Kegelfläche ist der Brennpunkt einer Meridiancurve des Paraboloids.

Nimmt man in 12) $q=0$, so ergiebt sich die Gleichung des Kreiskegels, für eine Helix desselben ist also $\frac{\varrho}{r}$ constant. Die Gleichung 1) giebt eine sehr einfache geometrische Auflösung einer partiellen Differentialgleichung. Die Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die Projection der Verbindungslinie OP eines Punktes P der Fläche mit einem festen Punkte O auf die Normale in P gleich einer Constanten $\frac{1}{g}$ ist, sind durch die Gleichung bestimmt:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial x}+z\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{g}\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}},$$

wenn $f=0$ die Gleichung der Fläche ist und der feste Punkt O zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen wird. Ausser der Kugelfläche, eine Lösung, welche evident ist, sind in der obigen partiellen Differentialgleichung die developpabeln Flächen enthalten, deren Wendecurve durch die Gleichung 1) bestimmt ist (Nachrichten von d. K. Gesellsch. d. Wissenschaften zu Göttingen, 1866, p. 143).

XXXV. Ueber die Lichtmenge, welche im Polarisationsapparat durch eine zur optischen Axe oder zur ersten Mittellinie senkrecht geschnittene Krystallplatte hindurchgeht. Von Dr. E. Lommel in Zürich. Eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene einaxige Krystallplatte sei zwischen den polarisirenden und analysirenden Apparat eines Polarisationsinstrumentes eingeschoben. Durch eine vor dem Polarisator angebrachte Linse ist dafür gesorgt, dass Strahlen verschiedener Richtung die Platte durchdringen, während eine hinter dem Polariscop aufgepflanzte Linse die Interferenzerscheinung, nämlich das bekannte Ringsystem, auf einen zur Axe der ganzen Vorrichtung senkrechten Auffangschirm projicirt. Bei subjectiver Beobachtung stellen die brechenden Medien des Auges die Projectionslinse, und die Netzhaut den Auffangschirm vor. Ausser der projicirenden sind alle anderen im Apparate etwa noch vorhandenen Linsen für unsere Betrachtung unwesentlich. Die Lage eines Punktes auf dem Schirme sei durch seine Polarcoordinaten ϱ (Radius vector) und α (Polarwinkel) angegeben; der Pol falle in den Mittelpunkt des Ringsystems und

die Polaraxe sei eine beliebige durch ihn gezogene Gerade. Nehmen wir nun diejenige Lichtmenge zur Einheit, welche auf die Flächeneinheit des Schirmes bei Abwesenheit der Krystallplatte und Parallelstellung der beiden Polarisationsebenen trifft, und vernachlässigen wir die absorbirende Wirkung der Platte, so ist die im Punkte (ϱ, α) bei Gegenwart des Krystalls herrschende Intensität, für die Flächeneinheit ausgedrückt:

$$\cos^2(\varphi-\psi)-\sin 2(\varphi-\alpha)\sin 2(\psi-\alpha)\sin^2 m\pi\varrho^2,$$

wenn φ und ψ die Winkel sind, welche die Oscillationsrichtungen des Polarisators und des Polariscops mit der Axe des Coordinatensystems bilden, und wenn

$$m=\frac{D}{2\lambda}\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2e^2}$$

gesetzt wurde; hierin ist unter D die Dicke der Krystallplatte, unter a und b resp. die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des ausserordentlichen und des ordentlichen Strahles zu verstehen, unter λ die Wellenlänge der angewendeten homogenen Lichtgattung im leeren Raum; e bedeutet die Entfernung des optischen Mittelpunkts der projicirenden Linse vom Auffangschirm, so dass, wenn mit i der Winkel bezeichnet wird, den das in (ϱ, α) vereinigte Strahlenbündel mit der Plattennormale bildet, $e.tg\,i=\varrho$ oder (wegen der überhaupt hier vorausgesetzten Kleinheit des Winkels i) $ei=\varrho$ ist.

Das im Punkte (ϱ, α) befindliche Flächenelement $\varrho\, d\varrho\, d\alpha$ empfängt demnach die Lichtmenge

$$\cos^2(\varphi-\psi).\varrho\, d\varrho\, d\alpha-\sin 2(\varphi-\alpha)\sin 2(\psi-\alpha)\sin^2 m\pi\varrho^2.\varrho\, d\varrho\, d\alpha.$$

Um die auf einer mit dem Radius r von unserm Pole aus beschriebenen Kreisfläche vorhandene Gesammtlichtmenge zu bestimmen, haben wir diesen Differentialausdruck nach α von 0 bis 2π, nach ϱ aber von 0 bis r zu integriren. Wir erhalten, wenn wir die gesuchte Lichtmenge mit J bezeichnen:

$$J=\pi r^2\cos^2(\varphi-\psi)-\int_0^{2\pi}\sin 2(\varphi-\alpha)\sin 2(\psi-\alpha).d\alpha.\int_0^r\sin^2 m\pi\varrho^2.\varrho\, d\varrho.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{2\pi}\sin 2(\varphi-\alpha)\sin 2(\psi-\alpha)\,d\alpha=-\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2(\varphi+\psi-2\alpha)\,d\alpha+\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2(\varphi-\psi).d\alpha$$
$$=\pi\cos 2(\varphi-\psi);$$

ferner

$$\int_0^r\sin^2 m\pi\varrho^2.\varrho\, d\varrho=\tfrac{1}{2}\int_0^r\varrho\, d\varrho-\tfrac{1}{2}\int_0^r\cos 2m\pi\varrho^2.\varrho\, d\varrho$$
$$=\frac{r^2}{4}-\frac{\sin 2m\pi r^2}{8m\pi}.$$

Setzt man diese Werthe oben ein, so erhält man nach einer naheliegenden Umformung, wenn man noch δ statt $\varphi - \psi$ schreibt:

$$J = \pi r^2 (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cos 2\delta) + \frac{\cos 2\delta \sin 2m\pi r^2}{8m}.$$

Wie vorauszusehen war, hängt dieser Ausdruck nur von der Differenz δ der Winkel φ und ψ ab, welchen wir übrigens nur Werthe zwischen 0^0 und 90^0 beizulegen brauchen.

Die auf die Flächeneinheit für die Kreisfläche πr^2 treffende mittlere Intensität J_1 ergiebt sich hieraus, wenn man noch durch πr^2 dividirt, wie folgt:

$$J_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cos 2\delta \left(1 + \frac{\sin 2m\pi r^2}{2m\pi r^2}\right).$$

Der Ausdruck für die Gesammtlichtmenge J besteht also, wenn wir δ vorerst ungeändert lassen, aus einem Gliede, welches der Grösse der beleuchteten Kreisfläche proportional ist, und aus einem mit r periodisch sich ändernden Gliede. Das letztere verschwindet erstens, so oft $mr^2 = n$ ist, unter n eine positive ganze Zahl verstanden, d. h. also für alle jene um den Pol beschriebenen Kreise, welche bei rechtwinklig gekreuzten Polarisationsebenen völlig schwarz erscheinen. Es verschwindet zweitens, so oft $mr^2 = n + \frac{1}{2}$ ist, also auch für jene Kreise, welche bei rechtwinkliger Stellung der Polarisationsebenen das Maximum der Lichtstärke zeigen. Es erreicht seinen grössten positiven Werth $\frac{\cos 2\delta}{8m}$ (δ kleiner als 45^0 gedacht) auf den Kreisen $mr^2 = n + \frac{1}{4}$, dagegen den grössten negativen Werth für $mr^2 = n + \frac{3}{4}$. Das Umgekehrte findet statt, wenn $\delta > 45^0$ ist.

Für $\delta = 45^0$ verschwindet das periodische Glied völlig, und die mittlere Intensität wird

$$J_1 = \tfrac{1}{2}.$$

Daraus ergiebt sich der merkwürdige Satz:

> Wenn die Polarisationsebenen einen Winkel von 45^0 mit einander bilden, so ist die mittlere Erleuchtung auf dem Schirme ebenso gross, als wenn die Krystallplatte gar nicht vorhanden wäre.

Dieser Satz gilt für weisses Licht ebenso gut wie für homogenes, weil die Grösse m, welche die Wellenlänge enthält, aus dem Ausdrucke für J_1 ganz hinausgefallen ist.

Wenn δ von 45^0 verschieden ist, bleibt J_1 sowohl von der Wellenlänge, als von dem Inhalt der auf dem Schirm betrachteten Kreisfläche abhängig. Lassen wir aber letztere von einem der oben erwähnten Maximum- oder Minimumkreise ($mr^2 = n + \frac{1}{2}$ oder $mr^2 = n$) begrenzt sein, so zieht sich der Ausdruck zurück auf

$$J_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cos 2\delta.$$

Es ist dies zugleich der Grenzwerth, welchem sich J_1 bei wachsendem r sehr rasch nähert. Wir können daher diese Gleichung auch ganz allgemein gelten lassen, wenn nur r hinlänglich gross ist.

Ist nün $\delta = 0$, so wird

$$J_1 = \tfrac{3}{4},$$

d. h., dem Gesetze des Quadrats des Cosinus zufolge, ebenso gross, als wenn bei Abwesenheit der Krystallplatte die beiden Polarisationsebenen einen Winkel von 30^0 mit einander bildeten.

Ist ferner $\delta = 90^0$, so hat man

$$J_1 = \tfrac{1}{4},$$

d. h. die Intensität ist dieselbe, als wenn, ohne Krystallplatte, die beiden Polarisationsebenen einen Winkel von 60^0 mit einander machten.

Wir können demnach den folgenden Satz aussprechen:

> *Bringt man zwischen Polarisator und Polariscop, deren Polarisationsebenen parallel oder rechtwinklig gekreuzt sind, eine senkrecht zur Axe geschnittene Krystallplatte, so ist auf dem Schirme oder im Auge die mittlere Erleuchtung dieselbe, als wenn man bei Abwesenheit der Platte die eine Polarisationsebene um 30^0 drehen würde.*

Dieser Satz, welcher von der *depolarisirenden Wirkung* der eingeschobenen Krystallplatte Rechenschaft giebt, gilt für homogenes Licht mit völliger Strenge, wenn das auf dem Schirm oder im Auge in Betracht gezogene Flächenstück von irgend einem Maximum- oder Minimumkreis begrenzt ist. Für jeden anderen Begrenzungskreis, wenn nur dessen Radius gross genug ist, gilt derselbe wenigstens mit grosser Annäherung, und zwar selbst für weisses Licht.

Setzen wir in die Formel für J_1 einmal $45^0 - \gamma$, dann $45^0 + \gamma$, so erhalten wir die Werthe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\gamma$ und $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\gamma$, deren Summe gleich 1, deren arithmetisches Mittel folglich $\frac{1}{2}$ ist. Für zwei Stellungen der Polarisationsebenen, welche beiderseits um gleichviel von der mittleren Stellung 45^0 abweichen, ist auch die Intensität um gleichviel über oder unter der mittleren, welche bei 45^0 stattfindet.

Die Intensität, welche bei Abwesenheit des Krystalls auf dem Schirme herrschen würde, ist ausgedrückt durch $\cos^2\delta$. Vergleichen wir damit die Intensität J_1, deren Formel auch so

$$J_1 = \cos^2\delta - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\sin^2\delta)$$

geschrieben werden kann, so sehen wir, dass durch Einschieben der Krystallplatte die ursprüngliche Lichtstärke vermindert wird, so lange $\delta < 45^0$, dagegen vermehrt, wenn $\delta > 45^0$ ist.

Aus der Gleichung

$$\cos^2\varepsilon = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\cos 2\delta$$

kann man übrigens jedesmal den Winkel ε berechnen, unter welchem man die Polarisationsebenen nach Fortnahme des Krystalls zu einander stellen

müsste, um auf dem Schirm die nämliche Lichtmenge zu haben, wie vorher bei Gegenwart des Krystalls für das Azimuth δ.

Um für eine zweiaxige Krystallplatte, welche senkrecht zur ersten Mittellinie geschnitten ist, und auf dem Schirme das bekannte Lemniscatensystem hervorruft, dieselbe Untersuchung anzustellen, können wir ebenfalls die obige Formel

$$\cos^2(\varphi-\psi) - \sin 2(\varphi-\alpha)\sin 2(\psi-\alpha)\sin^2 m\pi\varrho^2$$

benutzen, wenn wir nur unter ϱ und α die lemniscatischen Coordinaten*) eines Punktes auf dem Schirme verstehen, und

$$m=\frac{D}{\lambda}\cdot\frac{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}{c^2(a+b).e^2}$$

setzen, wo $a<b<c$ die drei optischen Hauptconstanten des Krystalls sind, und die übrigen Grössen die nämliche Bedeutung haben, wie vorher.

Bezeichnet man mit p den halben Polabstand des Lemniscatensystems auf dem Schirm, und mit R die Grösse

$$p^4+2p^2\varrho^2\cos 2\alpha+\varrho^4,$$

so ist ein Flächenelement des Schirmes ausgedrückt durch

$$\frac{\varrho^3\,d\varrho\,d\alpha}{\sqrt{R}}$$

und die auf dasselbe treffende Lichtmenge durch

$$\cos^2(\varphi-\psi)\cdot\frac{\varrho^3 d\varrho\,d\alpha}{\sqrt{R}} - \sin 2(\varphi-\alpha)\sin 2(\psi-\alpha)\sin^2 m\pi\varrho^2\cdot\frac{\varrho^3 d\varrho\,d\alpha}{\sqrt{R}}.$$

Um nun die auf den Flächenraum L einer Lemniscate kommende Lichtmenge J zu berechnen, hat man diesen Ausdruck nach ϱ zwischen den Grenzen 0 und ϱ und nach α zwischen 0 und 2π zu integriren. Man findet aber, wenn man der Bequemlichkeit wegen einstweilen die Grenzen weglässt:

$$J=L\cos^2(\varphi-\psi)+\tfrac{1}{2}\iint\cos 2(\varphi+\psi-2\alpha)\sin^2 m\pi\varrho^2\cdot\frac{\varrho^3 d\varrho\,d\alpha}{\sqrt{R}}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cos 2(\varphi-\psi)\iint\sin^2 m\pi\varrho^2\cdot\frac{\varrho^3 d\varrho\,d\alpha}{\sqrt{R}}$$

oder

$$J=L\cos^2(\varphi-\psi)+\tfrac{1}{2}\cos 2(\varphi+\psi)\iint\cos 4\alpha\sin^2 m\pi\varrho^2\cdot\frac{\varrho^3 d\varrho\,d\alpha}{\sqrt{R}}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sin 2(\varphi-\psi)\iint\sin 4\alpha\sin^2 m\pi\varrho^2\cdot\frac{\varrho^3 d\varrho\,d\alpha}{\sqrt{R}}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cos 2(\varphi-\psi)\iint\sin^2 m\pi\varrho^2\cdot\frac{\varrho^3 d\varrho\,d\alpha}{\sqrt{R}}.$$

*) Siehe meine Abhandlung „Ueber lemniscatische Coordinaten" in dieser *Zeitschrift 1. Heft* dieses Jahrg.

Von diesen Doppelintegralen verschwindet das zweite zwischen den Grenzen 0 und 2π, so dass man nur noch hat

$$J = L\cos^2(\varphi-\psi) + \tfrac{1}{2}\cos 2(\varphi+\psi)\int\!\!\int \cos 4\alpha . \sin^2 m\pi\varrho^2 . \frac{\varrho^3 d\varrho\, d\alpha}{\sqrt{R}}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cos 2(\varphi-\psi)\int\!\!\int \sin^2 m\pi\varrho^2 . \frac{\varrho^3 d\varrho\, d\alpha}{\sqrt{R}},$$

oder auch

$$J = L\cos^2(\varphi-\psi) - \cos 2\varphi \cos 2\psi \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\varrho} \sin^2 m\pi\varrho^2 . \frac{\varrho^3 d\varrho\, d\alpha}{\sqrt{R}}$$
$$+\cos 2(\varphi+\psi)\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\varrho} \cos^2 2\alpha \sin^2 m\pi\varrho^2 . \frac{\varrho^3 d\varrho\, d\alpha}{\sqrt{R}}.$$

Jedes dieser letzteren Doppelintegrale ist positiv und kleiner, als

$$L = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\varrho} \frac{\varrho^3 d\varrho\, d\alpha}{\sqrt{R}}$$

und zudem noch das zweite kleiner, als das erste. Dividiren wir daher noch beiderseits mit L, so erhalten wir die mittlere Intensität

$$J_1 = \cos^2(\varphi-\psi) - K_1 \cos 2\varphi \cos 2\psi + K_2 \cos 2(\varphi+\psi),$$

wo K_1 und K_2 positive echte Brüche sind, und zwar $K_1 > K_2$. Dieser Ausdruck erreicht sein Maximum

$$1-(K_1-K_2)$$

für $\varphi=0$ und $\psi=0$; sein Minimum

$$K_1-K_2$$

dagegen für $\varphi=90^0$ und $\psi=0$. Daraus folgt weiter noch, dass $K_1-K_2<\tfrac{1}{2}$ sein muss.

Von den Winkeln φ und ψ, welche die beiden Polarisationsebenen mit der Ebene der optischen Axe des Krystalls bilden, nehmen wir immer φ grösser oder mindestens gleich ψ an.

Sei nun zuerst $\varphi=\psi$, so geht der obige allgemeine Ausdruck über in

$$J_1 = 1 - K_1 \cos^2 2\psi + K_2 \cos 4\psi$$

und hat sein Maximum $1-(K_1-K_2)$ bei $\psi=0$ oder $\psi=90^0$, sein Minimum $1-K_2$ dagegen bei $\psi=45^0$. [Aus $1-(K_1-K_2) > 1-K_2$ lässt sich schliessen, dass $K_2 > \tfrac{1}{2}K_1$ ist.] Man findet in diesem Falle beispielsweise folgende Reihe von Werthen

$\psi=\varphi=0^0$	$J_1 = 1-(K_1-K_2)$
$\psi=\varphi=22\tfrac{1}{2}$,	$1-\tfrac{1}{2}K_1$
$\psi=\varphi=45$	$1-K_2$
$\psi=\varphi=67\tfrac{1}{2}$	$1-\tfrac{1}{2}K_1$
$\psi=\varphi=90$	$1-(K_1-K_2)$.

Wenn also die beiden Polarisationsebenen zusammenfallen, so wird durch Zwischenschieben der Platte die Erleuchtung auf dem Schirme,

welche ohne Platte gleich 1 wäre, stets geschwächt, und zwar am meisten, wenn jene mit der Ebene der optischen Axe einen Winkel von 45° bilden.

Setzen wir ferner $\varphi - \psi = 90^0$, so ist

$$J_1 = K_1 \cos^2 2\psi - K_2 \cos 4\psi.$$

Dieser Ausdruck ist zu dem vorigen complementär, d. h. er giebt mit jenem zusammengenommen 1; sein Maximum K_2 tritt ein für $\psi = -45^0$ oder $\psi = +45^0$, sein Minimum $K_1 - K_2$ aber für $\psi = 0$. Er liefert z. B. die Werthe:

$\psi = -45^0$	$\varphi = +45^0$	$J_1 = K_2$
$\psi = -22\frac{1}{2}$	$\varphi = 67\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} K_1$
$\psi = 0$	$\varphi = 90$	$K_1 - K_2$
$\psi = 22\frac{1}{2}$	$\varphi = 112\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} K_1$
$\psi = 45$	$\varphi = 135$	K_2

und zeigt sonach, dass bei rechtwinklig gekreuzten Polarisationsebenen die Erleuchtung auf dem Schirme, welche ohne Krystallplatte Null wäre, durch Einschieben derselben stets vermehrt wird, und zwar am meisten, wenn die Polarisationsebenen von der Ebene der optischen Axen beiderseits um 45° abstehen.

Sei endlich noch $\varphi - \psi = 45^0$, also

$$J_1 = \tfrac{1}{2} - (K_2 - K_1) \sin 4\psi.$$

Das Maximum dieses Ausdruckes findet statt bei $\psi = -22\frac{1}{2}^0$ oder $\psi = 67\frac{1}{2}^0$, das Minimum bei $\psi = 22\frac{1}{2}$, und zwar erhält man

$\psi = -22\frac{1}{2}^0$	$\varphi = +22\frac{1}{2}^0$	$J_1 = \frac{1}{2} + K_2 - \frac{1}{2} K_1$
$\psi = 0$	$\varphi = 45$	$\frac{1}{2}$
$\psi = 22\frac{1}{2}$	$\varphi = 67\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - (K_2 - \frac{1}{2} K_1)$.
$\psi = 45$	$\varphi = 90$	$\frac{1}{2}$
$\psi = 67\frac{1}{2}$	$\varphi = 112\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + K_2 - \frac{1}{2} K_1$.

Man ersieht hieraus, dass für $\varphi - \psi = 45^0$ die Erleuchtung ($= \frac{1}{2}$), welche ohne Platte stattfinden würde, durch deren Gegenwart verstärkt wird, sobald die Ebene der optischen Axen innerhalb, dagegen geschwächt, sobald sie ausserhalb des spitzen Winkels fällt, den die beiden Polarisationsebenen mit einander bilden. In den Uebergangsstellungen ($\psi = 0^0$ und $\psi = 45^0$) findet weder Verstärkung noch Schwächung statt. Wir können daher zum Schlusse den folgenden Satz aussprechen:

> Wenn die eine Polarisationsebene parallel oder senkrecht, die andere unter 45° geneigt ist zur Ebene der optischen Axen einer zweiaxigen, senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittenen Krystallplatte, so findet auf einem Schirme dieselbe mittlere Erleuchtung statt, als wenn die Krystallplatte gar nicht vorhanden wäre.

Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Zwölfter Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1867.



Inhalt.

Geschichte der Mathematik.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

Descriptive Geometrie.

Mechanik.

Physik.

Druckfehler.

In Heft IV. pag. 313 — 323 muss es heissen und zwar:

pag. 313 Z. 10 v. u. fehlt rechts der Factor $\sqrt{x}$.

„ 314 Z. 12 v. u. lies „der“ statt „des“.

„ 315 Z. 10 v. u. lies J_{rn-r-1} statt J_{rn-r}.

„ 320 Z. 4 v. u. lies $= \pm 1$ statt $= 0$.

„ 321 letzte Zeile lies überall im Divisor „$r - n + 1$“ statt „1“.

„ 323 Z. 4 v. u. lies $= x_0 x_1 x_2$ statt $+ x_0 x_1 x$.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Theorie und Construction der Neigungswaage. Mit besonderer Rücksicht auf möglichste Grösse und vollkommene Gleichheit der Skalentheile. Ein Handbuch für Waagenbauer. Von Dr. FRANCIS PLACE. Verlag von B. F. Voigt in Weimar. 1867.

Das vorliegende Buch enthält auf 5 Druckbogen eine sehr vollständige mathematische Theorie und Ableitung von Constructionsregeln für die im gewöhnlichen Leben und in verschiedenen Gewerbszweigen so vielfach angewendete „Zeigerwaage", für welche hier der ohne Zweifel empfehlenswerthere Name „Neigungswaage" eingeführt wird; denn nicht das Vorhandensein eines Zeigers, sondern der Umstand, dass die Gewichtsbestimmung durch Ablesung des Neigungswinkels eines pendelartig aufgehängten Waagenkörpers erfolgt, bildet die charakteristische Eigenthümlichkeit der hier gemeinten Waagengattung. Eine selbstständige Schrift über dieselbe gab es bis jetzt noch nicht und selbst der werthvolle Artikel „Waage" von v. Burg im 20. Bande der Prechtl'schen technologischen Encyclopädie enthält die Theorie der Neigungswaage und die Regeln zur Skalentheilung nur für die üblichste noch mangelhafte Form derselben, geht aber nicht näher auf etwaige Constructionsänderungen, namentlich nicht auf die Erörterung der Frage ein, durch welche Mittel der Uebelstand einer ungleichgetheilten Skala gemindert oder ganz beseitigt werden kann; und doch ist diese Frage — sie bildet den Hauptgegenstand der im Folgenden zu besprechenden Place'schen Arbeit — für den Gebrauch und noch mehr für die sichere und fabrikmässige Herstellung der Neigungswaage von augenfälliger Wichtigkeit.

Das Buch zerfällt in 17 Paragraphen, von denen der erste die erforderlichen Grundbegriffe erläutert, der zweite und dritte die Eintheilung der Waagen überhaupt (in Federwaagen, Flüssigkeitswaagen, Hebelwaagen) und die Eintheilung der Hebelwaagen insbesondere enthält; letztere sind nämlich nach Place entweder Gewichtswaagen oder Armwaagen oder

Neigungswaagen, je nachdem die Ermittelung des gesuchten Gewichts durch die Menge von Gewichtsstücken, welche zur Herbeiführung der Normallage des Waagebalkens erforderlich sind, oder durch die Länge des Hebelarms, an welchem ein Laufgewicht zu wirken hat, oder endlich durch den Neigungswinkel des Waagekörpers erfolgt; neu und zur allgemeinen Einführung zu empfehlen ist hier ausser der schon besprochenen Bezeichnung Neigungswaage der Name Armwaage für die sogenannten römischen Waagen oder Schnellwaagen. In §. 4 wird die Einrichtung einer gewöhnlichen Neigungswaage näher beschrieben, freilich — wie ein Blick auf den dazu gehörigen Holzschnitt Fig. 1 lehrt — an einem mit den stärksten Fehlern behafteten Exemplar einer Postbriefwaage; um ein beträchtliches besser, namentlich mit ausgedehnterer Skala und sicherer Befestigung derselben, sind doch schon längst die in den Spinnereien und Papierfabriken üblichen Neigungswaagen ausgeführt worden.

Der 5. Paragraph enthält eine theoretische und praktische Auseinandersetzung über die „Hauptpunkte des Hebels", den Drehpunkt, den Aufhängepunkt und den Schwerpunkt; bezüglich des Aufhängepunktes wird mit Recht auf die Nothwendigkeit der Anwendung von Prismenschneiden und Pfannen statt cylindrischer Zapfen oder in Löcher eingehängter Haken hingewiesen, auch die Möglichkeit der Anwendung von Oberschalen (Belastungsschalen mit nach oben freiem Wägungsraum) besprochen und eine hierzu gebräuchliche Anordnung der Zeigerwaage mitgetheilt; es verdient hierzu bemerkt zu werden, dass eine sehr einfache Lösung derselben constructiven Aufgabe bereits in der Briefwaage von Gerling*) vorliegt, bei welcher zwei gleichgeformte Waagekörper oberhalb der Drehungsaxe durch die gemeinsame Brücke oder Schale, unterhalb durch eine Horizontalstange verbunden sind; in Rücksicht auf den Schwerpunkt wird an derselben Stelle die schon von Burg erwähnte aber noch selten von den Mechanikern vollständig in Ausführung gebrachte vortheilhafte Anordnung der sogenannten Regulirungsgewichte gezeigt, durch welche das genaue Einspielen der Neigungswaage in ihren beiden äussersten Positionen schnell herbeigeführt werden kann; ferner wird hier die algebraische und geometrische Lösung der Aufgabe entwickelt, wie an einem drehbar aufgehängten Körper mit gegebener Schwerpunktslage ein Zulagegewicht placirt werden muss, damit der Schwerpunkt des Ganzen in die Vertikale durch den Drehpunkt rücke und das Produkt aus Gesammtgewicht und Abstand des neuen Schwerpunktes von der Drehungsaxe einen constanten Werth ergebe. Im folgenden Paragraphen (Zeiger und Skala) finden die Vorzüge kreisförmiger Skalen vor den geradlinigen nähere Besprechung und es wird durch eine graphische Darstellung (Fig. 9) in sehr anschaulicher Art der Nachweis geführt, wie die durch die vorhergehenden Betrachtungen als unvermeidlich er-

---

*) Dingler's polytechnisches Journal Band 130, S. 401.

kannte Ungleichförmigkeit der Skalentheile vermehrt und vermindert werden kann, je nachdem man der Drehungsaxe eine andere Lage gegen die durch den Aufhängepunkt und den Schwerpunkt zu denkende Gerade giebt, welche letztere der Verfasser mit dem Namen *Schwerpunktslinie* bezeichnet.

Die specielle Theorie der Neigungswaage folgt in §. 7; es wird aus der bekannten für eine beliebige Stellung des Belastungsarms gegen den übrigen Waagekörper abgeleiteten Gleichung für den Zusammenhang der hier in Frage kommenden Grössen durch eine einfache geometrische Betrachtung (Fig. 11) und durch eine Maximalwerthsbestimmung der für den Constructeur wichtige Satz abgeleitet, dass zur Erreichung *möglichst grosser Skalentheile* nothwendig die *Mittellage* (also *nicht* die *Anfangslage*) des Belastungsarmes horizontal sein muss und dass ferner die grösstmögliche *Gleichförmigkeit* der Theilung erhalten wird, wenn die Skala einen rechten Winkel umfasst, also die Anfangslage des Belastungsarmes um 45° über der Horizontalen des Drehpunktes, die Endlage um 45° unter derselben sich befindet; auf die Nothwendigkeit dieser *beiden* Bedingungen ist noch nirgends hingewiesen worden und es scheint auch, dass bis jetzt bei den Ausführungen der Neigungswaagen die gleichzeitige Berücksichtigung beider nur selten erfolgt ist.

Unter Rücksichtnahme auf diese Anforderungen wird ferner in §. 8 gezeigt, dass die Gleichung über den Zusammenhang zwischen dem Gewicht w des Waagebalkens, der Maximalbelastung G, der Länge a des Belastungsarmes und dem Schwerpunktsabstand b die sehr einfache Form

$$w \,.\, b = G \,.\, a \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

annimmt, aus welcher sich, wenn w und G, sowie die Lage des Aufhängepunktes und des Schwerpunktes gegeben sind, eine hübsche geometrische Construction zur Auffindung der Lage des Drehungspunktes ergiebt; es folgen dann zwei Verfahrungsarten zur wirklichen Construction der Skala für einen gegebenen Waagebalken und die Vorführung zweier einfacher Briefwaagenconstructionen.

Ein empfehlenswerthes Mittel zur Erweiterung der Belastungsgrenzen einer Neigungswaage, das sogenannte *Hülfsgewicht*, gelangt in §. 9 zur Besprechung. Durch Anbringung eines Gewichtes, welches der auf die Waagschale gebrachten Maximalbelastung das Gleichgewicht hält, vermag man dieselbe Waage und dieselbe Skala zur Abwägung von solchen Gegenständen zu benutzen, deren Gewicht die Grösse der Maximalbelastung überschreitet; man vermeidet durch dieses Mittel die allzu kleinen Skalentheile an den Enden der Skala und erlangt eine gleichmässigere Genauigkeit der einzelnen Ablesungen.

Die am Schlusse desselben Paragraph enthaltene Anwendung der vorher angestellten Betrachtungen auf die Untersuchung der Empfindlich-

1*

keit der gleicharmigen Balkenwaage, sowie die darauf folgende Bestimmung der Schwingungsdauer derselben bedarf einer Ergänzung und Berichtigung. Wenn nämlich die Abhängigkeit der Empfindlichkeit und der Schwingungsdauer von der als veränderlich gedachten Belastung einer gleicharmigen Balkenwaage genau angegeben werden soll, so darf die elastische Biegung des Waagebalkens nicht ausser Berücksichtigung bleiben, denn so geringfügig dieselbe auch ihrem absoluten Betrage nach bei jeder gut ausgeführten Waage sein wird: der Zusammenhang zwischen Empfindlichkeit (resp. Schwingungszeit) und Tiefe der Endaxen unter der Mittelschneide ist von der Art, dass auch die schwächsten Aenderungen der letztern bemerklich werden; es darf aus diesem Grunde nicht, wie auf Seite 29 geschieht, aus der bekannten Gleichung

$$\tan\varphi = \frac{az}{wb + 2cp}$$

der Satz gefolgert werden, dass die Empfindlichkeit von der Belastung unabhängig, also constant werde, wenn die Endaxen mit der Mittelaxe in einer Ebene liegen ($c = o$), denn es bleibt die Grösse c (Tiefe der Endaxen unter der Mittelaxe), wenn sie auch für den leeren Balken $= o$ ist, nicht für alle Belastungen Null, sondern wächst denselben proportional; es würde daher jene Gleichung, wenn man die Balkenbiegung für die Gewichtseinheit mit γ bezeichnet, die Form annehmen müssen

$$\tan\varphi = \frac{az}{wb + 2(c + p\gamma)p}$$

oder

$$\tan\varphi = \frac{az}{wb + 2pc + 2p^2\gamma},$$

woraus hervorgeht, dass die Einwirkung von γ bei wachsendem p erheblich stärker ist, als die von c und man muss, um innerhalb der gegebenen Belastungsgrenzen die Empfindlichkeit möglichst unveränderlich zu erhalten, dem Mechaniker die Regel geben, die Endaxen um soviel über die Mittelaxe zu legen, dass die Empfindlichkeitsgrösse des leeren Balkens bei einer mittleren Belastung wiederkehrt; unterhalb derselben wird dann der Ausschlag für ein bestimmtes kleines Zulagegewicht grösser sein, oberhalb derselben aber kleiner, als die mittlere Empfindlichkeit. Aus demselben Grunde ist auch die auf S. 30 entwickelte Folgerung unzulässig, dass es möglich wäre, durch passende Wahl der Dimension c die Schwingungsdauer t einer Waage für alle Belastungen constant zu erhalten, denn die für t aufgestellte Formel

$$t = \pi\sqrt{\frac{wd^2 + 2p\,(a^2 + c^2)}{g\,(wb + 2pc)}}$$

muss mit Rücksicht auf die Balkenbiegung durch folgende ersetzt werden:

$$t = \pi\sqrt{\frac{wd^2 + 2p\,(a^2 + [c + p\gamma]^2)}{g\,(wb + 2pc + 2p^2\gamma)}}$$

und wenn man nun noch versucht, die Schwingungsdauer für alle Belastungen constant zu erhalten und zwar gleich der Schwingungsdauer des leeren Balkens, also

$$\frac{d^2}{g\,b} = \frac{w\,d^2 + 2p\,(a^2 + [c + p\gamma]^2)}{g\,(w\,b + 2pc + 2p^2\gamma)}$$

setzt, so findet sich für c nicht mehr ein constanter, sondern ein die Grösse p enthaltender Ausdruck, nämlich

$$c = \frac{d^2 - 2b\gamma\,.\,p \pm \sqrt{(d^2 - 2b\gamma\,.\,p)^2 - 4b\,.\,(a^2b - \gamma d^2\,.\,p + b\gamma^2\,.\,p^2)}}{2b}.$$

Die unveränderliche Schwingungsdauer ist daher in Wahrheit unerreichbar; bei zunehmender Belastung wird dieselbe immer wachsen, wie auch die Erfahrung bestätigt*).

Unter dem sehr ansprechenden Namen Reciprokwaagen werden in §. 10 alle diejenigen Neigungswaagen der Betrachtung unterworfen, bei denen nicht unmittelbar das Gewicht eines Gegenstandes, sondern eine dem reciproken Werth desselben proportionale Grösse ablesbar sein soll, also namentlich der Waagen zur Feinheitsbestimmung der Garne (Garnwaagen); die Uebertragung der Theorie auf diese Art Waagen erweist sich als sehr einfach und es werden die früher angegebenen Constructionsregeln fast unverändert brauchbar.

Die nun folgenden Paragraphen sind denjenigen constructiven Abänderungen und Einrichtungen gewidmet, durch welche eine näherungsweise oder genaue Gleichheit der Skalentheile erreicht werden kann; es sind dies §. 11 die Hängeschiene, §. 12 die Zahnrad-Uebersetzung (für welche in der hier vorgeschlagenen Ausführungsform sich wohl der Name Zugscheiben mehr empfehlen würde), §§. 13 bis 16 die Aufhängecurven. Die nähere Besprechung dieser Einrichtungen ist ohne Zeichnungen nicht wohl möglich und es sei darüber nur bemerkt, dass der Verfasser hier mit grosser Sachkenntniss auch auf die Möglichkeit einer fabrikmässigen Herstellung seiner Waagen eingegangen ist und z. B. für die richtige Formgebung der Aufhängecurven eine Fräsmaschine entworfen hat (Fig. 45), deren Einrichtung als höchst sinnreich bezeichnet werden muss. Im Interesse der Vollständigkeit dieses Theiles muss es fast bedauert werden, dass dem Verfasser nicht auch die Neigungswaage des Maschinenfabrikanten A. C. Herrmann in Berlin bekannt gewesen ist und zur Verfügung gestanden hat, bei welcher (nach einer von demselben an den Unterzeichneten freundlich gemachten Mittheilung, deren Gebrauch an dieser Stelle ausdrücklich gestattet wurde) die Gleichheit der Skalentheile durch noch weniger ungewöhnliche Mittel, nämlich durch einen Hebel mit Radialschlitz, Gleitzapfen, Zahnstange und Getriebe, herbeigeführt wird, übrigens die Skala einen vollen Kreis umfassen kann.

---

*) Vergl. Polytechn. Centralblatt 1859, S. 1024, die Theorie der gleicharmigen Balkenwaage mit Rücksicht auf die elastische Biegung des Balkens.

Der letzte Paragraph erwähnt endlich in Kürze die Combinationen der Neigungswaage mit der Brückenwaage und bringt in Fig. 50 die Darstellung einer nach allen Regeln des Buches entworfenen Musterwaage mit Oberschale, mit Hängeschiene, also näherungsweise gleichgetheilter Skala, mit Regulirgewichten und zwei Hülfsgewichten.

Die in der ganzen Arbeit zu rühmende klare und bündige Ausdrucksweise und die grosse Anzahl gut ausgeführter Holzschnitte (10 pro Druckbogen!) werden den Gebrauch des Buches auch jedem Praktiker ermöglichen; die Verlagshandlung hat sich durch dasselbe ohne Zweifel ein grösseres Verdienst erworben, als durch die auf dem Umschlag angezeigte Wiederauflegung des Hartmann'schen Sammelwerkes über „Krämer-, Probir-, Schnell-, Heu-, Schiffs-, Brücken-, Strassen-, Zoll- oder Mauthwaagen, Tafel- oder Tisch- und Krahnwaagen, Zeiger-, Brief-, Garn-, Papier- und Federwaagen etc. etc.", das dem Place'schen Buch wohl keine starke Concurrenz machen wird.

Beim Gebrauch störende Druckfehler sind folgende: Auf Zeile 2 der Anmerkung No. 19 (S. 29) muss das erste p durch s ersetzt werden und auf Zeile 8 Seite 31 muss g statt p stehen.

Dresden, am 22. October 1866. Dr. E. Hartig.

Rheinische Schulprogramme vom Herbste 1866.

Von einer wissenschaftlichen Abhandlung, die in einem Schulprogramme abgedruckt ist, kann man nicht so viel verlangen, als von einem andern in Zeitschriften niedergelegten Aufsatze. Denn einestheils ist die Zeit der Lehrer sehr beschränkt — viele geben 20—24 Unterrichtsstunden wöchentlich ausser den zahlreichen Correcturen und den Privatstunden, welche sie zu ertheilen gezwungen sind, um existiren zu können — und anderntheils ist der Leserkreis der Programme hauptsächlich wieder auf die Schulmänner beschränkt, denen eine auf den praktischen Unterricht bezügliche oder in ihren Resultaten im Unterricht anwendbare Abhandlung meistens lieber ist, als eine die höhere Wissenschaft behandelnde. Da gleichzeitig alle Schüler das Programm in die Hand bekommen, so wird sehr häufig die Anforderung gestellt, dass mindestens ein guter Ober-Primaner den Inhalt zu begreifen vermag. Der Einfluss einer solchen Anforderung auf die Programme ist klar.

In diesem Herbste (1866) enthält nur ein Programm von den rheinischen Gymnasien und Realschulen eine mathematische Abhandlung, nämlich das der städtischen Realschule in Crefeld. Oberlehrer Mink (die Anstalt besitzt drei Oberlehrer, die in Mathematik unterrichten) behandelt die Centralen der einem Dreieck oder einem Viereck in- und umschriebenen *Kreise.* Im ersten Abschnitte behandelt er die Sätze über die Beziehungen,

welche zwischen den Projectionen der Centrale auf die drei (resp. vier) Seiten des Drei- (resp. Vier-) Ecks statthaben. Der zweite Abschnitt zeigt auf geometrischem Wege die Grösse der Centrale bei den Dreieckskreisen und folgert einige sehr interessante — soviel dem Referenten bekannt — neue Sätze über die einem Kreis umschriebenen und einem andern eingeschriebenen Dreiecke. Im vierten Abschnitt sind diese Sätze auf die Vierecke erweitert; der Gleichheit in der Behandlung wegen hätten wir gewünscht, dass diese Sätze ebenfalls auf rein geometrischem, oder die vorhergehenden auch auf trigonometrischem Wege abgeleitet worden wären. Die ganze Abhandlung ist sehr fleissig gearbeitet und giebt, wie bereits bemerkt, interessante Resultate; sie ist dabei sehr klar. Einzelne Ausdrücke hätten wohl conciser sein können, wie z. B. auf Seite 5 Satz *c*), der jedenfalls besser so gelautet hätte: „In jedem Dreiecke ist die Summe der Projectionen der Centrale des ein- und umschriebenen Kreises auf die grösste und kleinste Dreieckseite gleich der Projection auf die mittlere.“ Ebenso hätten die mit *e*) und *f*) bezeichneten Sätze eine bessere Form annehmen können. Namentlich Satz *i* (p. 11) hätte auch so ausgedrückt werden können: „Jedem Dreiecke, das zwei festen Kreisen um- und eingeschrieben ist, correspondirt ein ebensolches Dreieck der Art, dass die Verbindungslinie der gegenüberliegenden Ecken durch den Punkt der Centrale geht, welche in Bezug auf beide Kreise dieselbe Polare hat, und dass die gegenüberliegenden Seiten sich auf dieser gemeinsamen Polaren schneiden.“

Die Arbeit gewinnt noch dadurch an Werth, dass Aufgaben, die mit Anwendung der Sätze lösbar sind, sich eingeflochten finden.

Das Programm des Düsseldorfer Gymnasiums enthält „Experimental-Untersuchungen über die Tonschwingungen durch die Wärme“ von Prof. Dr. Schneider. Es ist eine sehr fleissige Zusammenstellung der Versuche über diese bekannten akustischen Erscheinungen und ist vorzüglich auf die richtige Erklärung derselben durch Faraday Gewicht gelegt. Ausführlich sind die Versuche behandelt über die Töne, die man bei senkrechtem Anstosse des Wacklers erhält; der Verfasser, der sich bereits länger mit diesem Gegenstande beschäftigt, giebt hierüber eine Erklärung, die der Faraday'schen über die gewöhnlichen Töne des Trevelyan-Instrumentes durch Erwärmen ausspricht. Die Worte des Verfassers (p. 8) könnten jedoch in ihrer Form leicht zu Missdeutungen Veranlassung geben, und wäre es zu wünschen, er hätte dies präciser gefasst. Wer sich mit den genannten Erscheinungen beschäftigen will, wird sich vermittelst dieses Programmes sehr gut vollständig über den Stand der hierhingehörigen Untersuchungen Aufschluss verschaffen können.

Oberlehrer Dr. W. Krumme in Duisburg hat als Abhandlung in dem Programme des dortigen Gymnasiums (verbunden mit Realschule erster Ordnung) drucken lassen: „Die Brechung des Lichtes an Kugelflächen“. Nach dem Titel ist es eine „Probe aus einem demnächst erscheinenden Lehr-

buche der Physik für Schulen". Eine Besprechung dieser Abhandlung wollen wir hier nicht vorbringen, wir wollen erst das ganze in Aussicht stehende Werk abwarten. Sehen wir von einer mehr culturhistorischen Abhandlung des Oberlehrers Dr. Roudolf über die astronomischen und kosmischen Anschauungen der älteren Zeit bis auf Aristoteles ab, so ist von weiteren Programm-Aufsätzen mathematischen oder physicalischen Inhaltes nicht zu berichten. D. D.

Bibliographie

vom 15. October bis 31. December 1866.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Classe. 1866. II, III. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Mathematische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1865. Berlin. Dümmler's Verlagsbuchhandlung. 16 Ngr.

Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1865. Berlin. Dümmler's Verlagsbuchhandlung. 4 Thlr. 7 Ngr.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. 1866. 1. Bd. 4. Heft und II. Bd. 1. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Bericht, amtlicher, über die 40. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Hannover im Septbr. 1865. Herausgegeben von C. Krause, K. Karmarsch, W. Krause und K. Kraut. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung. 2 Thlr.

Peters, C. F. W., General-Register der Bände XLI—LX der astronomischen Nachrichten. Hamburg, Mauke's Söhne. 6 Thlr.

Reine Mathematik.

SCHLÖMILCH, O., Compendium der höheren Analysis, 2. Aufl. 2. Bd. 2. (letzte) Lfg. Braunschweig, Vieweg u. Sohn. 1⅙ Thlr.

CLEBSCH, A., und P. GORDAN, Theorie der Abel'schen Functionen. Leipzig, Teubner. 2 Thlr. 12 Ngr.

NATANI, L., Die höhere Analysis. In 4 Abhandlungen. Mit Berücksichtigung der Theorie der complexen Grössen und anderer neuen Untersuchungen. Berlin, Wiegandt & Hampel. 5 Thlr.

MAYER, A., Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig, Teubner. ⅔ Thlr.

HESSE, O., Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. Leipzig, Teubner. 16 Ngr.

ZMURKO, L., Ueber die Flächen zweiter Ordnung mit Zugrundelegung eines mit beliebigen Axenwinkeln versehenen Coordinatensystems. Wien, Gerold's Sohn. ⅔ Thlr.

DITTMANN, C., Coordinaten- und Tangenten-Tafeln nebst Anleitung zur Erleichterung und Abkürzung trigonomischer und polygonometrischer Winkel- und Linien-Berechnungen ohne Logarithmen. 2. Ausg. Würzburg, Stahel-sche Buchhandlung. ⅔ Thlr.

CLAUSIUS, R., Die Potentialfunction und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik. 2. Aufl. Leipzig. J. A. Barth. 24 Ngr.

FÉAUX, B., Sammlung von Rechnungs-Aufgaben aus Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Trigonometrie etc. Essen, Bädeker. 24 Ngr.

LUTTER, F., Fünfstellige logarithmisch-goniometrische Tafeln. Wien, Hartleben's Verlag. ⅓ Thlr.

KIESSLER, R., Grundriss der elementaren Mathematik. 1. Heft. Planimetrie. Stendal, Franzen und Grosse. ⅙ Thlr.

—— —— Dasselbe. 2. Heft. Arithmetik und Algebra. Stendal, Franzen und Grosse. ⅙ Thlr.

HEIS, E., und TH. J. ESCHWEILER, Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. 1. Thl. Planimetrie. 4. Aufl. Cöln, Du Mont-Schauberg'sche Buchhandlung. ⅔ Thlr.

BOYMANM, J. R., Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen. 1. Thl. Geometrie der Ebene. 4. Aufl. Köln und Neuss, Schwann'sche Verlagshandlung. ⅔ Thlr.

KROHN, F., Lehrbuch der Geometrie, zuvörderst bearbeitet für den Gebrauch in Navigations-Vorschulen und zum Schul-

und Selbst-Unterricht. 2. Aufl. Berlin, Nauck'sche Buchhandlung. 12 Ngr.

Rummer, F., Lehrbuch der Trigonometrie. Die ebene und sphär. Trigonometrie und die Polygonometrie, mit einer Sammlung von Aufgaben. 2. Aufl. Heidelberg, J. C. B. Mohr. 24 Ngr.

Gützlaff, K., Ueber das Auflösen trigonometrischer Aufgaben. Marienwerder, Berlin, Calvary & Co. ⅙ Thlr.

Riecke, Mathematische Unterhaltungen. 1. Heft. Stuttgart, Aue. 24 Ngr.

Weissenborn, H., Lebensbeschreibung des Ehrenfr. Walther von Tschirnhaus auf Kiesslingswalde und Würdigung seiner Verdienste, mit einem Vorwort über J. A. Grunert als Preisrichter. Eisenach, Baerecke. ⅔ Thlr.

Nicomachi Geraseni Pythagorei *introductionis arithmeticae libri II. Recensuit* R. Hoche. Leipzig, Teubner. 18 Ngr.

Angewandte Mathematik.

Tilscher, F., System der technisch-malerischen Perspective. Für technische Lehranstalten, Kunstakademien und zum Selbstunterrichte. 2. und 3. Abth. Mit einem Atlas. Prag, Tempsky. 3⅓ Thlr.

Delabar, G., Anleitung zum Linearzeichnen, mit besonderer Berücksichtigung des gewerblichen und technischen Zeichnens etc. 2. Theil. Das projective Zeichnen oder die darstellende Geometrie. 1. Abth. Die Elemente der darstellenden Geometrie. Freiburg in Br., Herder'sche Buchhandlung. 18 Ngr.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Hamburg, B. S. Berendsohn. 1 Thlr. 6 Ngr.

Schreiber, O., Theorie der Projectionsmethode der hannoverschen Landesvermessung. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung. 1⅓ Thlr.

Bauernfeind, C. M., Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Constitution der Atmosphäre. 2. Abschn. München, Lit.-artist. Anstalt. 14 Ngr.

Lippich, F., Ueber ein neues von de Saint-Vénant ausgesprochenes Theorem der Mechanik. Wien, Gerold's Sohn. 2 Ngr.

Otto, J. C. F., Bemerkungen über den Einfluss der Umdrehung der Artillerie-Geschosse auf ihre Bahn. 1. Forts. 2. Ausg. *Neisse*, Graveur. 4½ Thlr.

OTTO, J. C. F., Dasselbe, 2. Fortsetzung. 1. Abth. A. u. d. J. Abhandlung über die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung sowohl der festen elastischen Körper, als auch der Fluida. Von POISSON. 2. Ausg. Neisse, Graveur. 3 Thlr.

BAUSCHINGER, J., Die Schule der Mechanik. Für den Selbstunterricht besonders des practischen Mechanikers und Handwerkers, sowie für den Gebrauch an technischen Lehranstalten gemeinfasslich dargestellt. 2. Aufl. München, Oldenbourg. 1⅓ Thlr.; in engl. Einb. 1⅚ Thlr.

GREBENAU, H., Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen. Nach den auf Kosten der Vereinigten Staaten von Nordamerika vorgenommenen Untersuchungen und dem Bericht Humphrey's und Abbot's über die physikalischen und hydraulischen Verhältnisse des Mississippi-Stromes etc. Mit Atlas. München, Lindauer'sche Buchhandlung. 9⅓ Thlr.

WEILER, A., Ueber das Problem der drei Körper im Allgemeinen und ins Besondere in seiner Anwendung auf die Theorie des Mondes. Leipzig, Engelmann. 1⅔ Thlr.

LITTROW, K. v., Physische Zusammenkünfte von Asteroiden im Jahre 1866. Wien, Gerold's Sohn. 1½ Ngr.

Rechtwinklige und Polarcoordinaten des Jupiter (nach BOUVARD's Tafeln), sowie Componenten der störenden Kräfte, mit denen Jupiter auf die Sonne wirkt. Leipzig, Engelmann. ⅚ Thlr.

Ingenieurs, des, Taschenbuch. Herausg. von dem Verein „Hütte". 7. Aufl. 1867. Berlin, Ernst und Korn.
1⅔ Thlr., in engl. Einb. 2 Thlr.

DWELSHAUVERS, V., *Manuel de mécanique appliquée. Première Partie. Cinématique. In 8., III — 218 p. avec planches. Paris et Liége, Baudry.* 5 *fr.*

Physik.

WÜLLNER, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Ausg. 13. und 14. Lfg. Leipzig, Teubner. à ⅔ Thlr.

HOFER, J., Lehrbuch der Experimentalphysik mit besonderer Rücksicht auf Chemie und die neuesten Entdeckungen. 2. Bd. 2. Aufl. Wien, Sallmayer & Co. 1 Thlr. 4 Ngr.

SCHNEIDER, J., Experimental-Untersuchungen über Tonschwingungen durch Wärme. Düsseldorf, Berlin, Calvary & Co. 6 Ngr.

LANG, V. v., Orientirung der Wärmeleitungsfähigkeit einaxiger Krystalle. Wien, Gerold's Sohn. 3 Ngr.

KNOBLAUCH, Ueber den Durchgang der Wärme- und Lichtstrahlen durch geneigte diathermane und durchsichtige Platten. Halle, Schmidt's Verlagsbuchhandlung. 6 Ngr.

RIESS, P. Th., Abhandlungen zu der Lehre von der Reibungselectricität. Berlin, A. Hirschwald. 2⅝ Thlr.

FROMMHOLD, C., Der constante galvanische Strom modificirbar in seinem Intensitäts- und Quantitätswerth. Nachtrag zur Electrotherapie. Pesth, Heckenast's Verlags-Comptoir. 16 Ngr.

BRASACK, F., Das Luftspectrum. Eine prismatische Untersuchung des zwischen Platina-Electroden überschlagenden electrischen Funkens. Halle, Schmidt's Verlagsbuchhandlung. 1 Thlr.

MEIBAUER, R. O., Ueber die physische Beschaffenheit der Sonne. Berlin, Lüderitz'sche Verlagshandlung. ⅓ Thlr.

HARTING, P., Das Mikroskop. Theorie, Gebrauch, Geschichte und gegenwärtiger Zustand desselben. Herausgegeben von F. W. THEILE. 3. Bd. Geschichte und gegenwärtiger Zustand des Mikroskopes. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 2 Thlr.

BRUHNS, C., Meteorologische Beobachtungen, angestellt auf der Leipziger Universitäts-Sternwarte in den Jahren 1860 bis 1865. Leipzig, Hinrichs'sche Buchh. Verlags-Cto. 2⅓ Thlr.

JULLIEN, C. E., *Les affinités capillaires et les phénomènes de la trempe mis en présence. In-12., 107 p. Paris, Baudry.*

Fehler in Schlömilch's Logarithmen.

In der Tafel der Ellipsenquadranten ist das auf S. 151 für $b = 0{,}60$ angegebene

$$E = 1{,}2763\underline{2}$$

umzuändern in

$$E = 1{,}2763\underline{5}$$

Literaturzeitung.

Recensionen.

Ad. Quetelet, **Sciences mathématiques et physiques chez les Belges au commencement du XIXe siècle.** Bruxelles 1866. 8°. 744 Seiten.

Im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift (Literaturzeitung S. 29—33) haben wir über eine Geschichte der Mathematik und Physik bei den Belgiern berichtet, welche aus der Feder des gelehrten Sekretärs der Brüsseler Akademie stammte. Das heute zu besprechende Werk desselben Verfassers ist als Fortsetzung jenes Buches zu betrachten, oder sagen wir vielmehr mit dem Verfasser selbst: als Sammlung von Materialien für eine späteren Zeiten aufgesparte Fortsetzung. Die Mitwelt kann kaum ihre eigene politische Geschichte schreiben, viel weniger ihre wissenschaftliche. Erst nach einer Reihe von Jahren zeigt es sich endgültig, was man als vollendete Thatsachen, was als wahre Entdeckungen und Erfindungen zu betrachten habe. Besonders hervorragende politische und wissenschaftliche Ereignisse geben sich freilich bald auch dem mitten dazwischen Stehenden als solche zu erkennen; aber gerade diese hervorragenden Ereignisse sind, wie es das gebrauchte Eigenschaftswort ankündigt, nur selten. Das Mittelmässige, aus welchem sie hervorragen, überwiegt für den Augenblick, und in der Vogelschau der Geschichte bleiben doch auch neben den hochaufstrebenden Gipfeln noch solche Erhöhungen merkwürdig, welche gleichsam vulkanischer Natur ihre bewegende Kraft dadurch an den Tag legten, dass sie spätere Hebungen veranlassten. So kann und wird der Geschichtsschreiber vergangener Jahrhunderte sich kürzer fassen, als der Erzähler der Zeitereignisse, und so finden wir es nur natürlich, dass derselbe Verfasser um drei Fünftel mehr Raum brauchte, um das gegenwärtige Jahrhundert zu schildern, als er für die übersichtliche Darstellung aller früheren Jahrhunderte verwendet hatte.

Das heute uns vorliegende Werk gehört unbedingt der sogenannten Memoirenliteratur an. Es sind Denkwürdigkeiten aus dem eigenen reichen Leben des trefflichen Verfassers. Er erzählt in liebenswürdiger, uns an-

ziehender Darstellung Biographisches und Wissenschaftliches von Männern, zu welchen er meistens selbst in engen freundschaftlichen Beziehungen stand und deren Auftreten in dem belgischen Werke Herr Quetelet dadurch näher zu begründen sucht, dass die betreffenden Männer theils persönlich, theils wenigstens wissenschaftlich seinem Vaterlande nahe standen, dass sie auf dessen geistige Entwickelung eine kräftige Einwirkung ausübten. Wir wollen mit Herrn Quetelet über diese Entschuldigung nicht rechten, wenn wir auch meinen, es bedürfe keinen Vorwand für die Veröffentlichung noch ungedruckter Notizen über Männer, die der ganzen Erde mehr als irgend einem besonderen Lande angehören. Wir wollen nur ganz kurz die Eintheilung angeben, welche der Verfasser eingehalten hat.

Ein erstes Buch (S. 1—96) knüpft unmittelbar an den lezten Abschnitt des obengenannten, im vorigen Jahrgange besprochenen Werkes an. Die Gemeinsamkeit der Forschungen von Vielen zu einem Zwecke wird in ein helleres Licht gesetzt, welche gegenwärtig nothwendig geworden und in Wirklichkeit auch an die Stelle der früher häufigeren Universalität des Einzelnen trat. Arbeitstheilung und Arbeitsvereinigung sind die Stichwörter der Neuzeit, welche auch im Gebiete der Wissenschaften sich vernehmen lassen. Die Witterungskunde, die Lehre von dem Erdmagnetismus, von der Luftelektricität, von den Sternschnuppen, die Kenntniss der Meeresströmungen, der genauen Gesetze von Ebbe und Fluth, die statistischen Gesetze des menschlichen Lebens bis zur moralischen Statistik sich erhebend, das etwa sind die Aufgaben, welche in der genannten Weise einer Lösung zugeführt werden. Mit Recht wird auf den internationalen Congress zur Feststellung von Beobachtungen im Interesse der Schifffahrt, der 1853 in Brüssel stattfand, mit Recht auf den ebendaselbst wenige Monate später ins Leben gerufenen statistischen Congress hingewiesen. Diese beiden Versammlungen haben einen entschieden positiven Zweck beabsichtigt und erreicht, sich dadurch beinahe in Gegensatz zu anderen wissenschaftlichen Versammlungen stellend, deren mehr imaginäre Resultate in dem persönlichen freundschaftlichen Verkehr von Gelehrten derselben Richtung sich erkennen lassen, ohne dass unmittelbare praktische Ziele auch nur vorgesteckt wären.

Das zweite Buch (S. 97—316) giebt in vierzehn Kapiteln, wie man die einzelnen Skizzen nennen dürfte, die Bilder von ebenso vielen belgischen Gelehrten, ihren Lebensschicksalen, ihren wissenschaftlichen Leistungen, letztere allerdings meistens nur durch Anführung der Quellen, wo sie zu finden sind. Wir nennen von diesen Männern in Kürze den durch Arbeiten über Horticultur weithin bekannten van Mons, den Meteorologen Crahay, Simons, den Erbauer der wichtigsten belgischen Eisenbahnlinien, den Geologen Cauchy, weitläufig verwandt mit Aug. Cauchy, die Botaniker und Mineralogen Kickx, Vater und Sohn, den Geognosten Galeotti, *Belpaire*, den Historiker der Küstenveränderungen bei Antwerpen und

Ostende, Mareska, den Verfasser des von Berzelius hochgeschätzten Aufsatzes über die Verminderung der Affinitäten durch niedrige Temperatur, den Mitarbeiter an der belgischen Pharmacopoe. Für uns haben die fünf übrigen in diesem Buche besprochenen Gelehrten ein grösseres Interesse, weil sie specieller zu unseren Fachgenossen zählen. Zuerst De Nieuport (1746—1827), der Mann zweier Jahrhunderte, mehr noch der Vergangenheit, als der Gegenwart angehörend. Dieser Zwischenstellung entsprechend, hat der Verfasser über die mathematischen Arbeiten von De Nieuport schon in dem früheren Werke von 1864 berichtet und giebt uns heute mehr Nachträge, giebt uns ganz besonders die Darstellung der Persönlichkeit des alten Edelmannes, welche stolz und achtunggebietend in eine Neuzeit hereinschaut, mit welcher sie im Ganzen nicht sympathisiren kann, deren Ehrfurcht und Liebe sie gleichwohl durch freundliches Entgegenkommen gegen jeden Einzelnen erwirbt. In solchen Zeichnungen erweist sich Herr Quetelet als Meister, und wie man den Gemälden der Venetianischen Schule Naturtreue zusprechen darf, ohne die gemalten Persönlichkeiten gekannt zu haben, so ist an der photographischen Aehnlichkeit der von Herrn Quetelet entworfenen Charakterbilder nicht zu zweifeln, auch ohne eigene Kenntniss der Modelle. Tritt doch, wie als Gegenstück zu dem greisen Royalisten, ebenso lebensfrisch und wahr der revolutionäre Artillerieoffizier Dandelin (1794—1847) uns entgegen, stets bereit, die Feder mit dem Degen zu vertauschen und für die von ihm für gerecht erachtete Sache zu kämpfen. Von seinen mathematischen Verdiensten um die analytische Geometrie lernen wir besonders die Abhandlung über die Fokalen kennen, welche an Quetelet's Untersuchungen über den gleichen Gegenstand sich anschliesst und mit denselben jene von Th. Olivier sogenannten belgischen Theoreme bildet, welche ein Muster projectivischer Beweisführung darstellen. Als dritter erscheint Verhulst (1804—1849), ein geistvoller, vielseitiger Sohn des Glückes. Schon in seinem 20. Jahre doppelt gekrönter Preisträger, in Leyden für eine Abhandlung über Maxima und Minima, in Gent für eine Abhandlung über Variationsrechnung, im 21. Jahre Doctor der Philosophie, im 25. öffentlicher Lehrer der Mathematik am Brüsseler Museum, wurde er nur durch seine schwächliche Gesundheit daran erinnert, dass auch für ihn Grenzen des Erreichbaren vorhanden waren. Das Jahr 1830 fand ihn in Italien, wo er den originellen Plan ausführte, dem Papste einen Entwurf von in Rom einzuführenden Reformen zu überreichen, was ihm bald den Aufenthalt in der heiligen Stadt unmöglich machte. Wir sehen ihn dann 1832 in Brüssel mit statistischen Arbeiten über Bevölkerung beschäftigt, welche er auf Quetelet's Anregung unternommen hatte. Seit 1834 ist er Professor an der Kriegsschule und verfasst als solcher 1841 seine Schrift über die elliptischen Functionen, die erste einigermassen elementar gehaltene Darstellung dieser Theorien, welche damals bereits anfingen, in weitere Kreise mathematischen Unterrichtes einzudringen. In demselben Jahre wurde Verhulst

Correspondent, dann Mitglied der Brüsseler Akademie. Seine letzten wichtigeren Arbeiten waren die beiden Abhandlungen über die Gesetze der Bevölkerungszunahme, welche er 1844 und 1846 der Akademie einreichte. Er berücksichtigte in beiden die einer ins Ungemessene sich erstreckenden Bevölkerungszunahme entgegenstehenden Hindernisse und berechnete daraus das Maximum der Bevölkerung, welches nach seiner Ansicht in Belgien erreicht werden könne, auf beiläufig 9⅓ Millionen Einwohner. Pagani (1796—1855), der italienische Flüchtling, welcher, weniger weil er selbst an politischen Umtrieben sich betheiligt hatte, als weil er von seinen Freunden sich in der Stunde der Gefahr nicht trennen wollte, Familie und Vaterland verlassen hatte, fand seit 1822 in Belgien eine neue Heimath. Hier war es denn auch, wo seine sämmtlichen Untersuchungen zur analytischen Mechanik entstanden und erschienen, welche uns der Reihe nach angeführt werden. Der fünfte Gelehrte unseres Faches ist Garnier (1766—1840), dessen Lebensschicksale theilweise mit seinen eigenen Worten erzählt werden. Wir lernen einen unermüdlichen Schriftsteller in ihm kennen, welchen jedoch das Schicksal nur selten begünstigte. Häufig zurückgesetzt, weil er das Unglück hatte, bedeutenderen Mitbestrebern zu begegnen, musste er auch in seinen letzten Lebensjahren diese traurige Erfahrung noch einmal machen, und selbst durch die freundschaftliche Skizze Quetelet's dringt die Ueberzeugung durch, dass Garnier nicht ganz Unrecht geschah, denn ein Lehrer scheint er eben doch nicht gewesen zu sein.

Das dritte Buch (S. 317—558) dürfen wir mit wenigen Worten berühren. Es beschäftigt sich mit Männern der Kunst, der Literatur, der Politik, deren Verdienste wie deren Thätigkeit dem Zwecke dieser Zeitschrift abseits liegen.

Das vierte Buch endlich (S. 559—744) ist jenen Männern gewidmet, welche, wie wir oben sagten, der ganzen Erde als Vaterland angehören. Wir begegnen hier den Namen Arago (26. Febr. 1786 — 2. Oct. 1853), Alex. v. Humboldt (14. Sept. 1769—1. Mai 1859), Bouvard (27. Juni 1767 — 7. Juni 1843), Schumacher (3. Sept. 1780 — 28. Dec. 1850), Gauss (30. April 1777 bis 23. Febr. 1855), Goethe (28. April 1749 — 22. März 1832) und manchen anderen kaum minder berühmten. Sie alle treten uns in ihren persönlichen Beziehungen zu dem ihnen befreundeten Verfasser entgegen, und wie kein Biograph irgend Eines von ihnen das Recht hat, künftig diese Notizen zu vernachlässigen, so werden sie in hoffentlich noch weit entfernter Zeit dazu dienen, eine Lebensgeschichte von Herrn Quetelet selbst aus den Urtheilen seiner berühmtesten Zeitgenossen zusammenzustellen. Referent will nur gleichsam aufs Gerathewohl einige von den spannenden Anecdoten wiedererzählen, welche in diesem reichen Buche zuerst veröffentlicht sind; vielleicht dürften folgende Illustrationen zu dem Charakter Alexanders von Humboldt den beabsichtigten Zweck erreichen, die Schreibweise des Verfassers an dem Inhalte nach besonders interessanten Stellen kennen zu lernen:

„Arago hatte die gute oder schlimme Gewohnheit, seine Zuhörer zu schriftlicher Mittheilung etwaiger Zweifel aufzufordern, deren Beantwortung er in der folgenden Vorlesung zusagte. Humboldt war gewöhnlich unter den Zuhörern. Eines Tages nun, als Arago von dem Charakter der verschiedenen Klimate gesprochen hatte und unser Belgien nicht gerade mit Lob bedachte, fiel es seinem Freunde ein, brieflich diesen Behauptungen zu begegnen, aber freilich mit Beobachtung der nöthigen Vorsicht, um nicht erkannt zu werden. Ich bin aus Belgien, schrieb er, und kann Ihnen die Versicherung geben, dass Sie mein Vaterland verleumdet haben. Wären Sie besser mit den in Brüssel angestellten meteorologischen Beobachtungen bekannt, so würden Sie sich nicht in der Weise ausdrücken, wie Sie es gethan haben. Das belgische Klima ist so gut, wie das von Paris. Ihr abscheulicher Freund, der elende Preusse, macht Ihnen nur solche Albernheiten vor. .... Humboldt lachte von Herzen, während er mir den Inhalt seines Briefes in Erinnerung brachte. Die folgende Vorlesung eröffnete Arago sichtlich verstimmt, dann kam der Brief an die Reihe. Meine Herren, sagte er, ich war weit entfernt, einen so unverschämten Brief zu erwarten, wie der, den ich erhalten habe, unwürdige Angriffe gegen meinen besten Freund, gegen den bedeutendsten Mann unserer ganzen Zeit! ... Humboldt, auf welchen die Blicke des Lehrers wie der Zuhörer sich gerichtet hatten, bemühte sich, ihn durch Zeichen zum Schweigen aufzufordern; aber Arago, der seine Absicht falsch auslegte, spann den Gegenstand nur noch weiter aus, und der berühmte Berliner Gelehrte, welcher vielleicht nur hatte zeigen wollen, zu welchem Missbrauche die übermässige Gefälligkeit seines Freundes Veranlassung geben könne, fing an zu fürchten, dass er selbst das Maass überschritten habe.“ (S. 587.)

„Humboldt's Unterhaltung war lebhaft und von einer ätzenden Schärfe, welche mitunter bedenkliche Verhältnisse annahm; sie beängstigte solche Personen, die ihn nur wenig kannten. Eines Abends in einer Gesellschaft erheiterte er alle Anwesenden durch seine witzigen Reden, insbesondere über solche Personen, welche eben das Zimmer verlassen hatten. Eine junge elegante Dame machte sich dadurch bemerklich, dass sie erst die Absicht kund gab, sich zurückzuziehen, dann blieb und ungeduldig auf dem Stuhle hin- und herrückte. Die Hausfrau erkundigte sich nach dem Grunde dieser Aufregung. Ach, rief die Dame, vor dem Herrn gehe ich nicht weg; ich will nicht, dass er über mich soll sprechen können! Arago erzählte mir diese Anecdote und bemerkte lachend, dass er seinen Freund oftmals mit der Erinnerung daran geneckt habe. Uebrigens, fügte er hinzu, wenn der einmal im Zuge ist, verschont er sich so wenig, wie Andere. Es ist überflüssig, hinzuzusetzen, dass seine Witzworte Nichts weniger als boshaft waren.“

Unsere Leser werden wohl aus diesen kleinen Proben schon den Wunsch schöpfen, sich selbst näher mit dem Werke des Herrn Quetelet bekannt zu machen.

Cantor.

System der technisch-malerischen Perspective. Von FR. TILSCHER, ordentlicher Professor der descriptiven Geometrie am polytechnischen Institute zu Prag. Mit einem Atlas von 18 Figurentafeln. Prag, Tempsky. 3⅓ Thlr.

Die Perspective lässt sich bekanntlich auf zweierlei Weise behandeln. Man geht nämlich entweder vom Grundriss und Aufriss des abzubildenden Objectes aus, construirt die perspectivischen Projectionen dieser beiden Risse und leitet aus den erhaltenen Projectionen das perspectivische Bild des Objectes ab, oder man hält gleich anfangs die perspectivische Projection unabhängig von den orthogonalen Projectionen und bestimmt jedes Gebild durch seine eigenen perspectivischen Elemente (z. B. eine Ebene durch ihre Fluchtlinie). Die letztere Behandlungsweise angeregt zu haben, ist ein Verdienst von Professor Fiedler (vergl. Jahrg. V. dieser Zeitschrift, S. 79 der Literaturzeitung), und sowie die gewöhnliche Projectionslehre, die sich nur mit begrenzten Objecten beschäftigt (die früher sogenannte Reisskunst) durch Monge's descriptive Geometrie ihre höhere wissenschaftliche Ausbildung erlangt hat, so dürfte auch die ältere Perspective in Fiedler's Theorie der Centralprojection ihre wissenschaftliche Ergänzung gefunden haben. Es war zu erwarten, dass der Ausbau der Theorie eine vortheilhafte Rückwirkung auf das Technische der Perspective ausüben würde, und diese Rückwirkung ist es nun, welche in dem oben genannten Werke zu Tage kommt. Dasselbe enthält nämlich der Hauptsache nach die praktische Anwendung und Ausnutzung der Fiedler'schen Theorie, welche übrigens nicht schlechthin vorausgesetzt, sondern, soweit es nöthig war, in das Buch selber aufgenommen ist. Leider muss Referent sich auf diese allgemeine Charakteristik des Werkes beschränken, weil die Details ohne Figuren meistens unverständlich bleiben würden; es sei nur bemerkt, dass der Inhalt ein sehr reicher und vielfach interessanter ist. So haben z. B. die Untersuchungen über die Transformationen des Projectionscentrums, der Projectionsebene und der Gebilde, über den Zusammenhang zwischen der Axonometrie und der Perspective, über Beleuchtung und Spiegelung etc. den Referenten sehr angesprochen. Die Darstellung ist durchaus klar, dürfte aber, wenigstens norddeutscher Sitte gegenüber, etwas zu breit gehalten sein; aus den Figuren, die bei einem derartigen Werke eine wesentliche Rolle spielen, ersieht man die graphische Gewandtheit des Verfassers.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 1. März 1867.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1866. 2. Band. 2. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Archiv der Mathematik und Physik. Herausgegeben von J. A. Grunert. 46. Theil. 1. Heft. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Redigirt von Heis. 10. Jahrg. 1867. Nr. 1. Halle, Schmidt. pro. compl. 3 Thlr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1869 mit Ephemeriden der Planeten (1) bis (90) für 1867. Herausgegeben von W. Förster, unter Mitwirkung von Powalky. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Reine Mathematik.

Gerlach, H., Lehrbuch der Mathematik. 1. Theil. Erster Cursus der Arithmetik. 2. Aufl. Dessau, Aue. $\frac{1}{3}$ Thlr.

—— 4. Theil. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 2. Aufl. Ebendaselbst. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Temme, A. J., Planimetrische Aufgaben für Gymnasiasten. Münster, Aschendorff. 6 Ngr.

Kiessler, R., Grundriss der elementaren Mathematik. 3. Heft. Trigonometrie und Stereometrie. Stendal, Franzen und Grosse. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Baltzer, R., Die Elemente der Mathematik. 2. Bd. Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie. 2. Aufl. Leipzig, Hirzel. 2 Thlr.

Krippendorf, H., Grundriss der ebenen Trigonometrie. Aarau, Sauerländer. 24 Ngr.

Boole, G., Die Grundlehren der endlichen Differenzen- und Summenrechnung. Deutsch von Schnuse. Braunschweig, Leibrock. $1\frac{3}{4}$ Thlr.

Meyer, J. Th., *De transformatione functionum ultraellipticarum. Dissert. inaug. mathem.* Königsberg, Schubert und Seidel. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Salmon, G., *Lessons introductory in the modern higher algebra. 2 edit. London, Simpkin.* 10 *sh.*

Airy, G. B., *An elementary treatise on partial differential equations. London, Macmillan.* 5 *sh.* 6 *d.*

Jonquières, E. de, *Recherches sur les séries, ou système de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque; suivies d'une réponse à quelques critiques de M. Chasles. Paris, Gauthiers-Villars.*

Cremona, L., *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. Milano, Zanetti.* 6 *fr.*

Angewandte Mathematik.

Zöllner, C. F., Ueber die universelle Bedeutung der mechanischen Principien. Akadem. Antrittsvorlesung. Leipzig, Engelmann. ¼ Thlr.

Largiader, J., Praktische Geometrie. Anleitung zum Feldmessen, Höhenmessen und Nivelliren. 2. Aufl. Zürich, Schulthess.

Ditscheiner, L., Theorie und Beugungserscheinungen in doppelt brechenden Medien. (Akademie.) Wien, Gerold. 8 Ngr.

Astronomische Beobachtungen auf der königl. Universitätssternwarte in Königsberg. Herausgegeben von E. Luther. 35. Abthlg. Leipzig, Rein. 4 Thlr.

Boyma, J., *The elements of molecular mechanics. London, Macmillan.* 10 *sh.* 6 *d.*

Colnet d'Huart, *Leçons sur la théorie mathématique du mouvement de translation et du mouvement de rotation des atomes.* 1 *Partie.* 1 *Fasc.* Luxemburg, Brück. 21 Ngr.

Combes, Ch., *Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur et de ses applications principales. Paris, Bouchard-Huzard.* 6 *fr.*

Flammarion, C., *Etudes et lectures sur l'astronomie. T. I. Paris, Gauthier-Villars.* 2½ *fr.*

Physik.

Schrauf, A., Physikalische Studien. Die gesetzmässigen Beziehungen zwischen Materie und Licht. Wien, Gerold. 2⅔ Thlr.

Militzer, H., Ueber die Verwendung einer gemeinschaftlichen Batterie für vielfache Schliessungskreise. (Akademie.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

Schellen, H., Der elektromagnetische Telegraph in den Hauptstadien seiner Entwickelung etc. 4. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 3⅓ Thlr.

Sabine, R., *The electric telegraph. London, Virtue.* 12 *sh.* 6 *d.*

Warnotte, W., *Livre des poids spécifiques de corps solides, liquides, gazeux etc. Bruxelles, Vanderauvera.* 5 *fr.*

Huggins, W., *Analyse spectrale des corps célestes. Traduit de l'anglais par Moigno. Paris, Gauthier-Villars.* 1½ *fr.*

Fresnel, *Oeuvres complets d'Augustin Fresnel, publiées par H. de Senarmont, E. Verdet et C. Fresnel. T. 1 avec portrait. Paris, imprimerie impériale.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye, Privatdocent und Hilfslehrer für Mathematik und darstellende Geometrie am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Erste Abtheilung. Mit fünf lithographirten Figuren-Tafeln. Hannover, Carl Rümpler. 1866.

Seitdem die graphische Statik angefangen hat, unter den Ingenieurwissenschaften eine wichtige Rolle zu spielen, ist auch das Studium der Geometrie der Lage an den polytechnischen Schulen ein unabweisliches Bedürfniss geworden. Für dasselbe bildete bisher die anerkannt vortreffliche Arbeit, welche Herr von Staudt in seiner „Geometrie der Lage‘ und in den hierzu erschienenen „Beiträgen“ (vergl. Jahrg. II. S. 97 dieser Literaturzeitung) geliefert hat, fast die einzige Unterlage; da aber dieses ausgezeichnete Werk Anfängern meist zu schwer verständlich ist, so kann man dem Herrn Verfasser der vorliegenden Schrift nur dankbar dafür sein, dass er es unternommen hat, durch dieselbe den Studirenden den Eingang in die Wissenschaft zu erleichtern.

Das Buch enthält auf 146 Seiten eine Einleitung und vierzehn Vorträge. Es lehnt sich, wie auch in der Vorrede angegeben wird, grossentheils an die Staudt'sche Geometrie an, behandelt den Gegenstand aber in einer dem Anfänger leichter verständlichen Weise, berücksichtigt auch die metrischen Beziehungen und fördert das schnelle Verstehen durch 76 meist sehr gut entworfene Figuren, welche in dem Staudt'schen Werke bekanntlich ganz fehlen.

In der Einleitung sucht der Herr Verfasser zunächst das Wesen der Geometrie der Lage zu kennzeichnen, indem er den Gegensatz derselben zu den anderen Zweigen der Geometrie hervorhebt und eine Reihe von Sätzen und Aufgaben vorläufig anführt, welche mit Geschick so gewählt sind, dass sie zugleich die Lust zum Studium erwecken.

Der erste Vortrag behandelt „das Projiciren aus Punkten und Geraden; das Schneiden durch Ebenen und Gerade; die sechs Grundgebilde der neueren Geometrie.“ Es

werden in demselben die bekannten Begriffe für Element und Träger, Strahl, Schnitt und Schein, Projiciren, gerades Gebilde, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel etc. festgestellt; zuletzt wird die Eintheilung der Grundgebilde in drei Stufen angeführt.

Im zweiten Vortrage gelangen die unendlich fernen Elemente und das Beziehen der Grundgebilde auf einander zur Besprechung. Bei dem Streben des Herrn Verfassers, die Auffassung der Begriffe dem Anfänger möglichst zu erleichtern, hätte wohl auch diejenige Erklärung oder Umschreibung des unendlich fernen Punktes einer Geraden Aufnahme verdient, bei der man sich zunächst auf einem grössten Kreise einer Kugeloberfläche einen Punkt P und den ihm gegenüberliegenden P' denkt, sodann aber den Radius ins Unendliche wachsen lässt, wobei P' in Bezug auf P zum unendlich fernen Punkte wird, weil er einen grösseren Abstand von P hat, als jeder andere noch so weit entfernte Punkt des in eine Gerade übergehenden Kreises.

Von einigen aus der Geometrie des Maasses bekannten reciproken Sätzen ausgehend, wird im dritten Vortrage das Gesetz der Reciprocität und seine Wichtigkeit für die Geometrie der Lage durch viele Beispiele hervorgehoben. Sodann folgen die Begriffe für das einfache und vollständige ebene n-Eck und n-Seit, für das vollständige n-Kant und n-Seit im Strahlenbündel etc. mit Beziehung auf das Gesetz der Reciprocität. Hier hätte vielleicht auch der schöne Euler'sche Satz $E+F=K+2$ und die Bemerkung, dass die Ausnahmen, welche derselbe erleidet, nur scheinbare sind, wenn man die versteckten Ecken, Kanten und Flächen des Polyeders mitzählt, wenigstens anhangsweise eine Erwähnung verdient.

Der vierte Vortrag behandelt das Beziehen vollständiger n-Ecke, n-Seite etc. auf einander ungefähr in der Weise, in welcher es Herr von Staudt im siebenten Paragraphen seiner oben genannten Geometrie thut und schliesst daran die Begriffserklärungen für harmonische Punkte, harmonische Strahlen- und Ebenenbüschel. Die Lösung der hergehörigen Fundamentalaufgaben und die Anführung der nächsten Folgesätze schliesst den Vortrag. Demselben ist ein Anhang beigegeben, in welchem die an harmonischen Gebilden geltenden metrischen Beziehungen Erwähnung finden. Es wird dabei von dem Satze ausgegangen, dass zwei Punkte A und C durch den Halbirungspunkt B der Strecke AC und durch den unendlich fernen Punkt D harmonisch getrennt sind. Dann folgt die Herleitung der bekanntesten metrischen Beziehungen, die sich hieraus ergeben und der Anschluss einiger Aufgaben, in Bezug auf welche darauf aufmerksam gemacht wird, dass sie für das Feldmessen nicht ganz unwichtig sind.

Im fünften Vortrage gelangt die projectivische Verwandtschaft *zwischen ein*förmigen Grundgebilden zur Besprechung. Zunächst

wird festgestellt, was unter perspectivisch liegenden Grundgebilden zu verstehen ist; dann werden die projectivischen als solche definirt, welche so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen wieder vier harmonische des anderen entsprechen. — Bei Angabe der für „projectivisch" bei anderen Schriftstellern üblichen Ausdrucksweisen und Zeichen wäre vielleicht im Interesse der Studirenden eine etwas grössere Vollständigkeit und Ausführlichkeit wünschenswerth gewesen. — Einigen Folgerungen wird dann der Satz „zwei projectivische Strahlenbüschel, die schief in einer Ebene liegen, schneiden einander in einer Curve zweiter Ordnung," so wie der ihm reciproke, angereiht und bei Begründung desselben zugleich der Ausdruck „projectivisch" gerechtfertigt. Die Begriffe für einstimmige und entgegengesetzte Projectivität bilden den Schluss. Der angefügte Anhang giebt eine Herleitung für den Begriff des Doppelverhältnisses und die Beziehung desselben zur harmonischen Theilung. Auf die verschiedenen Formen aufmerksam zu machen, nach welchen das Doppelverhältniss von verschiedenen Schriftstellern gebildet und bezeichnet wird, wäre wohl auch hier gut gewesen.

Die Curven, Büschel und Kegelflächen zweiter Ordnung bilden den Inhalt des sechsten Vortrags, in welchem zunächst vorläufig angeführt wird, dass die Kegelschnittslinien mit den vorher definirten Curven zweiter Ordnung identisch sind, das Strahlenbüschel zweiter Ordnung aber der Inbegriff von sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts ist. Der Beweis dafür wird später geliefert. Hierauf folgt die Feststellung der Begriffe für Kegelflächen und Ebenenbüschel zweiter Ordnung und die Angabe des Zusammenhanges derselben mit den Curven und Strahlenbüscheln. Sodann beschränkt sich die Untersuchung zunächst auf die Letzteren, giebt die Herleitung der wichtigsten hierher gehörigen Sätze, namentlich auch der von Pascal und Brianchon, und liefert die Lösung der einschlagenden Aufgaben über die Construction von Curven und Strahlenbüscheln zweiter Ordnung aus einer hinreichenden Anzahl gegebener Elemente. Endlich werden noch die Begriffe für harmonische Punkte einer Curve und für harmonische Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung festgestellt.

Indem der Herr Verfasser das Fünfeck, Viereck und Dreieck aus dem Sechseck entstehen lässt, gelangt er im siebenten Vortrage zu den bekannten Folgerungen aus den Lehrsätzen des Pascal und des Brianchon und wendet dieselben zur Lösung der hergehörigen Aufgaben an. Die Eigenschaften des Sehnen- und Tangentenvierecks werden dann auch noch direct abgeleitet und dass sämmtliche Tangenten einer Curve zweiter Ordnung ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, sämmtliche Berührungspunkte eines Büschels zweiter Ordnung aber eine Curve zweiter Ordnung bilden, wird auf zweierlei Art bewiesen. Dabei ergiebt sich zugleich derjenige Satz, welchen Chasles seinem *Traité des Sections coniques* an die Spitze gestellt hat. Hierauf folgt die Angabe der Möglichkeit der Umfor-

mung der früher abgeleiteten Sätze, nebst einer theilweisen Uebertragung derselben auf den Raum. Mit einer Entwickelung der Unterscheidungsmerkmale für Ellipse, Parabel und Hyperbel und mit einer Feststellung des Begriffes der Cylinderfläche schliesst dieser Abschnitt.

Im Folgenden bilden die Eigenschaften des einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen oder umschriebenen Vierecks den Ausgangspunkt für die Herleitung der Fundamentalsätze über Pol und Polare. Nachdem der Zusammenhang derselben mit der Projectivität dargethan worden ist, reihen sich die Feststellung des Begriffes der conjugirten Punkte und naheliegende Folgerungen an. Schliesslich wird daran erinnert, dass die für Curven zweiter Ordnung angegebenen Sätze sich auch auf Kegelflächen zweiter Ordnung übertragen lassen.

Der neunte Vortrag, welchen der Herr Verfasser als Anhang betrachtet wissen will, enthält besondere Fälle des vorhergehenden Allgemeinen über Pol und Polare in Bezug auf Curven zweiter Ordnung. Es finden hier die bekannten Sätze über Durchmesser, Sehnen, Asymptoten, conjugirte Durchmesser, Axen, nebst Lösung der zugehörigen Aufgaben ihren Platz, wobei am Ende des Abschnitts die Gleichheit der Doppelverhältnisse als Ausgangspunkt benutzt wird.

Der zehnte Vortrag ist den Regelschaaren und Regelflächen gewidmet; er enthält die Herleitung ihrer Entstehung, wie auch einiger ihrer Eigenschaften und lehnt sich an Punkt 115 der Staudt'schen Geometrie der Lage an.

Im nächsten Abschnitte wird die projectivische Verwandtschaft zwischen Elementargebilden behandelt. Derselbe stützt sich auf Das, was Herr von Staudt im ersten Paragraphen seiner „Beiträge etc." darbietet und zeigt, wie das Vorhergehende auf Elementargebilde übertragen, wie es erweitert und benutzt werden kann.

Der zwölfte Vortrag bespricht die involutorischen Elementargebilde; er entlehnt den Stoff zum Theil aus dem sechszehnten Paragraphen der Staudt'schen Geometrie und aus dem vierten der mehrfach genannten „Beiträge etc."

Den Inhalt des folgenden Abschnittes will der Herr Verfasser wieder als Anhang angesehen haben. Er betrifft die metrischen Relationen involutorischer Gebilde, entwickelt zunächst, von der zwischen drei Punktepaaren A und A_1, B und B_1, C und C_1 eines involutorischen geraden Gebildes bestehenden Beziehung $AA_1\,BC_1 \overline{\wedge}\, A_1\,AB_1\,C$ ausgehend, die bekannten Gleichungen

$$AB_1 \,.\, BC_1 \,.\, CA_1 = AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1,$$
$$OA \,.\, OA_1 = OB \,.\, OB_1,$$
$$OA \,.\, OA_1 = (OM)^2 = (ON)^2$$

und schliesst daran die Ableitung der auf Brennpunkte der Curven zweiter Ordnung bezüglichen Sätze. Bei Gelegenheit der ersten der obigen drei Gleichungen hätte wohl der von Möbius (Barycentrischer Calcul S. 298)

eingeführte Begriff des Dreieckschnittverhältnisses und die Beziehung desselben zur Involution eine Erwähnung verdient, um so mehr, als ja S. 55 auch der Zusammenhang des Doppelverhältnisses mit der harmonischen Theilung angeführt worden ist.

Der letzte Vortrag behandelt Aufgaben zweiten Grades und stützt sich auf den dreiundzwanzigsten Paragraphen der Staudt'schen Geometrie.

Aus dieser ausführlichen Inhaltsangabe ist hinreichend zu ersehen, inwiefern sich die vorliegende Schrift in Bezug auf Auswahl und Anordnung des Stoffes von anderen ähnlicher Art, namentlich von der Staudt'schen unterscheidet.

Was die Durchführung des Gegenstandes anlangt, so muss der Referent nach einer vollständigen, wenn auch etwas flüchtigen Durchsicht des ganzen Werkchens zwar gestehen, dass er sich nicht überall mit dem Herrn Verfasser einverstanden erklären kann, glaubt aber dennoch, dasselbe sowohl den Studirenden, als auch den Lehrern der Wissenschaft bestens empfehlen zu können.

Die äussere Ausstattung der Schrift ist eine vorzügliche; der Preis 1 Thlr. 10 Ngr.

Möge der Herr Verfasser recht bald die versprochene zweite Abtheilung, wie auch die in Aussicht gestellte Sammlung von Constructionsaufgaben folgen lassen. Er wird dafür gewiss Dank ernten.

Dresden, im März 1867. Dr. FUHRMANN,
Assistent a. d. polyt. Schule.

Die graphische Statik von K. CULMANN, Professor der Ingenieurwissenschaft am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zürich, bei Meyer & Zeller. 1866. (Hierzu Taf. IV. Fig. 16 und 17.)

Schon seit lange haben sich sowohl Mathematiker als Ingenieure zur geometrischen Darstellung der auf analytischem Wege gewonnenen Resultate gewandt, wo es darauf ankam, die erhaltenen Gesetze und Beziehungen in einer einfachen und übersichtlichen Weise, so zu sagen durch Verkörperung derselben für das Auge sichtbar darzustellen. Die geometrische Construction diente der Analysis blos als Reliefgeberin.

In einzelnen Fällen jedoch nahm sie auch eine höhere Stellung ein. Wo die analytische Entwickelung auf zur Zeit nicht lösbare Probleme stiess, war man oft noch im Stande, freilich mit geringerer Genauigkeit und Vollständigkeit eine constructive Lösung der Aufgabe zu finden.

Schritt die Analysis weiter und besiegte die sich ihr in den Weg stellenden Schwierigkeiten, so waren doch nicht selten die erhaltenen Resultate, sowie die Wege, auf denen man zu letzteren gelangte, sehr umständlich, so dass man für die Anwendung lieber das einfachere constructive Verfahren beibehielt.

Durch die Ausbildung der neueren Geometrie, hauptsächlich durch das Entstehen der Geometrie der Lage, emancipirte sich die Construction in hohem Grade von der Analysis. Als selbstständiges Ganze war es ihr nicht genug, der Analysis als Lückenbüsserin zu dienen. Sie fasste die bei den verschiedenen Aufgaben gegebenen Liniengebilde selbst als Grundlage auf und entwickelte auf eigenem Wege die Lösung. Natürlich standen derartige Lösungen zu Anfang blos vereinzelt da: im Gebiete der Baustatik waren sie sehr selten. Die Geometrie der Lage, als ganz neue Wissenschaft, war noch zu wenig ins Leben übergegangen, um auf polytechnischen Schulen obligatorisch gelehrt und zum Gemeingut der Ingenieure gemacht zu werden.

Da fasste Herr Prof. Culmann den praktischen Gedanken, die einer geometrischen Behandlung zugänglichen Aufgaben aus dem Gebiete des Ingenieurfaches mit Hilfe der neueren Geometrie zu bearbeiten. Der Erfolg war ein aussergewöhnlicher. In kurzer Zeit bürgerte sich das neue Rechnungsverfahren auf dem Züricher Polytechnikum ein, wo die Studirenden mit grosser Lust dasselbe handhabten, da dieses Verfahren zwei grosse Vorzüge hat: erstens gewährt es durch seine aussordentliche Anschaulichkeit eine Erleichterung sowohl für das Verständniss, als auch für die Einprägung im Gedächtnisse; zweitens ermüdet es bedeutend weniger, als das gewöhnliche Rechnen mit Buchstaben oder Zahlen. Referent hat oft selbst Gelegenheit gehabt, sich von letzterem Vorzuge zu überzeugen und musste dabei unwillkürlich an die ähnliche Eigenschaft einer Rechenmaschine denken.

Doch haben die graphischen Rechnungsmethoden einen gewaltigen Unterschied gegen die Rechenmaschinen: man wird eben dabei nichts weniger, als zur Maschine. Im Gegentheil liegt der mathematische Zusammenhang sämmtlicher Rechnungsprocesse in der gezeichneten Figur stets klar vor Augen und das ist es vielleicht gerade, was dem rechnenden Geiste eine Erleichterung verschafft.

In dem vorliegenden, sehr schön ausgestatteten Werke giebt der Verfasser das von ihm bis jetzt verarbeitete Material als ein wissenschaftlich geordnetes Ganze. Die specielle Besprechung der einzelnen Abschnitte wird den Inhalt am deutlichsten wiedergeben.

Nachdem zunächst der Sinn der algebraischen Operation mit Linien erläutert worden, werden dieselben auch auf Flächen und Körper ausgedehnt, zu welchem Zwecke jedoch letztere Gebilde mittelst Reduction auf eine bestimmte lineare Basis in proportionale Linien umgewandelt werden müssen. Als hübsche Anwendungen findet man die Construction einer Flächentafel für Auf- und Abtragprofile bei Strassen und Eisenbahnen für verschiedene Böschungen und Geländeneigungen, die Theorie des Planimeters und das Massennivellement für in einer Bahnstrecke vorkommende *Auf- und* Abträge.

Den ganzen ersten Abschnitt fasst der Verfasser unter dem Namen „graphisches Rechnen“ zusammen und meint mit Recht, dass derselbe noch bedeutend und in dankbarer Weise ausgedehnt werden kann. Jedenfalls dürfte die Geodäsie manchen Nutzen durch Einschlagen des hier angegebenen Weges ziehen, wie dies auch zum Theil schon geschehen ist. (Vergleiche z. B. *Rankine*, *a Manual of Civil Engineering*, ferner den Aufsatz des Prof. Müller in Grunert's Archiv für Mathematik. 1866.)

Der zweite Abschnitt behandelt die Hauptaufgaben der reinen Statik. Bei der graphischen Zusammensetzung von Kräften, die auf einen Punkt oder in einer Ebene wirken, wird zunächst der Begriff des die Richtung und Lage der Kräfte repräsentirenden Seilpolygons und des die Richtung und Grösse der Kräfte darstellenden Kraftpolygons festgestellt und dann mittelst eines einfachen Gedankenganges der wichtige Satz gefunden: dass diese Polygone aufeinander reciprok bezogen werden können, wenn alle Kräfte des Seilpolygons durch einen (auch den unendlich entfernten) Punkt gehen. Als Consequenz folgt, dass, wenn in diesem Falle das eine der Polygone einer Curve zweiter Ordnung um- oder einbeschrieben ist, das andere derselben einer Curve zweiter Ordnung ein- oder umbeschrieben ist. Da dieser Satz als Grundlage für viele der später gegebenen graphischen Lösungen dient, so wird derselbe noch besonders für die speciellen Fälle, wenn der Pol des einen Polygons im Mittelpunkte oder auf der Peripherie der Curve, im Endlichen oder im Unendlichen liegt, besprochen.

Es folgen dann die Erläuterungen über die graphische Bezeichnung und die Zusammensetzung von endlichen und unendlich fernen, parallelen und nicht parallelen Kräften in der Ebene und im Raume, wobei letztere mittelst Projection auf zwei ebene Kraftsysteme zurückgeführt werden.

Für die Anwendung sind dem Ingenieur die Kräfte in einer Ebene, hauptsächlich die parallelen Kräfte von Wichtigkeit und es werden daher diese noch speciell für den Fall eines belasteten Balkens betrachtet. Die graphischen Methoden führen hierbei schnell zu den bekannten Sätzen über die Abhängigkeit zwischen Biegungsmoment und Scheerkraft, sowie zu einem bequemen und oft langweilige Rechnungen ersparenden Mittel, um die ungünstigste Stellung eines Locomotivzuges auf Balken von verschiedener Spannweite zu finden.

Nachdem, an die parallelen Kräfte im Allgemeinen anschliessend, die graphische Bestimmung des Schwerpunktes sowohl für die am häufigsten vorkommenden ebenen Figuren, als auch für Körper gegeben worden, geht der Verfasser zur Lehre von den Trägheitsmomenten über und entwickelt, die graphische Bedeutung derselben hauptsächlich im Auge behaltend, die bekannten Sätze über das Trägheitsellipsoid, speciell das Centralellipsoid. Als besonders fruchtbringend erscheint die Untersuchung des speciellen Falles eines Systems von parallelen Kräften, von denen jede einzelne Kraft ihrer in belie-

biger Richtung gemessenen Entfernung von einer Ebene E, multiplicirt mit einer Constanten P (die auch negativ sein kann) gleich ist. Es stellt sich nämlich heraus, dass, wenn man die Constanten wie Kräfte behandelt, ihren Schwerpunkt und ihr Centralellipsoid bestimmt, dann die Intensität der Mittelkraft dieses Systems gleich der Summe aller Constanten P multiplicirt mit der Entfernung ihres Schwerpunktes von der Ebene E ist und ihr Angriffspunkt im Polarsystem, dessen Ordnungsfläche das Centralellipsoid ist, den Pol der bezüglich des Schwerpunktes symmetrisch zu E gelegenen Ebene bildet. Denkt man sich daher die Ebene E nicht mehr fest, sondern veränderlich, so verändert sich auch der Angriffspunkt der Resultante der Kräfte nach den Gesetzen der reciproken Verwandschaft, dessen Ordnungsfläche das Centralellipsoid ist, indem der Angriffspunkt immer der Pol der zu E symmetrischen Ebene bleibt. Beschreibt daher die Ebene E irgend einen Körper, von dem sie ausgeschlossen bleibt, so beschreibt der Angriffspunkt der Mittelkraft irgend einen Kern, in dem er bleibt. In einer Ebene angewendet, wird natürlich die neutrale Ebene E zur neutralen Axe und der Kern eines Körpers zum Kern einer ebenen Figur, z. B. eines Querschnittes.

Den Schluss des Abschnittes bilden die Constructionen zur Bestimmung der Centralellipsen, Centralellipsoide und Kerne für die gebräuchlichsten Querschnitte und für einige Körper. Als Beispiele für zusammengesetzte Querschnitte werden ein Schienen- und ein Winkeleisenprofil behandelt.

Den hier auseinandergesetzten geometrischen Zusammenhang zwischen der neutralen Ebene E und dem Kerne findet man bei einigen Schriftstellern analytisch, jedoch blos für den speciellen Fall einer ebenen Figur, entwickelt. Nirgends ist dieser Zusammenhang so allgemein und der Ausbeutung durch die Geometrie der Lage so entsprechend behandelt worden wie in dem vorliegenden Werke.

Der dritte Abschnitt befasst sich mit dem Gleichgewichte der an einem Balkenquerschnitte wirkenden inneren und äusseren Kräfte. Von der gewöhnlichen Anschauung der nach dem Biegen noch eben bleibenden Balkenquerschnitte ausgehend, wird der Begriff der neutralen Axe als derjenigen Linie festgestellt, in der weder Pressungen, noch Spannungen parallel zur Axe des Balkens stattfinden. Die als gegeben vorauszusetzenden äusseren Kräfte kann man in eine durch den Schwerpunkt des betrachteten Balkenquerschnittes gehende Kraft und ein Kräftepaar umsetzen. Die erste Kraft wird in eine Seitenkraft Q nach der Richtung der Balkenaxe und in eine senkrecht darauf stehende Scheerkraft P zerlegt. Das Kräftepaar ferner spaltet sich in drei Kräftepaare $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{T}$, von denen die Axe der $\mathfrak{P}$ senkrecht auf PQ steht und die Axen der beiden anderen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ mit P und Q zusammenfallen. An die früher erläuterten Begriffe und Constructionen anschliessend, werden die Inanspruchnahmen des Balkenquer-

schnittes durch diese sowohl einzeln, als auch (mit Ausnahme des Torsionskräftepaares $\mathfrak{T}$) in Combinationen wirkenden Kräfte und Momente untersucht und die Gesetze derselben in neue geometrische Gewänder gekleidet, wodurch bei der Construction der ersteren eine sehr grosse Anschaulichkeit erzielt wird.

Als Beispiele folgen die graphischen Darstellungen der Kräfte im Innern einer Eisenbahnschiene, sowie derer eines geraden Balkens unter verschiedenartigen Verhältnissen und endlich der Inanspruchnahmen von krahnenartigen Constructionen.

Im vierten Abschnitte findet man die Betrachtungen über den continuirlichen Balken. Da bekanntlich alle hierher gehörenden Aufgaben gewöhnlich nur mit Zuhilfenahme der Theorie der elastischen Linie gelöst werden, die Krümmungshalbmesser des gebogenen Balkens jedoch, denen die Biegungsmomente der äusseren Kräfte proportional gesetzt werden, so gross sind, dass ihre Construction unmöglich ist, so muss die graphische Statik von letzterer so lange absehen, als es nicht gelungen ist, die Einbiegungen des Balkens mittelst eines einfachen Verfahrens in der Art projectivisch zu verzerren, dass die Krümmungshalbmesser messbar werden.

In dieser Beziehung ist eine kurze Notiz erwähnenswerth, die sich in Prof. Rankine's *Applied Mechanics* findet. Es heisst dort: „Man nehme eine Anzahl von aequidistanten Punkten des Balkens an, verkleinere deren Krümmungshalbmesser in einem beliebigen Verhältnisse und zeichne eine Curve, bestehend aus kleinen Kreisbögen mit den verkürzten Radien. Mit grosser Annäherung werden dann die Ordinaten der verzerrten Curve in demselben Verhältnisse gegen die Ordinaten der wirklichen gebogenen Axe übertrieben sein." Ein Beweis dieses Satzes ist nicht gegeben, doch lässt sich derselbe leicht führen. Heisst für irgend eine sehr flache Curve die Gleichung $y=f(x)$, so kann man den Krümmungshalbmesser $\varrho=\frac{dx^2}{d^2y}$ setzen. Sollen die Ordinaten y_1 der verzerrten Curve das $m$fache der ursprünglichen Ordinaten für dieselbe Abscisse betragen, so muss $y_1=my$ sein. Dann wird aber der Krümmungshalbmesser der verzerrten Curve, weil nunmehr

$$\frac{dy_1}{dx}=m\frac{dy}{dx} \text{ und } \frac{d^2y_1}{dx^2}=m\frac{d^2y}{dx^2}$$

ist:

$$\varrho_1=\frac{\left(1+m\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{m\frac{d^2y}{dx^2}}$$

oder, wenn die verzerrte Curve auch noch ziemlich flach gehalten wird, annähernd:

$$\varrho_1=\frac{dx^2}{m\,d^2y}=\frac{1}{m}\varrho.$$

Herr Prof. Culmann sieht, wie schon erwähnt, von der Construction ab und löst, nach dem Vorgange Clapeyron's die Momente über den Pfeilern als Unbekannte ansehend, die Aufgabe auf algebraischem Wege. Zu diesem Zwecke wird zunächst für den Fall eines continuirlichen, mit beliebigen Lasten bedeckten und mit beliebig staffelförmig veränderlichem Querschnitte versehenen Balken die Beziehung zwischen den Biegungsmomenten der äusseren Kräfte und der Form des Balkens auf der Strecke vom $i-1^{\text{ten}}$ bis zum $i+1^{\text{ten}}$ Pfeiler aufgestellt, eine Beziehung, in welcher die Pfeilermomente $\mathfrak{P}_{i-1}$, $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_{i+1}$ als Unbekannte auftreten.

Durch consequente Anwendung dieser Gleichung für eine Gruppe von n (nicht nothwendiger Weise gleichen) Oeffnungen erhält man $n-1$ Gleichungen mit eben so viel Unbekannten, da die Momente $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_n$ über den Widerlagern entweder $=0$ oder bekannt sind, wie es z. B. der Fall wäre, wenn der Balken ein Stück über die Widerlager vorstände. Aus jenem System von n Gleichungen wird nun mit Zuhilfenahme von Determinanten ein allgemeiner Ausdruck für ein beliebiges Pfeilermoment $\mathfrak{P}_i$ gefunden, wodurch die Hauptaufgabe gelöst ist, da, sobald die Pfeilermomente bekannt sind, man auf graphischem Wege schnell und leicht zu allen am Balken wirkenden Kräften gelangt. Als specielle Beispiele wird die angedeutete analytische Untersuchung für einen continuirlichen Balken mit constantem, dann mit staffelförmigem Querschnitte und endlich für einen über mehrere gleichweite Oeffnungen gestreckten und innerhalb jeder gleich und symmetrisch gebauten continuirlichen Balken ausgedehnt.

Es muss besonders hervorgehoben werden, dass die hier gegebene Lösung des Problems eines continuirlichen Balkens sich durch grosse Allgemeinheit auszeichnet, da selbst Herr Bresse in dem dritten Theile seiner *Mécanique appliquée*, wo er dasselbe Problem auf's Ausführlichste behandelt, sich noch durch die Bedingung eines durchaus constanten Balkenquerschnittes bindet und dann die Querschnitte des zu construirenden Balkens proportional den Biegungsmomenten der angebrachten Kräfte macht.

Uebrigens scheint es, dass Herr Prof. Culmann zu der Zeit, als er seine Untersuchungen niederschrieb, den im Jahre 1865 herausgekommenen dritten Theil von Bresse's *Mécanique* noch nicht zu Gesicht bekommen hatte, da er sonst jedenfalls nicht die Bemerkung, dass Bresse sich blos auf Balken von gleichweiten Oeffnungen mit gleichförmiger Belastung pro Oeffnung beschränke, gemacht haben würde. Diese Bemerkung trifft blos für die im ersten Theile enthaltenen älteren Untersuchungen von Bresse zu. Dagegen weist Letzterer in neuerer Zeit analytisch auch alle diejenigen Resultate über die Wirkung einer verschiebbaren Einzellast auf einem continuirlichen Balken über beliebige Oeffnungen nach, die Herr Prof. Culmann in seiner graphischen Statik, freilich auf einem anderen, *blos auf Anschauung* gegründeten Wege findet.

Durch diese Voruntersuchung erledigt sich auch die Frage über die ungünstigste Belastung eines continuirlichen Balkens, da die Wirkung vertheilter Lasten als die Summe der Wirkungen von Einzellasten aufgefasst werden kann und hierdurch reducirt sich auch die praktische Entwickelung der Kräftepläne für verschiedene continuirliche Balken blos auf eine beschränkte Anzahl von Belastungsmodalitäten.

Solcher Kräftepläne werden drei gegeben: für einen continuirlichen Balken constanten Querschnitts über vier Oeffnungen, für einen ungleichförmig belasteten Balken über fünf Oeffnungen und endlich, um zu untersuchen, wie die an den einzelnen Theilen des Balkens wirkenden Kräfte modificirt werden, wenn man den Querschnitt nicht constant nimmt, für einen ungleichförmig belasteten Balken über fünf Oeffnungen bei veränderlichem Querschnitte.

Es stellt sich hierbei heraus, dass das Moment über den Pfeilern entschieden eine Vergrösserung, das in der Mitte der Oeffnung ebenso eine Verminderung erleidet. In dem gegebenen Beispiele erreichen die Aenderungen $^1/_{10}$ der Totalkräfte, welche an den Streckbäumen wirken.

Mit Recht macht nach diesem Resultate der Verfasser darauf aufmerksam, wie allgemein die Aufgaben der graphischen Statik gestellt werden können.

Während jedoch bei der Untersuchung des continuirlichen Balkens die graphischen Rechnungsmethoden erst nach der Bestimmung gewisser Data durch die gewönliche analytische Behandlung angewendet werden konnten, findet die graphische Statik im fünften Abschnitt bei der Berechnung von Fachwerksträgern über eine Oeffnung ein Feld, auf dem sie ganz selbstständig auftreten kann. Bei continuirlichen Fachwerkträgern über mehrere Oeffnungen würde freilich der oben erwähnte Uebelstand sich wiederholen. Da man jedoch in neuerer Zeit von der Anwendung continuirlicher Brückenträger wegen der Unsicherheit in der auszuführenden Höhenlage der Stützpunkte oft abgesehen hat, so ist derselbe von geringer praktischer Bedeutung. Ebenso werden, angemessen den Ansichten der neueren Brückenconstructeure, die engmaschigen Gitterbrücken, bei denen die Vertheilung der Kräfte im Querschnitte theoretisch nicht genau festgestellt ist, nicht specieller durchgeführt, sondern blos diejenigen Fachwerke untersucht, bei denen die äusseren Kräfte in jedem Schnitt durch nicht mehr als drei Constructionselemente aufgehoben werden, eine Kräftezerlegung, die blos auf eine einzige Art stattfinden kann und hierdurch die Umgehung jeder Zweideutigkeit erlaubt.

Bei der Aufsuchung der ungünstigsten Belastung des Fachwerks wird dieselbe als von einzelnen in den Knotenpunkten aufgegebenen Lasten herrührend betrachtet. Während jedoch andere Schriftsteller hierbei sich die Annäherung erlauben, jeden Knotenpunkt entweder ganz voll oder gar nicht belastet anzunehmen, berücksichtigt Prof. Culmann den, dem allmäligen

Fortschreiten eines Eisenbahnzuges auf einer Brücke mehr sich anschliessenden Fall, wo der erste von den unter dem Zuge befindlichen Knotenpunkten blos partiell belastet ist, wie dies z. B. geschieht, wenn das vordere Rad des Locomotivs zwischen zwei Querträgern sich befindet. Hierdurch wird natürlich die ungünstigste Stellung des Zuges in Beziehung auf die verschiedenen Constructionstheile schärfer bestimmt, ohne gerade in die graphische Berechnung des Fachwerkträgers erschwerende Complicationen hereinzubringen.

Zunächst wird der Kräfteplan eines Fachwerks der allgemeinsten Form construirt, dann folgen, als specielle Beispiele, das Fachwerk mit parallelen Streckbäumen und ein Paar einfache Hängewerke. Nach diesen, der Pauli'sche Träger, bei welchem der Verfasser ausführlich verweilt, um theils die falschen Anschauungen, die man über diese Construction oft findet, zu widerlegen, theils, um den wahren Motiven nachzuforschen, denen dieselbe entsprungen ist. Nicht im Materialersparniss sind die hauptsächlichsten Vorzüge der Pauli'schen Träger zu suchen, sondern in dem Umstande, dass

1) durch das Aufhängen des Balkens in der neutralen horizontalen Axe die Erschütterungen, die dadurch entstehen, dass infolge der über die Brücke gehenden Lasten diese ihre Längen ändert, aufgehoben werden;

2) infolge der Construction die Streckbäume einen constanten Querschnitt erhalten können;

3) ebenfalls infolge der Construction ein Minimum des Verzerrens der einzelnen Fächer, aus denen der Balken besteht, erreicht wird.

Auch wird Herr von Pauli als der Erste genannt, der es gewagt hat, durch vollendete Ausführung der einzelnen Theile, infolge deren man überzeugt sein kann, dass kein Theil stärker, als berechnet in Anspruch genommen sei und durch sorgfältige Prüfung des zu verwendenden Materials den Materialaufwand und die Kosten des Trägers auf ein Minimum zu reduciren.

Schliesslich wird die graphische Berechnungsmethode an einem Paulischen Träger von 50 Meter Spannweite gezeigt.

Jedenfalls findet man an dieser Stelle das Gründlichste, was bis jetzt zur Charakterisirung des Pauli'schen Trägers veröffentlicht worden ist, und empfehlen wir daher das Lesen dieser Abhandlung um so mehr, als hierbei mit grosser Sachkenntniss Punkte berührt werden, die für die Theorie der Fachwerkträger von allgemeinem Interesse sind.

Am Ende des fünften Abschnitts wird die graphische Berechnung der gebräuchlichsten Dachstuhlconstructionen gegeben.

In dem sechsten Abschnitte bildet für die Theorie der Gewölbe die sogenannte Drucklinie die Hauptgrundlage. Man vermeidet das Gleiten der Steine durch die Construction, durch die Fugenstellung, ein Kanten findet dagegen blos dann nicht statt, wenn die Drucklinie keine von den Fugenflächen ausserhalb ihres Centralkernes schneidet, weil blos in diesem

Falle die neutrale Axe vom Querschnitte ausgeschlossen bleibt und demnach noch die ganze Fläche Druck erleidet. Hierbei ist freilich für die Druckvertheilung das oft gebrauchte Gesetz angenommen, dass die Intensität des Druckes auf jedes Fugenflächenelement proportional dem Abstande dieses letzteren von einer zu den Erzeugenden des Gewölbes parallel liegenden neutralen Axe ist. Dieses Gesetz zu beweisen, ist bis jetzt weder den Mathematikern analytisch, noch den Physikern experimentell gelungen und man muss es daher als Hypothese ansehen.

Nimmt man jedoch dieselbe als richtig an, so muss man auch das Criterium zugeben, welches von den vielen im Gewölbe möglichen Drucklinien die wirkliche Drucklinie unterscheidet. Dasselbe ist von Herrn Bélanger aufgestellt, von Herrn Vène schon im Jahre 1836 benutzt und vom Herrn Prof. Culmann wie folgt ausgesprochen: „Von allen Drucklinien, welche eingezeichnet werden können, ist diejenige die wirkliche Drucklinie des Gewölbes, welche sich der Axe desselben in der Art am meisten nähert, dass der Druck in den am stärksten comprimirten Fugenkanten ein Minimum ist.“ Die Beweise dieses Satzes sind mehr metaphysisch gehalten.

Es ist nicht zu verkennen, dass diese Theorie, wie jede der bis jetzt existirenden Gewölbetheorien, blos für gewisse ideale Voraussetzungen der Praxis, als da sind: vollständige Homogenität des Materials, absolut glatte Fugenflächen, genaues Einpassen des Schlusssteines u. s. w., sowie bei Vernachlässigung des Bindens durch Mörtel gilt, und insofern ihre Ergebnisse blos als approximative Werthe zu betrachten sind; sie bietet jedoch den anderen Annahmen gegenüber die naturgemässe Consequenz, dass man für gleichbelastete stärkere Gewölbe einen kleineren Maximalfugendruck als für das gleichbelastete schwächere Gewölbe erhält.

Nachdem der zuerst von Moseley hervorgehobene Unterschied zwischen Stützlinie und Drucklinie berührt und die Grösse ihrer Abweichung von einander beleuchtet worden, folgen die graphischen Methoden zur Bestimmung der Belastungscurven für eine gegebene Drucklinie und umgekehrt der Drucklinie bei vorgeschriebener Form, sowie Belastung des Gewölbes, durch welche letztere Linie die Dimensionen sowohl des Gewölbes, als auch des Widerlagers bestimmt werden. Bei der Verzeichnung der Druck- und Stützlinien in den Gewölben wird jedoch der oben ausgesprochene Satz von dem *minimum maximorum* des Elementardrucks nicht in seiner vollen Strenge durchgeführt, sondern man begnügt sich, wenn man eine Drucklinie in das Gewölbe einzeichnen kann, deren Seiten die entsprechenden Fugenflächen innerhalb des Centralkernes schneiden, weil man dann annehmen kann, dass es eine noch günstigere Linie giebt.

Um die Drücke zu bestimmen, welche ein unter einem nicht geschlossenen Gewölbe befindliches Lehrgerüst erleidet, werden die einzelnen Gewölbschichten in Beziehung auf ihr Bestreben zu kanten unter-

sucht und auf rein graphischem Wege interessante Resultate erzielt, die freilich mehr theoretischer Natur sind und in der Praxis durch mannichfaltige, im Werke selbst angegebene Ursachen bedeutend modificirt werden. Unter der Annahme eines sehr kleinen Reibungswinkels und unter der Voraussetzung, dass die belastenden Gewölbschichten die obersten sind, werden dann als Beispiele die Kräftepläne für einige Lehrgerüste gegeben.

Bei der Theorie der eisernen Bögen fasst Herr Prof. Culmann dieselben nicht mit Navier als elastische gebogene Stäbe auf, sondern wendet auf die Bögen die schon bei den Gewölben gestellte Constructionsbedingung an, dass die Drucklinie der einwirkenden äusseren Kräfte in jedem Querschnitte nicht aus dem entsprechenden Centralkerne heraustrete. Die Biegungen und Formveränderungen des Bogens werden dann so gering sein, dass die von ihnen herrührenden Kräfte den eigentlichen Druckkräften gegenüber vernachlässigt werden können. Sowohl durch Probiren, als auch gestützt auf Analogien bei versteiften Kettenbrücken stellt sich heraus, dass die Drucklinie eines Bogens, dessen circa eine Hälfte total und dessen andere gar nicht belastet ist, zur Umhüllung den höchsten Kernbogen verlangt, und es bestimmen sich hierdurch die Querschnittshöhen des Bogens.

Da der Theorie nach, unten an den Widerlagern satt und breit aufsitzende Bögen mehr als solche, die an den Widerlagern drehbar gestützt sind, tragen, und da ferner die Versuche des Herrn Ingenieur Oudry gezeigt haben, dass die Einwirkungen der Temperaturdifferenzen auf die eisernen Bogenbrücken von geringem Maasse sind, so empfiehlt Herr Prof. Culmann für alle Bögen breite solide Auflager.

Es folgt dann als Anwendung die graphische Bestimmung der Kräfte an einer Bogenbrücke sowohl für den Fall, dass die Drucklinie der einseitigen Belastung vom Bogen umhüllt wird, als auch für denjenigen, wenn letztere aus dem Bogen heraustritt und auf das in den Bogenwinkeln angebrachte Fachwerk wirkt.

Die hier angewandte Bogentheorie hat jedenfalls den Vortheil, dass sie für die Querschnittsdimensionen des Bogens eher zu grosse als zu kleine Werthe giebt, ihre Anwendung in der Praxis daher keine Gefahr bietet. Es ist jedoch gegen dieselbe Folgendes zu erwähnen:

1) Sie abstrahirt vollständig von der Natur des Bogenmaterials. Ein unendlich starrer Bogen wird offenbar gar keinen Horizontalschub ausüben, während nach Obigem man für den Horizontalschub stets denselben Werth erhält.

2) Sie setzt die Inanspruchnahme des Bogens blos auf Druck als zulässig voraus, während gar kein Grund vorhanden ist, die Resultante der ausserhalb des Bogenquerschnittes wirkenden äusseren Kräfte nicht aus dem Centralkern des letzteren heraustreten, d. h. einzelne Theile des Querschnittes nicht auch auf Zug in Anspruch genommen sein zu lassen.

3) Im Vergleich zu der Anschauung des Bogens als eines gekrümmten elastischen Stabes, die doch jedenfalls nicht eine widernatürliche genannt werden kann, giebt sie eine ganz andere rationelle Vertheilung des Bogenmaterials.

4) Sie benutzt das noch nicht bewiesene hypothetische Gesetz der Druckvertheilung über einen ebenen Querschnitt.

Andererseits muss man aber auch eingestehen, dass durch Veröffentlichung seiner Bogenbrückentheorie Herr Prof. Culmann den construirenden Ingenieuren einen grossen Dienst erwiesen hat; sie ist bis jetzt die einzige veröffentlichte Anleitung zur Berechnung von continuirlichen Bogenbrücken mit ganz beliebig veränderlichen Trägheitsmomenten der Querschnitte.

Da es nicht ohne Interesse sein dürfte, des Vergleichs halber, auch eine analytische Ableitung der Bogeninanspruchnahme unter Zugrundelegung jenes als richtig vorausgesetzten Druckvertheilungsgesetzes zu haben, so möge es gestattet sein, hier kurz eine solche für den einfachsten Fall eines gewichtlosen, in B drehbar gestützten und im Scheitel mit einer Einzellast P beschwerten Bogens zu geben. (Fig. 16.)

In diesem Falle wird offenbar die Drucklinie geradlinig von B aus nach einem noch zu bestimmenden Punkte Q gehen, dessen Abstand von der Mitte A der Scheitelfuge mit η_0 bezeichnet werden möge, und zwar positiv oder negativ, je nach der Lage gegen das angenommene Coordinatensystem, in welchem x_φ und y_φ die Coordinaten der Bogenfugenmitten und ξ_φ, η_φ die der Drucklinie bedeuten.

Für irgend eine Fuge im Winkelabstand φ von der Vertikalen durch den Scheitel beträgt der im Punkte N angreifende und in Richtung der Drucklinie wirkende Druck $D_\varphi = \frac{P}{2 \sin \psi}$. Dieser zerlegt sich in zwei Componenten, von denen uns die senkrecht zur Fugenrichtung stehende $D'_\varphi = \frac{P \cos(\varphi - \psi)}{2 \sin \psi}$ interessirt.

Beträgt nun der Abstand NM des Druckmittelpunkts von der Fugenmitte weniger als $\frac{1}{6} b$, worin b die als constant vorausgesetzte Bogendicke bezeichnet, so vertheilt sich jener Druck D' gerade noch auf die ganze Fugenfläche und bringt, unter Annahme des von Herrn Prof. Culmann angewandten Vertheilungsgesetzes, in der am stärksten comprimirten Fugenkante einen Elementardruck

$$\delta = \frac{D'\varphi}{2b}\left(1 + \frac{3\,\overline{MN}}{b}\right)$$

hervor, wie man leicht findet, wenn man berücksichtigt, dass nach jenem Gesetze die Elementardrücke proportional den Ordinaten eines Trapezes sind, dessen Fläche gleich dem Gesammtnormaldruck D'_φ ist und dessen Schwerpunkt mit dem Angriffspunkt von D'_φ zusammenfällt.

Mittelst einfacher trigonometrischer Beziehungen ergiebt sich aber, so lange N unter M liegt:

$$\overline{NM}=\frac{y_\varphi-\eta_0}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\psi-\alpha)}{\cos(\varphi-\psi)}$$

daher:

$$\delta=\frac{P\cos(\varphi-\psi)}{4b\sin\psi}\left\{1+\frac{3}{b}\cdot\frac{y_\varphi-\eta_0}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\psi-\alpha)}{\cos(\varphi-\psi)}\right\},$$

oder wenn man berücksichtigt, dass $\frac{P}{2}\cot\psi$ gleich dem Horizontalschube C und

$$\eta_0=r-(r\cos\varepsilon+r\sin\varepsilon\tang\psi)=r(1-\cos\varepsilon)-\frac{Pr\sin 2}{2C}$$

ist:

$$\delta=\frac{3}{2b^2}\left\{r(1-\cos\varepsilon)\,C-\frac{Pr\sin\varepsilon}{2}-C\,(y_\varphi-\tfrac{1}{2}b\cos\varphi)+\frac{P}{2}(x_\varphi+\tfrac{1}{2}b\sin\varphi)\right\}.$$

Aehnlich würde man für den Fall, wenn N über M läge, erhalten:

$$\delta_1=\frac{3}{2b^2}\left\{-r(1-\cos\varepsilon)\,C+\frac{Pr\sin\varepsilon}{2}+C(y_\varphi+\tfrac{1}{2}b\cos\varphi)-\frac{P}{2}(x_\varphi-\tfrac{1}{2}b\sin\varphi)\right\}.$$

Setzt man $y=r\,(1-\cos\varphi)$, $x=r\sin\varphi$ und führt die Abkürzungen

$$\frac{Pr\sin\varepsilon}{2}=m;\quad r(1-\cos\varepsilon)=n;$$

$$(r+\tfrac{1}{2}b)=p;\quad (r-\tfrac{1}{2}b)=t$$

ein, so heisst der grösste Elementardruck für die Fugen, wo die Druck linie sich unterhalb der Mittellinie befindet:

$$\delta=\frac{3}{2b^2}\left\{-m-(r\cos\varepsilon-p\cos\varphi)\,C+\frac{pP}{2}\sin\varphi\right\}$$

und für die Fugen, wo die Mittellinie unter der Drucklinie liegt:

$$\delta=\frac{3}{2b^2}\left\{m+(r\cos\varepsilon-t\cos\varphi)\,C-\frac{tP}{2}\sin\varphi\right\}.$$

Jede dieser beiden Gleichungen enthält zwei Variabele C und φ, von denen die erstere von der Lage der Drucklinie abhängt, während die letztere sich mit der Lage der betrachteten Fuge ändert.

Denkt man sich die Drucklinie irgendwie festgelegt, so ersieht man leicht aus den beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial(\delta)}{\partial\varphi}=-Cp\sin\varphi+\frac{pP}{2}\cos\varphi=0$$

und

$$\frac{\partial(\delta_1)}{\partial\varphi}=+Ct\sin\varphi-\frac{tP}{2}\cos\varphi=\frac{tP}{2\sin\psi}\sin(\varphi-\psi),$$

dass der Maximalwerth von δ für einen Fugenwinkel stattfindet, der durch die Relation

$$\cos\varphi=\frac{C}{\sqrt{C^2+\frac{P^2}{4}}}=\cos\psi$$

bestimmt ist, während δ_1 mit der Entfernung vom Scheitel abnimmt, weil für den Theil AL des Bogens der Winkel φ höchstens den Werth $2\psi - \varepsilon$ erreichen kann, der Differentialquotient $\frac{\partial(\delta_1)}{\partial \varphi}$ demnach < 0 ist.

Für jede zulässige Lage der Drucklinie erhält man also als Maximalwerthe

$$\delta\,max = \frac{3}{2b^2}\left\{-m - r\,(cos\,\varepsilon - p\,cos\,\psi)\,C + \frac{pP}{2}\,sin\,\psi\right\}$$

und

$$\delta_1\,max = \frac{3}{2b^2}\left\{m + (r\,cos\,\varepsilon - t)\,C\right\}.$$

Ebenso erhellt ferner aus der Gleichung

$$\frac{\partial(\delta)}{\partial C} = -(r\,cos\,\varepsilon - p\,cos\,\varphi),$$

wenn man berücksichtigt, dass die Drucklinie blos innerhalb des mittleren Drittels der Bogendicke liegen darf, d. h. $\frac{1}{6}b > r - r\,cos(\varepsilon - \psi)$ und daher umsomehr obige Klammer stets positiv ist, dass in jeder, folglich auch in der Maximaldruckfuge des Bogenstücks LB der Kantendruck mit dem Wachsen von C sich vermindert. Umgekehrt folgt aus obiger Gleichung für $\delta_{1\,max}$ direct, dass der Kantendruck in der Scheitelfuge durch das Wachsen von C vermehrt wird.

Soll demnach dem Principe der kleinsten Beanspruchung des Bogenmaterials genügt werden, so kann dies blos dadurch geschehen, dass die *maxima maximorum* der Kantendrücke in den Bogentheilen AL und LB gleich werden, d. h. es muss sein:

$$-m - (r\,cos\,\varepsilon - p\,cos\,\psi)\frac{P\,cot\,\psi}{2} + \frac{pP}{2}\,sin\,\psi = m + (r\,cos\,\varepsilon - t)\frac{P\,cot\,\psi}{2}.$$

Für den einfachen Fall eines Halbkreises reducirt sich diese Gleichung zur folgenden:

$$-4m\,sin\,\psi + tP\,cos\,\psi + Pp = 0$$

und es folgt hieraus:

$$tang\,\psi = \frac{-2tr - p\sqrt{t^2 - (p^2 - 4r^2)}}{p^2 - 4r^2} = 2\,\frac{-(r - \frac{1}{3}b)r - (r + \frac{1}{3}b)\sqrt{r(r - \frac{1}{3}b)}}{-3r^2 + \frac{2}{3}br + \frac{1}{3}b^2},$$

daher der Horizontalschub:

$$C = \frac{P}{2\,tang\,\psi} = \frac{-3r^2 + \frac{2}{3}br + \frac{1}{3}b^2}{-r(r - \frac{1}{3}b) - (r + \frac{1}{3}b)\sqrt{r(r - \frac{1}{3}b)}}\cdot\frac{P}{4}.$$

Wie man bemerkt, übt nach dieser Anschauungsweise die Dicke des Bogens einen bedeutenden Einfluss auf die Grösse des Horizontalschubes aus. Die beiden analytischen (praktisch bedeutungslosen) Grenzwerthe sind:

$$\text{für } b = 0 \;\ldots\; C = 0{,}375\,P,$$
$$\text{„ } b = 2r \;\ldots\; C = 0{,}236\,P,$$

während die Navier'sche Biegungstheorie für die vorliegenden Verhältnisse, bei Vernachlässigung der Correction wegen der directen Zusammendrückung des Bogenmaterials auf die Formel

$$C = 0,3018\, P$$

führen würde. Für gewöhnlich in der Praxis vorkommende Bogendicken giebt diese Drucklinientheorie einen etwas grösseren Horizontalschub, als die Navier'sche.

Nach den Bogenbrücken folgen in der „Graphischen Statik" die Hängebrücken, sowohl mit einfachen, als auch, wie bei manchen englischen, mit vertheilten Spannketten (letztere werden in einer deutschen Abhandlung über Kettenbrücken wohl das erste Mal beleuchtet). Die Theorie der Steifigkeitsconstructionen oder besser der Steifigkeitsconstruction, wie sie zuerst Fairbairn bei seinen Versuchen angewandt und Prof. Rankine theoretisch analysirt hat, führt auch graphisch leicht zu den ungünstigsten Belastungen sowohl in Beziehung auf die Biegungsmomente, als auch in Beziehung auf die Scheerkraft und schliesslich zu einer einfachen Art die Inanspruchnahme jedes Constructionstheiles festzustellen.

Der siebente Abschnitt beschäftigt sich mit dem theoretischen Werthe einfacher und zusammengesetzter Constructionen, d. h. mit der Bildung der Summe der Producte der Längen aller Constructionstheile mit der an jedem derselben wirkenden Kraft. Diese Productensumme lässt sich graphisch einfach darstellen und ist offenbar den Kosten der Construction proportional. Es stellt sich heraus, dass bei gleich grossem Tragmodul der continuirliche Balken das geringste, der Pauli'sche Träger das meiste Material erfordert.

Den Schluss des Werkes bildet als achter Abschnitt die Theorie der Stütz- und Futtermauern. Zunächst wird das Gleichgewicht nicht gestützter Erdkörper untersucht. Nach der durch die Erfahrung angenähert gerechtfertigten Annahme, dass die Gleitfläche des abrutschenden Prismas eine Ebene sei, sowie nach Feststellung der an diesem Prisma wirkenden Kräfte und der für ihre graphische Darstellung geltenden Einheitsmaasse, zeigt der Verfasser mittelst einer elementaren Construction, wie der Druck und Schub eines auf einer geneigten Ebene ruhenden Körpers mit der Neigung dieser Ebene zusammenhängt, wobei, wenn auch nicht ausgesprochen, für die Richtung des Widerstandes der Unterstützungsebene von dem Moseley'schen Principe des kleinsten Widerstandes Gebrauch gemacht wird.

Durch Anwendung der eben erwähnten Construction auf die Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen eines nicht gestützten Erdkörpers, dessen vordere Begrenzung steiler, als die natürliche Böschung ist, erhält man den bekannten Satz, dass die Gleitfläche des grössten Druckes den Winkel, den die vordere Begrenzungsebene mit der natürlichen Böschung *bildet, halbirt,* ausserdem aber auch noch folgendes, so viel uns bekannt,

das erste Mal vom Prof. Culmann ausgesprochene, elegante Resultat: „Dreht man die vordere Wand OA, so liegen alle Punkte A, A', A'', welche für Dreiecke mit gleicher Basis auch gleichen Maximaldruck geben, auf einer Parabel, deren Brennpunkt im Fusse O der Wand sich befindet und deren Axe die natürliche Böschung ist.“

Ist der nicht gestützte Erdkörper ausser durch sein eigenes Gewicht noch durch eine über seine obere Begrenzungsfläche gleichförmig verbreitete Belastung in Anspruch genommen, so reducirt sich dieser Fall constructiv in der allereinfachsten Weise auf den vorigen und es lassen sich in beiden Fällen aus den angewandten Constructionen die gewöhnlichen analytischen Ausdrücke leicht ableiten.

Nachdem die wichtigsten Fragen, welche sich auf Erdreibung und Cohäsion beziehen, erörtert worden, folgt die Untersuchung des Druckes eines Erdkörpers gegen eine ihn stützende Wand. Hierbei wird die vordere Begrenzung und die Belastung des Erdkörpers beliebig, nur an der Stelle, wo die Trennungsebene ausmündet, die obere Begrenzung als eine Ebene angenommen und die Belastung dem Flächeninhalte ihres Querschnittes in der Zeichnung proportional vorausgesetzt, wobei jedoch die Belastung auf die Strecke, wo die Trennungsebenen ausmünden können, durch einen Parallelstreifen darzustellen sein muss.

Bei dieser Annahme stösst man freilich wieder auf die bekannte Schwierigkeit, dass man, bevor man zu rechnen anfängt, diejenige Seite des Erdprofils kennen muss, die von der Gleitfläche des abrutschenden Erdprismas getroffen wird und insofern würde auch das Culmann'sche Verfahren in gewissen Fällen, z. B. bei stark überhöhten Stützmauern, an Unbestimmtheit leiden. Man umgeht jedoch oft letztere, wenn man von einem von Poncelet ausgesprochenen und von Saint-Guilhem bewiesenen Satz Gebrauch macht, dass nämlich die Gleitfläche, welche dem Eckpunkt einer Polygonseite des Erdprofils entspricht, für diesen Eckpunkt giltig bleibt, wenn derselbe als zur nächsten Polygonseite gehörig angesehen wird. Ist z. B. AO_1 (Fig. 17) die stützende Wand und ABD die mit einer flachen Böschung AB versehene Hinterschüttung, so wird man zunächst die Gleitfläche OC für einen Punkt O der Wand bestimmen, die augenscheinlich noch die Seite AB trifft. Zieht man dann BO_1 parallel zu CO, so bestimmt sich der Punkt O_1 der Wand, dessen Gleitfläche durch die Ecke B geht. Für sämmtliche Wandpunkte unterhalb O_1 ist dann die Seite BD als diejenige zu betrachten, die von den Gleitflächen getroffen wird.

Die in der „Graphischen Statik“ für den Druck, resp. Schub von Erdkörpern auf stützende Wände angegebenen Constructionen schliessen sich zunächst an die von Poncelet mitgetheilten graphischen Methoden an, bieten aber einen bedeutenden Fortschritt gegen jene, insofern hier nicht blos ein neuer Factor, die Cohäsion des Materials, mit berücksichtigt wird, sondern auf rein geometrischem Wege ganz neue Anschauungen gewonnen werden.

Ebenso wie beim nichtgestützten, werden auch für den gestützten Erdkörper aus den angewandten Constructionen alle diejenigen analytischen Ausdrücke herausgelesen, die aufzustellen bis jetzt gelungen ist, worauf die Anleitung zur Auffindung des Druck- oder Schubmittelpunktes mittelst Anwendung des Seilpolygons folgt. Bei dieser Gelegenheit macht der Verfasser auf die beschränkte Giltigkeit der von Poncelet auf analytischem Wege abgeleiteten oberen Grenze für den Angriffspunkt der Druckmittelkraft aufmerksam und giebt eine allgemeinere, auch für überhöhte Erdkörper geltende analytische Ableitung.

Als Anwendungen findet man: Untersuchungen der Stabilität von Futtermauern mit und ohne Berücksichtigung der Cohäsion, mit und ohne Ueberhöhung. Für letzteren Fall sind auf mehreren Tafeln übersichtlich die Aenderungen der Verhältnisse bei verschiedenen Mauerprofilen und Reibungswinkeln zusammengestellt. Eine Untersuchung über den zweckmässigsten Querschnitt einer Stützmauer führt auf das Dreieck und es wird daher für die anzunehmenden Profile der Futtermauern als obere Breite nur $\frac{1}{10}$ der Höhe vorgeschrieben, wonach eine kleine Tabelle für approximative, leicht construirbare Stärken der Futtermauern mitgetheilt wird.

Um den Druck auf Tunnelgewölbe construiren zu können, wird der Druck auf den untern Theil einer sich drehenden Wandfläche bestimmt. Hierbei stösst man constructiv, wie dies ja auch auf dem analytischen Wege geschieht, für den Fall, wenn die vordere Wand mit der Horizontalen einen Winkel bildet, der dem Reibungswinkel von Erde auf Mauerwerk gleich ist, auf gewisse Widersprüche, die sich wohl blos durch eine strengere Theorie des Erddrucks, welche nicht von abrutschenden Prismen, sondern von Erdkörperelementen ausgeht, vollständig heben lassen werden.

Nimmt man jedoch schliesslich an, dass in diesem Falle das Gewicht des über der natürlichen Böschung stehenden Erdprismas sich in der Art über seine Stützfläche vertheilt, dass das Maximum des Erddrucks pro Längeneinheit an jeder Stelle dieser Fläche durch die entsprechende Höhe des Erdprismas angegeben wird, so ist man auch im Stande, den auf jedes Element eines Tunnelgewölbes kommenden Druck zu construiren und demnach auch eine passende Drucklinie einzuzeichnen. Ein derartiges Beispiel für das rationelle, eiförmige englische Tunnelgewölbe schliesst das Werk.

Ueberblickt man, welch ein reichhaltiges Material und mit wie ganz neuen Mitteln in dem besprochenen Werke bewältigt worden ist, so überzeugt man sich, dass dasselbe, um gehörig gewürdigt, auch gehörig studirt sein will. Dieses Studium empfehlen wir aber aufs Angelegentlichste. Prof. Culmann's graphische Statik enthält manches Neue, viel Interessantes und ausserordentlich viel Praktisches.

Dr. W. Fränkel,
Assistent am k. Polytechnikum zu Dresden.

Propädeutik der Geometrie. Eine Bearbeitung der geometrischen Formenlehre nach einer neuen Methode, gegründet auf praktische Aufgaben aus der Geodäsie. Von Jacob Falke, Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Arnstadt. Leipzig, Quandt und Händel. 1866.

Zwar kann jeder geistig Gesunde die Geometrie begreifen; aber es giebt mathematische Köpfe und solche, die es nicht sind. Durch diese letzteren sind Mathematiker und Pädagogen veranlasst worden, vor dem Beginn des eigentlichen geometrischen Unterrichts eine Stufe einzuschalten, auf welcher der Schüler zum Studium der eigentlichen Geometrie vorbereitet werden soll. Die zahlreichen Versuche in dieser Richtung werden durch das vorliegende Buch um einen vermehrt und zwar um einen so originellen, dass er wohl auch in dieser Zeitschrift eine kurze Erwähnung verdient.

Das Buch zerfällt in drei Theile: Grundsätze der Propädeutik, Vorbereitung zum geometrischen Abstrahiren durch instinctive Lösung geodätischer Aufgaben und Uebergang von der instinctiven Praxis zur geometrischen Abstraction.

Der erste Theil zeigt uns den Verfasser als einen guten Beobachter der kindlichen Natur und als einen Denker, welcher Beobachtungen zu benutzen versteht. Wer auch mit seinem Grundgedanken, welcher lebhaft an Schopenhauer erinnert, nicht einverstanden sein sollte, wird ihm dennoch mit Interesse bis zum Ende folgen.

Der zweite Theil beginnt mit der Messung der Entfernung zweier Wege, welche einen dritten durchschneiden, auf eben diesem dritten. Die Messung geschieht zunächst durch Fusse, wobei der Schüler findet, dass der Ort, nach welchem hin gemessen wird, ausdehnungslos sein, durch einen Stab markirt werden und für das Fortschreiten die Richtung angeben muss. Der Fuss wird seiner Unbestimmtheit und Unbequemlichkeit wegen mit der Messkette vertauscht, wobei der Schüler entdeckt, dass man Messstäbe braucht, und dass die Kette angezogen und genau in die vorgeschriebene Richtung gebracht werden muss. Hierauf folgt der Messtisch, der nach und nach, wie der Schüler die Unvollkommenheiten desselben entdeckt, verbessert wird. So wird nach und nach die Karte entworfen.

Im dritten Theile folgt endlich die Abstraction. Der „Ort, welcher ausdehnungslos war“, wird zum Punkte; der „Weg, welcher zwei ausdehnungslose Orte mit einander verbindet“, zur Linie; der „Weg, welcher zwei ausdehnungslose Orte verbindet und überall dieselbe Richtung hat“, zur Geraden u. s. w. Daran schliesen sich der erste und zweite Congruenzfall, Aehnlichkeit der Dreiecke, Construction der Dreiecke mit den dazugehörigen Kreissätzen, der dritte Congruenzfall, Sätze und Aufgaben über den Kreis, Parallelen, Flächeninhalt und der Pythagoräische Lehrsatz und zwar so, dass eben nur begrifflich entwickelt wird, was der Schüler vorher praktisch ausführte.

Ich denke, dass sich der Leser nach dem Mitgetheilten ein ohngefähres Bild von dem Gange und der Absicht des Verfassers zu entwerfen im Stande ist, und hoffe, dass Diejenigen, welche sich für die Unterrichtsmethode interessiren, diese Propädeutik nicht unbeachtet lassen.

Jena. Dr. BARTHOLOMÄI.

Lehrbuch der technischen Physik von Dr. FERDINAND HESSLER, weil. Professor am k. k. polytechnischen Institute in Wien etc. Nach dem Tode des Verfassers fortgesetzt und umgearbeitet von Dr. FR. JOS. PISKO, Professor in Wien. Dritte, dem neuesten Stande der Wissenschaft entsprechende Auflage. In zwei Bänden. Mit 891 dem Texte eingedruckten Holzschnitten. Wien, Wilhelm Braumüller, k. k. Hof- und Universitätsbuchhändler. 1866.

Der erste Band dieses Werkes, enthaltend Mechanik, Akustik, Magnetismus, Reibungselektricität und elektrische Ströme, ist von Hessler; der zweite Band, Schluss der Elektricität, Optik, Wärme, ist nach Hessler's Tode von Pisko bearbeitet worden. Nach der Vorrede von Hessler hat das Werk die Bestimmung, als Leitfaden bei den physikalischen Vorträgen an (österreichischen) höheren technischen Schulen, sowie beim Selbststudium zu dienen; es geht hieraus Einzelnes in der Einrichtung hervor: Mechanik, der an oben genannten Schulen eigene Vorträge gewidmet sind, ist, sofern sie mit der Physik nicht unmittelbar zusammenhängt, weggelassen worden; ferner ist nur Gebrauch von der Elementarmathematik gemacht worden (ein Supplementband, mit höherer Mathematik durchgeführt, soll folgen), es ist besondere Rücksicht auf Anfertigung der gebräuchlichsten Apparate, eigene Anstellung der Versuche und auf die neuesten Arbeiten im Gebiete der Physik genommen worden. Ehe wir zur Beurtheilung des ersten Bandes übergehen, bemerken wir zuerst, dass nach dem in Hessler's Vorrede angedeuteten Zwecke des Buches, als Leitfaden an technischen Schulen zu dienen, erwartet werden muss, dass der dargebotene Stoff einem höheren wissenschaftlichen Standpunkte entspreche. Dass ein solcher Standpunkt unverrückt festgehalten worden ist, ergiebt sich aus der fast überall hervortretenden Klarheit im Vortrage und aus der Besprechung auch der neuesten Forschungen im Gebiete der Physik, was offenbar auf den Leser ebenso anregend einwirken muss, als die im Buche häufig vorzufindenden Andeutungen zur Anstellung von Explicationsversuchen und zu Anfertigung von Instrumenten, sowie als die jedem Gegenstande folgenden Citate aus der Literatur des betreffenden Gegenstandes. Der für technische Einrichtungen sich interessirende Leser wird schnell mit dem Buche durch die überall durchgeführte Beschreibung und Besprechung nützlicher Werkzeuge, Instrumente und Maschinen befreundet werden.

Erster Band. Es mag als Beleg zu dem oben im Allgemeinen Gesagten dienen, dass die Erklärung interessanter Einrichtungen und Appa-

rate auch hier recht eingehend gegeben worden ist. Im Kapitel „Messen“ findet man den Nonius, das Glasmikrometer, den Comparator, Fühlhebel, das Schraubenmikrometer, Sphärometer, die Theilmaschine, das Cathetometer und das Calibriren besprochen. Federuhren, Federwagen schliesen an die Elasticität an, Wasserpressen, Turbinen, Bestimmung des specifischen Gewichtes, Aräometer folgen in ausführlicher Behandlung der Hydrostatik. Die herrlichen Fortschritte in der Akustik sind diesem Kapitel in gedrängter Darstellung beigefügt. Die chemischen Wirkungen des galvanischen Stromes, welche recht gut dargestellt sind, geben natürlich Gelegenheit, ausführlich über Galvanoplastik und Galvonakaustik zu sprechen. Die telegraphische Leitung ist ausführlich und vollständig, der telegraphische Blitzableiter an einem Beispiele, die frühere optische Telegraphie allerdings gar nicht, die jetzige Telegraphie mit Weglassung der Zeigertelegraphen, dagegen der Haustelegraph, die elektrischen Uhren und das Telephon besprochen. Die Besprechung über Leistung der Kräfte hätte wohl klarer nach Redtenbacher's vorzüglichen „Principien der Mechanik und des Maschinenbaues“ erfolgen, die Nachweisung der Gesetze des Wurfes ungezwungener mit vollständiger Benutzung der analytisch-geometrischen Formeln dafür geschehen können. Seite 446, erste Zeile von oben ist zu lesen: „Nach Bourbogne zeigt eine elektrisirte und wohl isolirte hohle Metallkugel, wenn man durch ein Loch, womit sie versehen ist, eine Probescheibe einführt, an der innern Oberfläche die nämliche Elektricität und in gleicher Menge, wie an der äussern; es breitet sich daher die Elektricität auf der einen, wie auf der andern Oberfläche gleichmässig aus.“ Die Versuche von Coulomb, Faraday, Franklin, Magnus, die bekanntlich ein entgegengesetztes Resultat ergeben haben, sind nicht erwähnt.

Zweiter Band. Die applicatorische Richtung des Werkes tritt auch im zweiten Band deutlich hervor, dessen Inhalt ist: Gesetze des Leitungswiderstandes, Ursachen des Elektricitätsstromes, atmosphärische Elektricität, Optik und Wärmelehre. Man wird die eingehendsten physikalischen Erläuterungen in den ausführlichen Abhandlungen über Polarisationsbatterien, Blitzableiter, optische Instrumente, Photographie, Thermometrie, Dampf- und Luftmaschinen erkennen. Anregung zum Experimentiren wird hinreichend gegeben durch die Behandlung der Farbenzerstreuung, Thermometrie etc. Ebenso ist dem Theoretischen überall die nöthige Aufmerksamkeit geschenkt, wovon Zeugniss ablegen die Abschnitte über Elektricitätsquellen, Fluorescenz, Undulationstheorie des Lichtes, Wärmestrahlung. Im Interesse der Darstellung der absoluten Maasse der galvanischen Stromstärke, der elektromotorischen Kraft und des Leitungswiderstandes hätten wir gewünscht, der Verfasser hätte sich die umfänglichere Aufgabe gestellt, alle diese Maasse in noch innigerem Zusammenhange mit den statischen Maassen der Elektricität und des Magnetismus abzuhandeln; es hätte die Abhandlung dadurch wesentlich an Klarheit gewonnen und

wäre trotz grösserer Umfänglichkeit assimilationsfähiger für den Schüler geworden. Die mechanische Wärmetheorie erscheint mir etwas dürr; die erforderliche Schärfe vermisst man an folgender Definition: das Wärmeäquivalent beträgt im Mittel 424 Kilogrammmeter, nahezu $65\frac{1}{2}$ Pferdekräfte; erstere Bestimmung ist unabhängig von der Zeit, letztere bezieht sich auf die Secunde und könnte daher der Satz in dieser Kürze ausgesprochen den Schüler verwirren.

Um endlich das bisher entworfene Bild des im Grossen und Ganzen recht wackeren Lehrbuches noch zu vervollständigen, weisen wir auf 29 den Schluss des Werkes bildende, recht brauchbare physikalische Tabellen hin. Inhaltsverzeichnisse am Anfang jeden Bandes, ein Register am Ende des Werkes unterstützen das Nachschlagen. Der Druck ist gut, die Holzschnitte deutlich, wenn auch nicht immer elegant; der Preis des ganzen Werkes, $4\frac{2}{3}$ Thaler, ist nicht zu hoch gegriffen, da dem Publicum in Wahrheit für diesen Preis etwas recht Tüchtiges geboten wird.

Dr. Kahl.

Giesel, die Entstehung des Newton-Leibnitz'schen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Beilage zum Programme der höheren Bürgerschule zu Delitzsch. Ostern 1866.

Referent veröffentlichte im Jahre 1863 im 10. Bande der Sybel'schen historischen Zeitschrift einen Aufsatz unter dem Titel: „War Leibnitz ein Plagiator?", in welchem er versuchte, die ihm bekannten Thatsachen zur Entscheidung des berühmten Prioritätsstreites zusammenzustellen, und die Aufmerksamkeit auch auf einige vor ihm noch nicht hervorgehobene Punkte zu lenken. Herr Gerhardt liess im 11. Bande der genannten Zeitschrift einen „nothwendigen Zusatz" folgen. Mag sein, dass dieser Zusatz nothwendig war, um mit dem Gegenstande unbekannten Lesern die Meinung beizubringen, Herr Gerhardt habe sich um dieses Kapitel der Geschichte der Mathematik unsterbliche Verdienste erworben. Zur Sache selbst bot der Zusatz auch nicht das Mindeste, was uns hätte veranlassen können, nochmals zu erwidern; denn eine ganz subjective, blos stylistische Beurtheilung hat ebensowenig das Recht, öffentlich zurückgewiesen zu werden, als ihre erste Veröffentlichung uns zulässig erscheint. Wir glaubten, wir gestehen es offen, den Prioritätsstreit erschöpfend behandelt zu haben, als vor etwa einem Jahre die in der Ueberschrift dieser Recension genannte Programmbeilage erschien, welche uns zeigte, dass doch noch Lücken vorhanden waren, welche von wirklich befugter Seite hier ausgefüllt wurden. Was wir in der „Kritischen Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik" (Erlangen, 1858) über Giesel's Osterprogramm des Torgauer Gymnasiums „Geschichte der Variationsrechnung" sagen durften, dass in anspruchslosem Gewande ein Schatz von gründlichem Wissen und *aufrichtigem* Streben uns entgegentrete, das können wir heute Wort für

Wort wiederholen; und wenn wir damals jenes Urtheil über den uns gänzlich unbekannten Schriftsteller ausgesprochen, so wird man uns die heutige Erneuerung desselben nicht übel deuten, wenn auch inzwischen wissenschaftlicher Verkehr ein Band der Freundschaft zwischen uns geknüpft hat, auf welches Referent stolz ist. Die uns gegenwärtig vorliegende Programmbeilage ist im Texte nur neun Quartseiten lang, wozu noch acht Seiten Anmerkungen kommen; aber in diesem kurzen Raume ist eine solche Fülle von genauen Forschungsresultaten enthalten, dass es einem nicht einmal übermässig breit schreibenden Autor leicht fallen würde, einen ganzen Band daraus zu machen. Ja vielleicht dürften wir Herrn Giesel es verübeln, dass er eine solche ausführliche Behandlung nicht vorzog, wenn wir nicht wüssten, dass der treffliche Gelehrte leider durch ein Uebermaass täglicher Beschäftigung verhindert ist, sich der Wissenschaft so hinzugeben, wie es zu deren Vortheil wünschenswerth wäre. In der compendiösen Form, in welche jetzt die Abhandlung eingezwängt ist, erscheinen nur dem Kenner die wichtigen Ergebnisse als Das, was sie sind; der Laie wird leichtlich darüber hinweggehen, ohne sie zu bemerken. Wir halten es daher für unsere Pflicht, wenigstens einige Stellen hervorzuheben, an welchen Herr Giesel uns selbst berichtigt und ergänzt, ohne es besonders zu sagen.

Wir hatten über Newton's sogenannte Principien die Meinung ausgesprochen, ihre geometrische Beweisform beruhe darauf, dass der Verfasser fürchtete, so neue Resultate durch neue Methoden weniger glaubwürdig darstellen zu können. Giesel's Note 13 giebt für diese Meinung die zwingenden Belege aus Wallis; aus der von Edleston herausgegebenen Correspondenz, aus dem *Commercium epistolicum*, aus den *Philosophical Transactions.*

Wir hatten von dem Beschwerdebrief Leibnitzens an die englische königliche Gesellschaft vom 4. März 1711 gesprochen; wir hatten hervorgehoben, dass Leibnitz verlangte, die Gesellschaft solle Keill zur Rücknahme seiner Anklage nöthigen. Giesel's Note 58 macht insbesondere auf die Worte aufmerksam: *itaque vestrae aequitati committo, annon coercendae sint vanae et injustae vociferationes*, und im Text S. 9 beutet er dieselben mit Recht zu der Bemerkung aus: Leibnitz forderte die Gesellschaft selbst zur Untersuchung des ganzen Streites auf.

In demselben Beschwerdebriefe erinnert Leibnitz daran, dass in dem Streite zwischen ihm und Fatio die Gesellschaft durch ein Schreiben des Secretärs Sloane sich auf seine Seite gestellt habe. Wir machten wahrscheinlich zuerst auf diese Stelle aufmerksam, setzten aber hinzu: „Von diesem Briefe finde ich auffallender Weise nirgends sonst eine Erwähnung.“ Giesel war glücklicher, als wir. Seine Note 47 giebt einen Brief von Wallis (29. August 1699) und einen zweiten von Leibnitz (24. November 1699) an, welche auf diese Thatsache sich beziehen.

Wir hatten irriger Weise angegeben, das *Commercium epistolicum* sei nur an Freunde Newton's versandt worden. Giesel zeigt S. 10, dass auch in Deutschland durch den Wittenberger Arzt Vater Exemplare vertheilt wurden, und stützt sich dafür (Note 63) auf den Briefwechsel zwischen Leibnitz und Wolf. Aus dem betreffenden Briefe Wolf's vom 6. Februar 1714, also allerdings fast acht Monate später geschrieben, als Leibnitz durch Joh. Bernoulli von der Herausgabe jener parteiisch gefärbten Briefsammlung erfuhr, ergiebt sich, dass an alle irgend bekannte Gelehrte in Frankreich, Italien, Holland und Deutschland Exemplare officiell versandt wurden. (*Immo quorum nomina Societati cognita fuere*, *illa quoque libello praemissa fuere.*) Auch für Leibnitz selbst hatte Vater ein Exemplar zugeschickt erhalten und es an Wolf zur weiteren Besorgung übergeben, bei welchem es sich noch befand, als er jenen Brief schrieb.

Wir hatten mit Guhrauer angenommen, die anonyme Recension der Newton'schen *Quadratura Curvarum* in den *Act. Erud.* vom Januar 1705 rühre von Leibnitz her und stützten diese Beistimmung auf Randbemerkungen des Leipziger und des Heidelberger Bibliothekexemplares jener Zeitschrift. Giesel bestätigt in Note 53 die Vermuthung und widerlegt zugleich, was nicht weniger wichtig ist, unsere Begründung. Er citirt nämlich einen Brief Mencke's, des Herausgebers der Leipziger Zeitschrift, an Leibnitz vom 12. November 1704, der mit den Worten anfängt: „Hirauf habe berichten sollen, dass gestern Dero relation von des Herrn „Newton zweyen Algebraischen tractaten endlich bei mir eingelaufen, „undt sage ich dafür gehorsamsten Danck.“ Dass Herr Gerhardt, in dessen Ausgabe des Briefwechsels zwischen Leibnitz und Wolf der Brief abgedruckt ist (S. 15), die grosse Bedeutung dieser Worte nicht hervorhebt, ist ihm umsomehr zu verübeln, als er zu der sehr allgemeinen Anmerkung Raum findet, dass das Schreiben von Interesse sei! Giesel zeigt ferner, wie schon gesagt, dass den auch übereinstimmenden Randbemerkungen der Leipziger, Heidelberger und Dresdner Exemplare der *Act. Erud.* nicht immer Glauben zu schenken ist. Er beweist nämlich, dass die auf solche Beweisführung hin Wolf angehörende *Epistola pro eminente mathematico D. Joh. Bernoullio*, *Act. Erud.* 1716 pag. 296—314, in Wirklichkeit von Bernoulli selbst herrührt. Wolf scheint nur wenige stylistische Veränderungen vorgenommen zu haben, z. B. Verwandlung der ersten Person in die dritte, wobei ihm aber pag. 314 „*meam formulam*“ entging.

Mit diesen kurzen Auszügen sind wir weit entfernt davon, Alles erschöpft zu haben, was in Giesel's Programm von lehrreichem Stoffe aufgehäuft ist. Wir wollten nur Proben der Reichhaltigkeit der kleinen Schrift geben, und dazu Dinge auswählen, welche uns neu zu sein scheinen und mit welchen wir uns einverstanden zu erklären wünschen. Im Uebrigen verweisen wir unsere Leser auf das Programm selbst.

CANTOR.

Le Messâhat de Mohammed ben Moussa al Khârezmi, *extrait de son Algèbre traduit et annoté par Aristide Marre. 2e édition revue et corrigée sur le texte arabe publié par Rosen. Rome* 1866.

Das den Geschichtskundigen unter dem Namen der Algebra des Mohammed ben Moussa bekannte Werk wurde zum ersten Male 1831 von Rosen im arabischen Grundtexte nebst englischer Uebersetzung herausgegeben. Das Werk enthält neben einem algebraischen und arithmetischen Theile auch einen Theil der rechnenden Geometrie, wie man ihn vielleicht bezeichnen könnte, das Bâb al Messâhat, wörtlich: Das Thor der Messkunst. Herr Aristide Marre veröffentlichte 1846 eine französische Uebersetzung dieses Kapitels in den *N. ann. math. V*, 557—570, welcher aber selbst die englische Uebersetzung als Urtext zu Grunde lag. Gegenwärtig hat Herr Marre mit Benutzung des arabischen Originals seine damalige Uebersetzung einer neuen Prüfung unterworfen, und diese verbesserte Darstellung, verbunden mit reichhaltigen Anmerkungen, ist es, welche uns in dem siebenten Bande der in Rom erscheinenden *Annali mat.* und in einem Separatabzuge von vierzehn Seiten vorliegt. Man darf dieselbe füglich eine ganz neue Arbeit nennen, und insbesondere die Anmerkungen zeigen kaum entfernte Aehnlichkeit mit denjenigen, welche S. 570—581 des erwähnten Bandes der *Nouvelles annales de mathématiques* abgedruckt sind.

Was den behandelten Gegenstand betrifft, so besteht er wesentlich aus der Berechnung von Flächeninhalten ebener Figuren, welche durch Formeln gelehrt wird, in deren Herleitung ihr Beweis mit inbegriffen ist. Vorausgesetzt und somit unbewiesen ist der Werth der Zahl π, welche in dreifacher Annäherung angegeben wird:

$$\pi = \frac{22}{7}, \quad \pi = \sqrt{10}, \quad \pi = \frac{62832}{20000},$$

wovon aber in der Durchführung nur der erstere Werth benutzt wird. Auch der Pythagoräische Lehrsatz wird eigentlich vorausgesetzt, denn der angegebene Beweis ist ein Anschauungsbeweis, der nur für den Fall des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks in dieser Art möglich ist. Herr Marre folgert daraus wohl mit Recht, dass al Khârezmi sein Werk nicht für Mathematiker, sondern für Praktiker geschrieben habe, welche auf die Autorität des Schriftstellers hin die vorgeschriebenen Rechnungen ausführten, ohne viel nach der Begründung der allgemeinsten Fälle zu fragen.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. März bis 1. Mai 1867.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-phys. Classe. 1866. 4. und 5. Band. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1866. 2. Band. 3. und 4. Heft. München, Franz. à 16 Ngr.

Journal für reine und angewandte Mathematik, herausgeg. von C. W. Borchardt. 67. Bd. 1. Heft. Berlin, Reimer. pro compl. 4 Thlr.

Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von C. Bruhns. 2. Jahrg. (1867). 1. Heft. Leipzig, Engelmann. ⅓ Thlr.

Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von. J. C. Poggendorff. Jahrg. 1867. 1. Heft. Leipzig, Barth. pro compl. 9⅓ Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1864. 20. Jahrg.; redigirt von E. Jochmann. 2. Abth. Berlin, Reimer. 2⅔ Thlr.

Reine Mathematik.

KLEIN, H. J., Grundzüge der höheren Analysis, der Differential- und Integralrechnung. Erlangen, Enke. 16 Ngr.

HELMLING, P., Studien zur Integralrechnung. Lpzg, Köhler. 2 Thlr.

ASCHENBORN, K. H. M., Lehrbuch der Arithmetik mit Einschluss der Algebra und niederen Analysis. 2. Aufl. Berlin, Hofbuchdruckerei v. Decker. 2 Thlr.

SASS, J. B., Buchstabenrechnung und Algebra, Uebungsbuch. 1. Theil. 4. Aufl. Altona, Schlüter. 27 Ngr.

KUMMER, E. E., Ueber die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung. (Akad.) Berlin, Dümmler. 1⅓ Thlr.

KOPPE, K., Die Stereometrie. 7. Aufl. Essen, Bädeker. 12 Ngr.

WIEGAND, A., Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. 5. Aufl. Halle, Schmidt. $\frac{1}{3}$ Thlr.

KÖCHER, Stereometrie, neu bearbeitet von Sadebeck. Breslau, Aderholz. $13\frac{1}{2}$ Ngr.

Angewandte Mathematik.

STRECKFUSS, W., Perspective des rechten Winkels in schräger Ansicht. Neue Constructionen. Breslau, Trewendt. $\frac{1}{2}$ Thlr.

REINSCH, P., Das Mikroskop in seiner Bedeutung für die Erweiterung der Naturerkenntniss etc. Nürnberg, Stein. $2\frac{1}{3}$ Thlr.

Physik.

Encyklopädie der Physik, herausgeg. von Karsten. 19 Lieferungen. Leipzig, Voss. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

HELMHOLTZ, H., Handbuch der physiologischen Optik. Leipzig, Voss. 10 Thlr.

KNOBLAUCH, Ueber die Interferenz der Wärmestrahlen. Halle, Schmidt. 6 Ngr.

RADAKOWITSCH, N., Zur Wärmelehre vom Standpunkte der Emanationstheorie. Göttingen, Dietrich. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

WEBER, W., Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über Diamagnetismus. Leipzig, Hirzel. $\frac{2}{3}$ Thlr.

LAMONT, J., Handbuch des Magnetismus. Leipzig, Voss. 5 Thlr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1866.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. Ueber den mittleren Abstand ebener Linien von einem Punkte. Wetzig. Zeitschr. Math. Phys. XI, 15.
2. Ueber die Summen der Cotangenten der Winkel, welche die Transversale einer algebraischen Curve mit der Curve bildet. Hunyady. Zeitschr. Math. Phys. XI, 77. [Vergl. Bd. XI, No. 225.]
3. Beiträge zur Theorie der ebenen Rouletten. Hennig. Crelle LXV, 52.

Analytische Geometrie des Raumes.

4. Plücker's neue Raumgeometrie. Dronke. Zeitschr. Math. Phys. XI, 46.

Astronomie.

5. *Sur la variation du moyen mouvement de la lune. Bertrand. Compt. rend. LXII,* 162. — *Delaunay ibid.* 165, 197, 575, 1107. — *Allégret ibid.* 434, 1284. — *Dubois ibid.* 649.
6. *Sur la controverse relative à l'équation séculaire de la lune. Delaunay. Compt. rend. LXII,* 704.
7. Sätze aus der Störungstheorie. Scheibner. Crelle LXV, 291.
8. Entwickelung von Differentialformeln zur Verbesserung einer Planeten- oder Kometenbahn nach geocentrischen Orten. Oppolzer. Wien. Akad.-Ber. XXXXIX, 271.

   Vergl. Geschichte der Mathematik 61. Refraction 142.

B.

Bestimmte Integrale.

9. Allgemeine Formeln zur Schätzung und Grenzbestimmung einfacher Integrale. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LII, 57.
10. Ueber die Convergenz der bestimmten Integrale. Popper. Wien. Akad. *Ber. LII,* 517.

11. Einige Eigenschaften der Transcendenten, welche aus der Integration homogener Functionen hervorgehen. Winckler. Wien. Akad.-Ber. L, 531.
12. Transformation und Berechnung einiger bestimmten Integrale. Blazek. Wien. Akad.-Ber. L, 60.
13. Ueber einige bestimmte Integrale. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XI, 251.
    Vergl. Determinanten. Elliptische Transcendenten. Ultraelliptische Transcendenten. Variationsrechnung.

C.

Capillarität.

14. *Mémoire sur les phénomènes capillaires.* *Roger.* *Compt. rend. LXII,* 134.

Cartographie.

15. *Sur la représentation plane de la surface du globe terrestre.* *Collignon.* *Compt. rend. LXII,* 881. [Vergl. Bd. VIII, No. 30.]

Convergenzbedingungen.

16. *Démonstration nouvelle d'un théorème de Gauss relatif aux séries.* *Rouché.* *N. ann. math. XXV,* 10.
17. Theorie der Convergenz unendlicher Reihen. Popper. Wien. Akad.-Ber. LII, 496.
    Vergl. Bestimmte Integrale 10.

D.

Determinanten.

18. Ueber eine Determinant bestimmter Integrale. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XI, 69.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

19. Ueber invariantive Elemente einer orthogonalen Substitution, wenn dieselbe als Ausdruck einer Bewegung jeder Gruppe von Werthen der Variabeln aus dem identischen Zustande in den transformirten gefasst wird. Schlaefli. Crelle LXV, 185.
20. Erweiterung des Satzes, dass zwei polare Dreiecke perspectivisch liegen auf eine beliebige Zahl von Dimensionen. Schlaefli. Crelle LXV, 189.
21. Ueber das von einem Punkte des Umkreises aus construirte Fusspunktsdreieck eines gegebenen Dreiecks mit analogen räumlichen Untersuchungen. Hunyady. Zeitschr. Math. Phys. XI, 64.
    Vergl. Tetraeder 158.

Differentialgleichungen.

22. Transformation von Differentialausdrücken erster Ordnung zweiten Grades mit Hilfe der verallgemeinerten elliptischen Coordinaten. Henrici. Crelle LXV, 1.
23. Integration der linearen Partialgleichungen mit drei Veränderlichen. Frischauf. Wien. Akad.-Ber. LI, 317.
24. Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Clebsch. Crelle LXV, 257.
    Vergl. Oberflächen 107.

E.

Elasticität.

25. *Sur l'impulsion, la résistance vive et les vibrations des pièces solides.* *De Saint-Venant.* *Compt. rend. LXII,* 130. [Vergl. Bd. XI, No. 262.]

26. *Sur les pertes apparentes de force vive dans le choc des pièces extensibles et flexibles et sur un moyen de calculer élémentairement l'extension ou la flexion dynamique de celles-ci.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXII,* 1195.

Elektrodynamik.

27. Ueber die Bewegung der Elektricität in krummen Flächen. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. LII, 214.

Ellipse.

28. *Triangles inscrits à un cercle et simultanément circonscrits à une ellipse.* Delaunay & De Viaris. *N. ann. math. XXV,* 170. — Ariès & Marmier *ibid.* 172.
Vergl. Parallelcurven.

Ellipsoid.

29. *Quelle est l'enveloppe du plan mené perpendiculairement à l'extrémité du diamètre d'un ellipsoïde. lorsque cette extrémité décrit une circonference?* Duranton. *N. ann. math. XXV,* 139.
Vergl. Tetraeder 157.

Elliptische Transcendenten.

30. Ueber einige elliptische Integrale. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XI, 74.
31. Ueber das Verschwinden der Θ-Functionen. Riemann. Crelle LXV, 161.
32. Ueber Integrale zweiter Gattung und die Werthermittelung der Θ-Function. Roch. Zeitschr. Math. Phys. XI, 53.
33. Ueber die elliptische Constante $\Theta(o)$. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XI, 247.

F.

Factorenfolge.

34. *Démonstration de la relation* $m = \left\{\frac{\sin\frac{\pi}{m}\cdot\sin\frac{2\pi}{m}\cdot\sin\frac{3\pi}{m}\cdots\sin\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{3\pi}{2m}\cdot\sin\frac{5\pi}{2m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right\}^2$, *dans laquelle* m *est un nombre entier pair.* Merce Busco. *N. ann. math. XXV,* 220.

Function.

35. Ueber die Entwickelung von Functionen in Reihen, die nach einer besonderen Gattung algebraischer Ausdrücke fortschreiten. Allé. Wien. Akad.-Ber. LII, 453.
36. Ueber die Eigenschaften derjenigen Gattung von Functionen, welche in der Entwickelung von $(1-2qx+q^2)^{-\frac{m}{2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von q auftreten. Allé. Wien. Akad.-Ber. LI, 429.
37. Ueber die Entwickelung des Ausdrucks
$$\{1-2q\,[\cos\Theta\,.\cos\Theta'+\sin\Theta\,.\sin\Theta'\,.\cos(\psi-\psi')]+q^2\}^{-\frac{m}{2}}.$$
Allé. Wien. Akad.-Ber. LI, 447.
Vergl. Elliptische Transcendenten. Gleichungen 62, 63. Interpolation. Sturm's Functionen. Ultraelliptische Transcendenten.

Fusspunktslinie.

38. *Sur la podaire d'une conique par rapport à un foyer.* Picquet. *N. ann. math. XXV,* 145.

G.

Geodäsie.

39. *De l'effet des attractions locales sur les longitudes et les azimuts.* Yvon Villarceau. *Compt. rend. LXII,* 741.

40. *De la limite des erreurs que l'on peut commettre en appliquant la théorie des lignes géodésiques aux observations des angles des triangles.* Yvon Villarceau. *Compt. rend.* LXII, 850.
Vergl. Pendel.

Geometrie (descriptive).

41. *Sur les lignes d'ombre et d'ombre portée.* Ossian Bonnet. *N. ann. math.* XXV, 71.
42. *Construction de la tangente à la courbe d'ombre de la vis.* Chemin. *N. ann. math.* XXV, 271.
43. *De la projection gauche.* Abel Transon. *N. ann. math.* XXV, 63. [Vergl. Bd. XI, No. 274.]
44. *Si l'on fait la projection gauche d'une figure plane sur un tableau plan et si ensuite on fait tourner l'un des deux plans autour de leur intersection commune, les deux figures demeureront toujours les projections gauches l'une de l'autre.* Marques Braga. *N. ann. math.* XXV, 230.
45. *Sur la transformation quadrique.* Hirst. *N. ann. math.* XXV, 213.
46. *Plans tangents communs à deux cônes de revolution ayant même sommet.* Godart. *N. ann. math.* XXV, 15.
Vergl. Cartographie. Perspective.

Geometrie (höhere).

47. Ueber algebraische Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung. Kummer. Berl. Akad.-Ber. 1865, 288.
48. *Essai d'une théorie des séries et des réseaux de courbes et de surfaces.* De Jonquières. *Compt. rend.* LXII, 293.
49. *Transformation par polaires réciproques des propiétés relatives aux rayons de courbure.* Mannheim. *Journ. Mathém.* XXXI, 193.
50. *Sur la correspondance de deux points sur une courbe.* Cayley. *Compt. rend.* LXII, 586.
51. *Sur les courbes planes ou à double courbure, dont les points se peuvent déterminer individuellement. — Application du principe de correspondance dans la théorie de ces courbes.* Chasles. *Compt. rend.* LXII, 579.
52. *Sur les courbes à points multiples dont tous les points se peuvent déterminer individuellement. — Procédé général de démonstration des propiétés de ces courbes.* Chasles. *Compt. rend.* LXII, 1354.
53. *Relations entre les deux caractéristiques d'un système de courbes d'ordre quelconque.* Chasles. *Compt. rend.* LXII, 325.
54. *Étude de géométrie comparée.* De Longchamp. *N. ann. math.* XXV, 118.
55. *Théorie générale des systèmes de surfaces du second ordre satisfaisant à huit conditions. — Caractéristiques de systèmes élémentaires. — Expression générale du nombre des surfaces déterminées par neuf conditions quelconques.* Chasles. *Compt. rend.* LXII, 405.
56. *Sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques.* De la Gournerie. *Compt. rend.* LXII, 78.
57. *Théorème de M. Steiner sur trois cônes du même degré ayant leurs trois sommets sur la même droite et se coupant suivant des courbes planes.* Merce Busco. *N. ann. math.* XXV, 273. — Viant *ibid.* 276.
Vergl. Perspective.

Geschichte der Mathematik.

58. Harib, Sohn des Zeid, und Garib, Sohn des Said. Steinschneider. Zeitschr. Math. Phys. XI, 235.
59. Ueber die mathematischen Zeitgenossen Friedrich des Grossen. Kummer. Berl. Akad.-Ber. 1865, 62.
60. *Funérailles de M. Bour. Discours de MM. Riffault et Cournot. Journ. Mathém.* XXXI, 133.
61. *Sur une progression arithmétique résultant de certaines dates contenue dans la liste d'étoiles temporaires donnée par Humboldt.* Montucci. *Compt. rend.* LXII, 1241.

Gleichungen.

62. *Méthode de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques des racines des équations.* J. A. Serret. *N. ann. math. XXV*, 76.
63. *Sur une certaine fonction dont on peut faire usage dans la théorie des équations.* Laurent. *Compt. rend. LXII*, 140.
64. *Sur les équations de degré premier résolubles algébriquement.* Despeyrous. *Journ. Mathém. XXXI*, 9.
65. Die Wurzelform der allgemeinen Gleichung des vierten Grades. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. L, 225.
66. *Sur l'équation du cinquième degré.* Hermite. *Compt. rend. LXII*, 65, 157, 245, 715, 919, 959, 1054, 1161, 1213. [Vergl. Bd. XI, No. 294.]
67. *Condition suivant laquelle une racine d'une équation du cinquième degré est une fonction rationelle des coefficients de l'équation.* Niebylowski. *N. ann. math. XXV*, 281.
68. *Résoudre algébriquement l'équation* $[(x+2)^2+x^2]^3 = 8x^4(x+2)^2$. Lebasteur. *N. ann. math. XXV*. 279.
69. *Sur la résolution de l'équation transcendante* $a^x + b^x = c^x$. Qaher Bey. *N. ann. math. XXV*, 129.
70. *Sur les solutions multiples communes à plusieurs équations.* Combescure. *Compt. rend. LXII*, 383.

Vergl. Sturm's Functionen.

H.

Hydrodynamik.

71. *Sur la théorie de la diffusion.* Dupré. *Compt. rend. LXII*, 1072.

Hyperboloid.

Vergl. Tetraeder 156.

I.

Imaginäres.

Vergl. Mechanik 94. Zahlentheorie 169.

Interpolation.

72. Ueber einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrerer Variabeln. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1865, 686.

Involution.

Vergl. Kreis 87.

K.

Kegelschnitte.

73. *Discussion vicieuse de l'équation en* λ *relative à l'intersection de deux coniques.* Amigues. *N. ann. math. XXV*, 142. — Prouhet *ibid.* 143. — Salmon *ibid.* 189.
74. *Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques.* Zeuthen. *N. ann. math. XXV*, 241.
75. *Additions à la théorie des systèmes de coniques.* Zeuthen. *Compt. rend. LXII*, 177.
76. *Propriétés d'un système de coniques* (μ, ν). Chasles. *N. ann. math. XXV*, 204.
77. *Propriétés focales des coniques passant par quatre points.* Recoq. *N. ann. math. XXV*, 157.
78. *Sur le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions données.* Chasles. *N. ann. math. XXV*, 193.

79. *Sur le nombre des coniques qui touchent en cinq points une courbe du cinquième degré.* Berner. *N. ann. math. XXV*, 17.
80. *Sur un théorème relatif à huit points situés sur une conique.* Cayley. *Crelle LXV*, 180.
81. *Sur les lieux géométriques relatifs à un ou plusieurs systèmes de parallèles tangentes à une série de coniques homofocales.* Volpicelli. *Compt. rend. LXII*, 1337.
82. Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten. Hesse. Crelle, LXV, 384.
83. *Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle, qui a une surface constante.* A. S. *N. ann. math. XXV*, 37.
84. *Point de rencontre de deux perpendiculaires sur deux tangentes d'une conique partout du même point.* Desq & Grassat. *N. ann. math. XXV*, 134.

Vergl. Ellipse. Fusspunktslinie. Geometrie (höhere) 54. Kreis. Krümmung. Normalen 99. Parabel. Perspective 127.

Kreis.

85. *Théorème sur le cercle des neuf points d'un triangle donné.* Lacauchie. *N. ann. math. XXV*, 227.
86. *Par moyen d'une conique et d'un point fixe on obtient un certain système de circonférences toutes tangentes à une même circonférence.* Bauquenne. *N. ann. math. XXV*, 277.
87. *Possibilité d'inscrire dans un cercle une infinité de quadrilatères dont les côtes passent par 4 points situés en ligne droite.* De Vigueral. *N. ann. math. XXV*, 180.

Vergl. Parabel.

Krümmung.

88. *Construction d'un cercle osculateur d'une conique.* Lecocq. *N. ann. math. XXV*, 130.

Kugelfunctionen.

Vergl. Functionen 36, 37.

M.

Maxima und Minima.

89. Ueber Maxima und Minima geometrischer Figuren. Satz über die Linie des grössten Flächeninhaltes auf einer beliebigen Fläche. Satz über Polyeder-Maxima. Berner. Zeitschr. Math. Phys. XI, 81.
90. Ueber die Minimumsfläche, deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes windschiefes Viereck gegeben ist. H. Schwarz. Berl. Akad.-Ber. 1865, 149.

Mechanik.

91. *Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.* Dieu. *Journ. Mathém XXXI*, 137.
92. Entwurf einer Molecularphysik. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XI, 177.
93. *Note sur le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume.* Dupré. *Compt. rend. LXII*, 39.
94. Imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Centrifugal- und Gyralkraft. Scheffler. Zeitschr. Math. Phys. XI, 93.
95. Die vielfache Kurbel. Burg. Wien. Akad.-Ber. LI, 198.
96. Zur Theorie eines Systems von Varianten der conoidischen Propellerschraube. Moshammer. Wien. Akad.-Ber. LI, 49.

Vergl. Capillarität. Elasticität. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Optik Potential. Wärmelehre.

N.

Normalen.

97. *Sur le déplacement contenu d'un corps solide; nouvelle méthode pour déterminer les normales aux lignes ou surfaces décrites pendant ce déplacement.* Mannheim. *Compt. rend. LXII*, 1386.
98. *De la longueur des normales de deux courbes dont l'une est la transformée de l'autre par rayons vecteurs réciproques par rapport à un point donné.* Violland. *N. ann. math. XXV*, 168.
99. Ueber die Normalen der Kegelschnitte. Geiser. Crelle LXV, 381.
100. *Les six normales menées par un point à une surface du second degré se trouvent sur un cône du second degré.* *A. P.* *N. ann. math. XXV*, 266.

O.

Oberflächen.

101. *Sur la déformation des surfaces.* Jordan. *Journ. Mathém. XXXI*, 105.
102. *Recherche des points à l'infini sur les surfaces algébriques.* Painvin. *Crelle LXV*, 112, 198.
103. *Des contours tracés sur les surfaces.* Jordan. *Journ. Mathém. XXXI*, 110.
104. *Théorie des surfaces polaires d'un plan.* Painvin. *N. ann. math. XXV*, 49, 67. [Vergl. Bd. XI, No. 358.]
105. *Sur les sections circulaires des surfaces du seconde ordre et les ombilics des surfaces quelconques.* Smollart. *Crelle LXV*, 320.
106. *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface gauche soit doublement réglée.* Picart. *N. ann. math. XXV*, 238.
107. Ueber die partiellen Differentialgleichungen der durch Bewegung von Linien entstandenen Flächen. Blazek. Wien. Akad.-Ber. LI, 186.
108. *Sur la cyclide.* Godart. *N. ann. math. XXV*, 219.
109. Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung. Clebsch. Crelle LXV, 359.
110. *Sur la géometrie des courbes gauches tracées sur une surface générale du troisième ordre.* Clebsch. *Compt. rend. LXII*, 1114.
111. *Sur un cas particulier de la surface du quatrième ordre avec seize points singuliers.* Cayley. *Crelle LXV*, 284.

Vergl. Differentialgleichungen 22. Geometrie (höhere) 56, 57. Maxima und Minima 90.

Oberflächen zweiter Ordnung.

112. *Interprétation géométrique des coefficients des variables dans les équations des courbes et des surfaces du second ordre.* Faure. *N. ann. math. XXV*, 5.
113. *Sur les cones du second ordre.* Mirza-Nizam. *N. ann. math. XXV*, 105.
114. *Surfaces de revolution du second degré passant par cinq points.* Recoq. *N. ann. math. XXV*, 163.
115. *Sur une variété de la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre.* De la Gournerie. *Compt. rend. LXII*, 611.
116. *Propriété d'un trièdre trirectangle placé de toutes les manières sur une surface conique du second degré.* Cayla. *N. ann. math. XXV*, 40.
117. *Équation d'une surface du second degré passant par trois droites.* Niebylowski. *N. ann. math. XXV*, 178.

Vergl. Ellipsoid. Geometrie (höhere) 55. Hyperboloid. Normalen 100. Sphärik.

Optik.

118. *Sur la dispersion de la lumière.* Emile Matthieu. *Journ. Mathém. XXXI*, 49.
119. *Théorèmes géométriques relatifs à la réflexion cristalline.* Cornu. *Compt. rend. LXII*, 1327.
120. Bestimmung der Wellenlängen der Frauenhofer'schen Linien des Sonnenspectrums. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. L, 296.

121. Ueber die Krümmung von Spectrallinien. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LI, 368.
Vergl. Refraction.

P.

Parabel.

122. *Propriétés d'une parabole et d'une circonférence passant par son foyer.* Moessard. *N. ann. math. XXV*, 21. — Barbier & Lucas *ibid.* 27.
123. *Le lieu des foyers des paraboles conjuguées à un triangle donné est la circonférence des neuf points de ce triangle.* Lucauchie. *N. ann. math. XXV*, 227.
Vergl. Kegelschnitte 84.

Parallelcurven.

124. *Sur la courbe parallèle à la podaire d'ellipse.* Bellachi. *N. ann. math. XXV*, 137.

Pendel.

125. Aufstellung einer neuen Pendelformel und Darlegung einer Methode, aus der Länge des Sekundenpendels in verschiedenen Breiten die Fliehkraft und die Form und Grösse der Erde zu bestimmen. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. XXXXIX, 210.

Perspective.

126. Neue Begründung der ersten Sätze über projectivische Grundgebilde im Allgemeinen und über harmonische im Besonderen. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XI, 1.
127. Centralprojection der Linien zweiter Ordnung. Moshammer. Wien. Akad.-Ber. XXXXIX, 372.
128. Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LII, 573.
129. *Étant donné un cône du second degré, trouver le lieu d'où ce cône est vu sous un angle donné.* Niebylowski. *N. ann. math. XXV*, 132.

Planimetrie.

130. Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser gewisser regelmässiger Kreisvielecke. Schwarzer. Wien. Akad.-Ber. LII, 363.
131. *Inscription de l'heptagone régulier par moyen de la trisection d'un angle.* Collins. *N. ann. math. XXV*, 226.

Potential.

132. Ueber die Anziehungscomponente eines geraden elliptischen Cylinders in der Richtung der Axe, wenn die Elementaranziehung irgend einer Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist. Grube. Crelle LXV, 62.

Q.

Quadratische Formen.

133. *Sur les formes quadratiques proprement primitives, dont le déterminant changé de signe est* > 0 *et* $\equiv 3$ *(mod. 8).* Liouville. *Journ. Mathém. XXXI*, 191.
134. *Théorèmes sur les formes impaires.* Liouville. *Journ. Mathém. XXXI*, 221.
135. *Nombre des représentations d'un entier quelconque sous la forme d'une somme de dix carrés.* Liouville. *Journ. Mathém. XXXI*, 1. [Vergl. Bd. XI, No. 183.]
136. *Sur les deux formes* $x^2+2y^2+2yz+2z^2+6t^2$, $x^2+2y^2+3z^2+5t^2$. Liouville. *Journ. Mathém. XXXI*, 131.
137. *Sur les deux formes* $x^2+2y^2+2yz+2z^2+15t^2$, $2x^2+2xy+3y^2+3z^2+3t^2$. Liouville. *Journ. Mathém. XXXI*, 39.
138. *Sur la forme* $x^2+3y^2+az^2+3at^2$. Liouville. Journ. Mathém. XXXI, 211.

139. *Sur les deux formes* $3x^2+5y^2+10z^2+10zt+10t^2$, $2x^2+2xy+3y^2+15z^2+15t^2$. *Liouville. Journ. Mathém. XXXI*, 103.

Quadratur.

140. Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone. C. G. J. Jacobi. Crelle LXV, 173. — Hermes ibid. 174.
141. Ausdehnung der Jacobi'schen Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone für den Fall vielfacher Punkte. Hermes. Crelle LXV, 177.

R.

Rectification.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 1.

Refraction.

142. *Sur la réfraction solaire. Faye. Compt. rend. LXII*, 708, 863. — *Secchi ibid.* 859.
143. Theorie der doppelten Brechung. Stefan. Wien. Akad.-Ber. L, 505.

Reihen.

144. Ueber die Umformung unendlicher Reihen. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LI, 291.
Vergl. Convergenzbedingungen. Function.

S.

Sphärik.

145. Die Auflösung des sphärischen Dreiecks durch seine drei Höhen. Unferdinger. Wien. Akad. Ber. LI, 97.
146. Theorie der Transversalen, welche die Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreiecks verbinden. Unferdinger. Wien. Akad.-Ber. LII, 323.
147. *Par le centre d'un polygone sphérique regulier on fait passer une circonférence quelconque de grand cercle; la somme des puissances* n *des tangentes des projections des arc menés du centre aux sommets sur cette circonférence est constante. Bauquenne. N. ann. math. XXV*, 35.
148. *Sur la plus courte distance de deux points sur la surface de la sphère. Jarrige. N. ann. math. XXV*, 72.
149. Ueber die Berührungsaufgabe für die Kugel. Frischauf. Wien. Akad.-Ber. LII, 222.

Stereometrie.

150. *Rapport sur les recherches de M. Jordan sur les polyèdres. Bertrand. Compt. rend. LXII*, 1268. *Journ. Mathém. XXXI*, 217.
151. *Nouvelles recherches sur les polyèdres. Jordan. Compt. rend. LXII*, 1339.
152. Ueber Vielecke, Vielseite und Vielflache. Hertzer. Zeitschr. Math. Phys. XI, 244.

Sturm's Functionen.

153. *Sur les fonctions de Sturm. Gilbert. N. ann. math. XXV*, 263.
154. *Sur les fonctions de Sturm. Gilbert. Compt. rend. LXII*, 338.

T.

Tabellen.

155. *Les nombres premiers de* 100 000 001 *à* 100 001 699. *William Davis. Journ. Mathém. XXXI*, 188.

Tetraeder.

156. Ueber einige besondere Punkte des Tetraeders. Hermes. Crelle LXV, 293.

157. *Théorèmes sur les tétraèdres.* *Marmier.* *N. ann. math. XXV*, 268.
158. Ueber Volumina von Tetraedern. Hunyady. Zeitschr. Math. Phys. XI, 163.
Vergl. Maxima und Minima 90.

Trigonometrie.

159. *Expressions générales du rayon et de la surface des polygones circonscriptibles.* *Dostor.* *N. ann. math. XXV*, 73.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

160. *Sur la théorie des fonctions abéliennes.* *Clebsch & Jordan.* *Compt. rend. LXVII*, 183, 227.
161. Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung. Königsberger. Crelle LXV, 335.
162. Ueber die dritte Gattung der Abel'schen Integrale erster Ordnung. Roch. Crelle LXV, 42.
163. Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. Brill, Crelle LXV, 269. [Vergl. Bd. XI, No. 60 und 211.]

V.

Variationsrechnung.

164. Beiträge zur Theorie der Variation der einfachen Integrale. Lipschitz. Crelle LXV, 26.

W.

Wärmelehre.

165. Ueber die Bestimmung der Energie und Entropie eines Körpers. Clausius. Zeitschr. Math. Phys. XI, 31.
166. Ueber das Integral $\int \frac{dQ}{T}$. Bauschinger. Zeitschr. Math. Phys. XI, 152.
167. Ueber den Zusammenhang einiger physikalischen Eigenschaften der Gase. Bauschinger. Zeitschr. Math. Phys. XI, 208.

Z.

Zahlentheorie.

168. Ueber die asymptotischen Gesetze von gewissen Gattungen zahlentheoretischer Functionen. Lipschitz. Berl. Akad.-Ber. 1865, 174.
169. Ueber die aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen von periodischem Verhalten, insbesondere die Bestimmung der Klassenzahl derselben. Fuchs. Crelle LXV, 74.
170. *Sur la fonction numérique qui exprime pour un déterminant négatif donné le nombre des classes de formes quadratiques dont un au moins des coefficients extrêmes est impair* *Liouville.* *Compt rend. LXII*, 1350.
171. *Nouveau théorème sur la résolution des équations binômes à module premier.* *Le Bergue.* *Compt. rend. LXII*, 20. [Vergl. Bd. XI, No. 409.]
172. Ueber die Summe von Cubikzahlen. Genocchi. Zeitschr. Math. Phys. XXXI, 177.
173. *Nombre des représentations d'un entier quelconque sous la forme d'une somme de dix nombres triangulaires.* *Liouville.* *Compt. rend. LXII*, 771.
174. *Sur les congruences du second degré.* *Jordan.* *Compt. rend. LXII*, 687.
175. *Sur une congruence du deuxième degré à plusieurs inconnues.* *Le Besgue.* *Compt. rend. LXII*, 868.

176. *Démonstration de quelques théorèmes concernant la résolution en nombres entiers de l'équation* $x^2 - Ny^2 = -1$. *Casimir Richaud.* *Journ. Mathém.* *XXXI*, 145. [Vergl. Bd. XI, No. 414.]

177. *Sur la forme à cinq indéterminées* $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5$. *Liouville.* *Compt. rend.* *LXII*, 714.

178. *Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule* $4A^2 + 5B^2$ *en y prenant* A *impair.* *Liouville.* *Journ. Mathém.* *XXXI*, 41.

Vergl. Quadratische Formen. Quadratur. Tabellen.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. Von Dr. HERMANN HANKEL, ausserordentlichem Professor an der Universität Leipzig. 1. Theil; Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig, Leopold Voss. 1867.

Es ist eine aus der Geschichte der Mathematik hinreichend bekannte Thatsache, dass die consequente Entwickelung der Wissenschaft nicht selten zu Vorstellungen oder Begriffen nöthigt, welche auf den ersten Blick als paradox oder als unmöglich erscheinen, wie z. B. der unendlich ferne einzige Punkt einer Geraden, das Negative, das Imaginäre etc. Anfangs werden solche Consequenzen mit einer gewissen Scheu betrachtet; erweisen sie sich aber als förderlich, so schwinden nach und nach die früheren Zweifel und machen einer praktischen Geläufigkeit Platz, welcher gegenüber die anfänglichen Dunkelheiten oder Widersprüche in den Hintergrund treten. Diesen zwei Phasen der Entwickelung folgt eine dritte und letzte, in welcher die eigentliche Natur jener Vorstellungen und Begriffe durch eine fundamentale Untersuchung aufgeklärt und damit zugleich das Gebiet begrenzt wird, innerhalb dessen sie ihre volle Berechtigung haben. Wenn nun von der Theorie der imaginären Zahlen gesagt werden kann, dass sie die letzten Decennien hindurch sich im zweiten Stadium befand, so darf man Prof. Hankel's Werk, wovon bis jetzt der erste Theil (200 S.) vorliegt, unbedenklich als dasjenige bezeichnen, womit das dritte Stadium einen glücklichen Anfang genommen hat. Der Gedankengang des Verfassers ist folgender.

Sowie es in der Potenzenlehre unzweifelhaft feststeht, dass die Gleichungen $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ und $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ gar nicht bewiesen werden können, sondern nur conventionelle Bezeichnungen sind, wodurch man die formale

Einheit des Calculs sichert, so entspringen auch die verschiedenen Zahlen dadurch, dass man zu Gunsten jener Einheit gewisse Grundgesetze festhält. Zu den letzteren gehören namentlich die Association, die Commutation und die Distribution, worauf bereits Servois aufmerksam gemacht hat. Sind nun a, b .... irgend welche anschauliche oder mentale Objecte oder Relationen von Objecten, so kann man sich etwa a und b rein begrifflich und formal mit einander verknüpft denken und als Resultat der Verknüpfung ein neues Object oder eine neue Relation c ansehen, welche jener Verknüpfung gleich (äquivalent) ist, weil sie in allen Fällen, wo a und b als verbunden zu denken sind, für a und b eintreten kann. Falls jene Verknüpfung nach bestimmten Regeln, d. h. gesetzmässig geschieht, müssen auch zwischen den Resultaten verschiedener Verknüpfungen gewisse Beziehungen stattfinden, welche die Folgen der ursprünglich vorausgesetzten Verbindungen sind. [Z. B. wenn $c = f(a, b)$ und $\gamma = f(a, \beta)$, so muss auch eine Relation zwischen b, β, c, γ existiren.] Die Entwickelung dieser neuen Beziehungen ist offenbar unabhängig von der Natur der verknüpften Objecte, mithin Sache der reinen Logik. Die Regeln der Verknüpfung von a mit b, d. h. die mit a und b vorzunehmenden Operationen können ganz willkürlich gewählt werden, wofern dieselben keine logischen Widersprüche enthalten; es würden aber trotzdem noch unendlich viele Verknüpfungsarten übrig bleiben. Um nun nicht in abstruse, keiner anschaulichen Interpretation fähige Operationen zu verfallen, nimmt man die Regeln der gemeinen Arithmetik und namentlich die vorhin erwähnten Gesetze zum Leitfaden, d. h. man bestimmt die formalen Operationen so, dass ihre Resultate in die Resultate der gewöhnlichen Arithmetik übergehen, sobald an die Stelle der mentalen Objecte (a, b) solche in der Anschauung existirende Objecte treten, deren gegenseitige Relationen durch gewöhnliche Zahlen ausgedrückt werden. Dieses Princip der Permanenz der formalen Gesetze dient dem Verfasser als leitende Maxime, jedoch nur zur Definition der nothwendigen und hinreichenden Regeln, soweit diese von einander unabhängig sind. Andererseits lässt sich der Verfasser dadurch auch nicht allzusehr beschränken und zeigt später die Nothwendigkeit, solche Operationen zu betrachten, für welche nicht alle Regeln der arithmetischen Multiplication Geltung behalten.

Nach diesen Gesichtspunkten werden zunächst die reellen Zahlen und darauf in Abschnitt V die gewöhnlichen complexen Zahlen untersucht. Die Gleichungen

$$(\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) = \alpha + \gamma + i(\beta + \delta),$$
$$(\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) = \alpha\gamma + i\alpha\delta + i\beta\gamma + ii\beta\delta$$

dienen hierbei als Definitionen der Addition und Multiplication, wobei sowohl das commutative, als das associative und das distributive Princip erfüllt ist. Daran knüpft sich die Frage, ob die Gleichung $x^2 = -1$ ausser $x = +i$ und $x = -i$ noch andere Wurzeln haben könne, welche

dann als imaginäre Einheiten höherer Art gelten müssten; der Verfasser kommt durch eine sehr einfache Betrachtung zu dem Resultate, dass $+i$ und $-i$ solange die einzigen Wurzeln sind, als man die zur Permanenz der Operationsgesetze gehörende Bedingung festhält, dass ein Product nur dann zu Null werden kann, wenn einer der Factoren verschwindet, dass aber das Fallenlassen dieser Bedingung in der That zu neuen imaginären Einheiten führt. Im V. Abschnitt findet sich ferner die geometrische Darstellung der complexen Zahlen, ihre Anwendung auf Geometrie überhaupt und eine sehr ausführliche Discussion der drei Methoden zum Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra.

Der VI. Abschnitt beschäftigt sich mit den höheren complexen Zahlen im Allgemeinen und enthält u. A. die von Gauss versprochene, aber nicht gegebene Antwort auf die Frage, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannichfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können". Der Verfasser zeigt nämlich, dass es bei hypercomplexen Zahlen das Product ist, welches sich durch eine wesentliche Eigenschaft von dem Producte der gewöhnlichen algebraischen Zahlen unterscheidet. Als Beispiele hierzu werden ein complexes System mit zwei Einheiten und ein commutatives System mit mehreren Einheiten betrachtet.

Abschnitt VII enthält die Theorie und geometrische Darstellung der alternirenden Zahlen. Unter den letzteren werden Zahlen von den Formen

$$\alpha = a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + \ldots + a_n \iota_n,$$
$$\beta = b_1 \iota_1 + b_2 \iota_2 + \ldots + b_n \iota_n$$

verstanden, worin alle a und b gewöhnliche Zahlen, $\iota_1, \iota_2 \ldots \iota_n$ dagegen solche Einheiten bezeichnen, deren Multiplicationsregeln in den Relationen

$$\iota_1 \iota_1 = 0, \quad \iota_2 \iota_2 = 0, \ldots \iota_n \iota_n = 0,$$
$$\iota_k \iota_m = - \iota_m \iota_k$$

ausgesprochen sind. Als charakteristische Eigenschaften dieser Zahlen seien erwähnt $\alpha\beta = -\beta\alpha$ (daher der Name), $\beta\beta = 0$, mithin auch $\xi\beta = (\xi + m\beta)\beta$, wo m eine gewöhnliche complexe Zahl bedeutet. Aus der letzten Gleichung folgt die Unbestimmtheit der Division; ist nämlich ein der Gleichung $\xi\beta = \gamma$ genügendes $\xi = \frac{\gamma}{\beta}$ gefunden, so genügt auch der allgemeinere unendlich vieldeutige Ausdruck

$$\xi = \frac{\gamma}{\beta} - m\beta.$$

Wie der Verfasser zeigt, gestattet das System der alternirenden Zahlen sehr elegante analytische, geometrische und mechanische Anwendungen, z. B. auf die Zerlegung der Determinanten in Producte, auf die Streckenproducte (Parallelogrammflächen), Kräftepaare u. s. w. Einen Theil dieser Anwendungen hat früher schon Grassmann bemerkt und das Product zweier alternirenden Zahlen als „äusseres Product" bezeichnet.

Ein ganz besonderes Verdienst dürfte sich der Verfasser durch die in den Abschnitten VIII und IX gegebene Theorie und geometrische Darstellung der Quaternionen erworben haben; denn es ist diese durch Hamilton begründete und vieler fruchtbarer Anwendungen fähige Lehre in Deutschland noch ziemlich unbekannt, was freilich in der überaus weitschweifigen und abstrusen Darstellung Hamilton's seinen Erklärungsgrund finden mag. Der Verfasser definirt (etwas allgemeiner als Hamilton) die Quaternion als eine Zahl von der Form

$$\xi = x_0 + x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3,$$

worin x_0, x_1, x_2, x_3 reelle oder gewöhnliche complexe Zahlen, $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ drei Einheiten bezeichnen, für deren Multiplication die Fundamentalgleichungen gelten

$$\iota_1 \iota_1 = -1, \quad \iota_2 \iota_2 = -1, \quad \iota_3 \iota_3 = -1,$$
$$\iota_1 \iota_2 = \iota_3.$$

Durch Anwendung des associativen Princips ergiebt sich hieraus folgendes System von Gleichungen zur Reduction der Einheitenproducte

$$\iota_1 \iota_1 = -1, \quad \iota_2 \iota_2 = -1, \quad \iota_3 \iota_3 = -1,$$
$$\iota_1 \iota_2 = +\iota_3, \quad \iota_2 \iota_3 = +\iota_1, \quad \iota_3 \iota_1 = +\iota_2,$$
$$\iota_2 \iota_1 = -\iota_3, \quad \iota_3 \iota_2 = -\iota_1, \quad \iota_1 \iota_3 = -\iota_2,$$
$$\iota_1 \iota_2 \iota_3 = \iota_2 \iota_3 \iota_1 = \iota_3 \iota_1 \iota_2 = +1,$$
$$\iota_1 \iota_3 \iota_2 = \iota_2 \iota_1 \iota_3 = \iota_3 \iota_2 \iota_1 = -1.$$

Mit Hülfe dieser Relationen gelangt man sofort zu dem Hauptsatze, dass das Product zweier Quaternionen

$$\alpha = a_0 + a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3$$
$$\beta = b_0 + b_1 \iota_1 + b_2 \iota_2 + b_3 \iota_3$$

wieder eine Quaternion ist, nämlich

$$\alpha \beta = \gamma = c_0 + c_1 \iota_1 + c_2 \iota_2 + c_3 \iota_3,$$

worin c_0, c_1, c_2, c_3 folgende Werthe haben:

$$c_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3,$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2,$$
$$c_2 = a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1,$$
$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0.$$

Hierauf gründet sich nun der Algorithmus der Quaternionen, welcher mancherlei Eigenthümlichkeiten bietet. So ist z. B. die Division $\frac{\beta}{\alpha}$ im Allgemeinen eindeutig, wird aber in dem speciellen Falle $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ unbestimmt, wie es bei dem reellen α und β der Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ gleichfalls ist, wenn α verschwindet. Eine Folge dieser Eigenschaft der Division ist u. A. die etwas paradoxe Erscheinung, dass die Gleichung $\xi^2 = -1$, ausser $\xi = \iota_1, \iota_2, \iota_3$ noch unendlich viele Wurzeln besitzt; letztere sind von der Form

$$\xi = \iota_1 \cos \alpha_1 + \iota_2 \cos \alpha_2 + \iota_3 \cos \alpha_3,$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der Gleichung $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ genügen müssen,

also die Richtungswinkel einer Geraden im Raume bedeuten, aber auch allgemein complexe Zahlen sein können. Eine Reihe geometrischer, namentlich die Sphärik betreffender Anwendungen der Quaternionen beschliesst diese Untersuchungen.

Wie man aus dieser Inhaltsgabe ersehen wird, enthält das vorliegende Werk auf kleinem Raume ausserordentlich viel des Neuen und Interessanten. Die Darstellung ist selbst in den abstractesten, mehr philosophischen als mathematischen Partieen der Schrift durchaus klar und von einer gewissen Eleganz; auch dürfte die Mitte zwischen lakonischer Kürze und redseliger Breite glücklich innegehalten sein. Besondere Anerkennung verdient noch die Sorgfalt, womit die Geschichte und die Literatur jeder einzelnen Lehre behandelt sind.

In der Vorrede stellt der Verfasser das Erscheinen eines zweiten Theiles in Aussicht, welcher die Theorie der Functionen complexer Variabeln enthalten soll und zwar ausser den Grundlehren, dem Dirichlet-schen Principe etc. besonders die Theorie der Integrale mit complexen Integrationswegen, die hypergeometrische Reihe, die elliptischen und ultraelliptischen Functionen, sowie endlich die Functionen von Quaternionen. Referent kann nur wünschen, dass der Verfasser diesen Plan möglichst bald zur Ausführung bringen möge.

SCHLÖMILCH.

Notiz.

Die bisher von Prof. Tortolini in Rom herausgegebenen *Annali di matematica pura ed applicata* werden seit 1. Januar von den Herren Prof. F. Brioschi und Prof. C. Cremona redigirt und erscheinen in zwanglosen Heften zu Mailand (Druckerei von F. Zanetti, *via del Senato*, 26). Bei der hohen Bedeutung, welche den Arbeiten der gegenwärtigen italienischen Mathematiker zukommt, dürfte diese Notiz unseren Lesern von Interesse sein; zugleich wünschen wir den neuen *Annali di matematica* ein fröhliches Gedeihen.

Die Redaction.

Bibliographie

vom 1. Mai bis 1. Juli 1867.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1867, Nr. 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 2 Thlr.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Math.-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1867. 1. Abth. 1. Heft und 2. Abth. 1. Heft. Wien, Gerold. pro compl. 16 Thlr.

Repertorium für physikalische Technik, mathematische und astronomische Instrumentenkunde; herausgeg. von PH. CARL. 3. Jahrg. 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 6 Thlr. 12 Ngr.

Memorie della società Italiana delle scienze (fondata da Lorgna). Serie II, tomo II. Modena. 14 *l.*

(Indice delle memorie contenute in questo volume: Marianini, settantacinque porismi da Euclide; Tardy, sulle quadrature; Bianchi, il valore della latitudine di Modena.)

Memorie del instituto Veneto. Tomo XIII, parte 1 e 2. Venezia.

(Contiene le memorie: Zantedeschi, sullo studio della meteorologia; Pazienti, intorno ad alcune deduzioni termodinamiche; Santini, delle interpolazioni e quadrature meccaniche per gli usi astronomici.)

Reine Mathematik.

GIESEL, J., Die Entstehung des Newton-Leibnitz'schen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Delitzsch, Pabst. 12 Ngr.

FÜRSTENAU, E. Neue Methode zur Darstellung und Berechnung der imaginären Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten. Marburg, Elwert, 8 Ngr.

EMSMANN, G., Höhere algebraische Gleichungen zum Gebrauch in Realschulen. Halle, Schmidt. 12½ Ngr.

KÖPP, G., Schularithmetik. 1. Abth. Eisenach, Bärecke. 1⅓ Thlr.

RULAND, N., Anleitung zur Buchstabenrechnung. Auflösung der in Heis' Sammlung enthaltenen Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Bonn, Cohen & Sohn. 1⅙ Thlr.

KÖHLER, H. G., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch (siebenstellig). 10. Ausg. Leipzig, Tauchnitz. 27 Ngr.

RIEMANN, B., Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalte bei gegebener Begrenzung. Bearb. von K. Hattendorf. Göttingen, Dieterich. ⅔ Thlr.

BORCHARDT, C. W., Ueber die Aufgabe des Maximum, welche der Bestimmung des Tetraeders von grösstem Volumen bei gegebenem Inhalt der Seitenflächen für mehr als drei Dimensionen entspricht. (Akad.) Berlin, Dümmler. 12 Ngr.

SPIEKER, TH., Lineare Construction der Kegelschnitte. Potsdam, Riegel. ⅓ Thlr.

STRAUB, W., Geometrie f. Mittelschulen. Aarau, Christen. ⅔ Thlr.

GERLACH, H., Lehrbuch der Mathematik. 2. Theil. Planimetrie. 2. Aufl. Dessau, Aue. ⅓ Thlr.

ROESE, F., Sphärische Trigonometrie. Wismar, Hinstorff. ⅓ Thlr.

CREMONA, L., *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. 2 Parti. Milano, Zanetti.* 6 *l.*
(*Di quest'opera non sono in vendita que* 60 *copie.*)

FOSCOLO, G., *Compendio di matematica pura. Parte elementare. Torino, Loescher.* 5 *l.*

Angewandte Mathematik.

ZUCKERMANN, B., Das jüdische Maasssystem und seine Beziehungen zum griechischen und römischen. Breslau, Schletter. ⅔ Thlr.

MÜLLER, F., Graphisches Nivelliren mittelst eines neuen Perspectiv-Diopters. Prag, Calve. 16 Ngr.

Landes-Triangulation des Königr. Preussen. Triangulation der Umgegend von Berlin zwischen 52° 12′ und 52° 48′ Breite und 30° 30′ und 31° 30′ Länge. Herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation. Berlin, G. W. F. Müller. 7½ Thlr.

SCHLÄFLI, L., Lösung einer Pendelaufgabe. Bern, Huber & Comp. 18 Ngr.

PAUGGER, F., Lehrbuch des terrestrischen Theiles der Nautik. Triest, Essmann. 3 Thlr.

Tychonis Brahe observationes septem cometarum ex libris manuscriptis qui Havniae in bibliotheca adservantur nunc primum edidit F. R. FRIIS. *Havniae.* Leipzig, Engelmann. 4 Thlr.

SONNET, H., *Dictionnaire des mathématiques appliquées. 1 fasc. Paris, Hachette.* 28 Ngr.

SELLA, Q., *Lezioni di cristallografia.* *Torino, Loescher.* 7 *l.* 50 *c.*

NEWCOMB, S., *Investigation of the orbit of Neptune, with general tables of its motion.* (*Smithsonian Institution.*) *New-York* (24 *Barclay Str.*) L. W. Schmidt. $2^1/_5$ Thlr.

RUNKLE, J. D., *New tables for determining the values of the coefficients in the perturbative functions of the planetary motion.* Ebendaselbst. $1^1/_{10}$ Thlr.

GILLISS, J. M., *Total eclipse of sun, Sept.* 7, 1858, *as observed near Olmos, Peru.* Ebendaselbst. 16½ Ngr.

KANE, E. K., *Astronomical observations in the arctic seas.* 1860. Ebendaselbst. $1^1/_{10}$ Thlr.

KANE, E. K., *Tidal observations in the arctic seas.* 1860. Ebendaselbst. 1⅔ Thlr.

Physik.

BURCKHARDT, F., Die Erfindung des Thermometers und seine Gestaltung im 17. Jahrhundert. Basel, Georg. 3 Frcs.

SUBIC, S., Lehrbuch der Physik für Oberrealschulen etc. 2. Aufl. Pesth, Heckenast. 2⅙ Thlr.

BRUHNS, C., Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen an mehreren Orten des Königr. Sachsen, angestellt in den Jahren 1760 bis 1865 und an den 22 königl. sächs. Stationen im J. 1865. Leipzig, Günther. 2⅓ Thlr.

HAYES, J., *Physical observations in the arctic seas.* (*Smithsonian Inst.*) *New-York.* 1860. L. W. Schmidt. 3 Thlr. 25½ Ngr.

KANE, E. K., *Physical observations in the arctic seas.* 1860. Ebendaselbst. 4 Thlr. 12 Ngr.

Results of meteorological observations made under the direction of the U. S. Patent office and the Smithsonian institution. Ebendaselbst.
Vol. I (1854 bis 1859) 3 Thlr. 9 Ngr.
Vol. II (1859 bis 1864) 2 Thlr. 6 Ngr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Oeuvres de Gerbert *coll. sur les manuscrits, précéd. de sa biographie, suiv. de notes critiques et historiques par A. Olleris. Clermont-Fd. Paris* 1867, *CCV*, 607.

Wie die Stadt Aurillac dem dort oder in der dortigen Umgegend geborenen Gerbert, späteren Papst Silvester II., eine Statue, so wollte die Akademie der Wissenschaften und Künste in Clermont-Ferrand demselben durch die Herausgabe seiner sämmtlichen Werke ein Denkmal setzen, sowohl um bessere Kenntniss von einem der bemerkenswerthesten Männer der Auvergne zu verschaffen, als auch zur Geschichte der Wissenschaften, des Staates und der Kirche einen nützlichen Beitrag zu liefern. So beginnt das Vorwort des Herrn Olleris, dem der Auftrag gegeben wurde, dieses Denkmal herzustellen.

Es muss den Geschichtskundigen überlassen werden, zu beurtheilen, in welchem Grade die ausführliche Biographie (p. XVII — CCV), die auf p. XXIV—XXXI auch einen Ueberblick über den Stand der Studien in Frankreich im 10. Jahrhundert giebt, dem zuerst genannten Zweck entspricht; hier kann von der sehr anziehend geschriebenen Arbeit nur Das in Betracht kommen, was von den mathematischen Leistungen Gerbert's augegeben wird. Dabei muss im Voraus bemerkt werden, dass Herr Olleris selbst kein Mathematiker ist, sondern sich an die Ergebnisse der Arbeiten von Chasles hält, den er mit Recht als den besten Gewährsmann hierin ansieht, und dass er, soweit die Werke Gerbert's selbst mathematische Kenntnisse erfordern, die Hülfe des Herrn Bourget, Professors der Mathematik an der Facultät der Wissenschaften in Clermont, zur Seite hatte. Uebrigens hat Herr Olleris auch die Leistungen von H. Martin und Cantor in Betracht gezogen und selbst das Schriftchen des Referenten ist ihm nicht entgangen, so dass er ohne Zweifel auch die Aufsätze, welche in der Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch im IX. und X. Band stehen, insbesondere IX, S. 145—166, berücksichtigt und erwähnt haben würde, wenn sie ihm zu Gesicht gekommen wären. Dazu kommt, dass Herr Olleris von Chasles (S. 575

und 583) und von Sédillot (S. 580—581) schriftliche, bis dahin noch nicht veröffentlichte Mittheilungen erhielt, die von grösstem Interesse sind. Wenn also Herr Olleris selbst nicht eigentlich als Theilnehmer an den fraglichen Untersuchungen auftritt, so verdankt man seinem Fleisse doch sehr gute Zusammenstellungen und werthvolle Beiträge.

Von den Behauptungen nun, denen Olleris beipflichtet, ist die zu bestreiten, die er p. XLI ausspricht: *C'est à lui (Gerbert) et non point aux Arabes, que l'Europe doit son système et ses signes de numération* (vgl. p. CCI). Für das System unserer Numeration ist die Null das wesentlichste Merkmal, und diese kannte Gerbert nicht (s. p. XXXV). Er selbst schrieb alle Zahlen mit den römischen Zahlzeichen und man kann ihm also nicht verdanken, was er selbst nicht kannte. Unsere Numeration geht ohne Zweifel auf Alkhârizmî zurück, dessen Werk im Beginn des 12. Jahrhunderts durch Schriften, wie die des Johann von Sevilla, im christlichen Abendland bekannt wurde und dessen Name als Algorismus die Bezeichnung für das neue Verfahren wurde, das im *Liber abbaci* des Leonardo von Pisa in vorzüglicher Weise dargelegt, von Anfang des 13. Jahrhunderts an alle anderen Rechnungsweisen verdrängte.

Es bleibt für Gerbert nur der Ruhm, das Rechnen mit Columnen im Abendland zur Geltung gebracht und Gobarziffern vor ihrer Verwendung zum Anschreiben von Zahlen zur Erleichterung des Multiplicirens und Dividirens verwerthet zu haben. Diese Ziffern selbst hat er nach Chasles der Geometrie des Boetius entnommen, und wäre dem so, so würden wir sie dem Boetius und nicht dem Gerbert in erster Reihe zu verdanken haben. Gerbert selbst giebt uns als die Quelle, aus der er schöpfte, das Werk des Spaniers Joseph an die Hand. Ohne Zweifel war das Werk lateinisch geschrieben; aber, da es in Spanien entstand (vergl. Olleris, S. 514, Note zum 55. Brief), sicherlich nicht ganz unabhängig von Dem, was bei den Arabern seit anderthalb Jahrhunderten zum mindesten bekannt war. Ob in demselben die Gobarziffern enthalten waren oder nicht, ist nicht von besonderem Belang; Gerbert konnte diese auf den verschiedensten Wegen kennen gelernt oder ihre Kenntniss sich verschafft haben, nachdem er, schwerlich ohne Kunde von Dem, was die Araber gebrauchten, auf die Verwendung besonderer Zahlzeichen gekommen war. Da er Arabisch nicht verstand, so liess er die Namen bei Seite und benutzte nur die Ziffern. Seinen Schülern dagegen erschienen bald auch die Namen so viel werth, dass sie dieselben aufführten, ja beim Rechnen selbst verwendeten. Aber selbst die allgemeinsten Beziehungen zu den Arabern glaubt man nicht zu bedürfen, da in 2 Mss. in Chartres und in Erlangen (ersteres aus dem Ende des 10. Jahrhunderts, nach Olleris, p. XXXVI) die ächte Geometrie des Boetius vorliege, aus der Gerbert die Zahlzeichen, wie das Rechnen *mit Columnen* habe entnehmen können.

Es ist hier nicht der Ort, die Gründe anzugeben, welche gegen die Aechtheit dieser Geometrie bestehen; nur weil auch Olleris die seltsamen Namen*) der Ziffern nicht für ächt hält (S. XXXVI und S. 578—582), sondern als später, etwa im 12. Jahrhundert, erst beigeschrieben, muss bemerkt werden, dass Referent wenigstens im Erlanger Ms. keine Anzeichen fand, dass die Namen später, als der übrige Theil der Abacustafel geschrieben wurden und dass er nirgends bis jetzt las, dass ein veränderter Schriftzug oder eine andere Tinte die Vermuthung begründete, dass man es mit einem um mindestens ein Jahrhundert späteren Zusatz zu thun hat. Cantor (Math. Beiträge S. 249) hält dafür, dass die Namen vom Abschreiber (vergl. ibid. S. 233) in ihm selbst nur halbwegs verständlicher Weise zugefügt wurden. Dies scheint nun dem Referenten bereits von dem Verfasser jener Geometrie geschehen zu sein, der an die Uebersetzung des Euclid von Boetius, oder an ein Stück davon, sein anderes Wissen noch anreihte, ohne dass er deswegen ein *faussaire audacieux* zu sein braucht, wie Martin (*Annali di matem. pubbl. da B. Tortolini. T. V.* 1863. S. 304) meint. Blossen Vermuthungen steht also die grösste Wahrscheinlichkeit gegenüber, dass diese Namen so alt sind, als die Mss. in Chartres und Erlangen und wenn Sédillot, der sie aus dem Arabischen ableitet, Recht behält, wird man sagen müssen, dass am Ende des 10. Jahrhunderts oder am Anfang des 11. die arabischen Namen und Zeichen der Zahlen im christlichen Abendland bereits bekannt waren, wenn auch beide zum Theil in seltsamen Verunstaltungen. Wenn Referent also den Ruhm Gerbert nicht beilegen kann, dass er unser jetziges Rechensystem zuerst einführte, so bleiben demselben doch noch vielfache Verdienste, die Olleris S. XL—XLII und S. CXCIX—CCI in bester Weise dargelegt hat.

Das erste, was Olleris von Gerbert's eigenen Werken giebt, sind dessen Briefe, von denen der 155. und 176. nach Olleris zum ersten Mal gedruckt sind. Mit welchem Fleiss Olleris dieselben sammelte, dafür sind besonders ausser den genannten, noch 1, 179, 193, 196, 216, 218, 220, 222—224 Beweise. Durch ein Versehen ist die Zahl 58 ausgefallen, von der auch S. 514 keine Erwähnung geschieht. Ebenso scheint ein Versehen darin zu liegen, dass S. 523 die Briefe vom 89. bis 117. zusammengefasst werden, während die Noten bis zum 124. reichen und dass S. 529 die Briefe 118—148 genannt sind, während die Noten mit dem 125. beginnen.

Von den reichhaltigen Noten, die von S. 483—562 gegeben sind, und die so viel als möglich die Gründe angeben, die Olleris zu einer neuen Ordnung der Briefe bestimmten, ist besonders hervorzuheben, dass sie

*) S. XXXVI steht Termas an der Stelle von Caltis oder Calctis, und von Sipos fehlt Namen und Zeichen. Vergl. S. 348.

S. 489—497 auch den *Index manuscriptorum codicum Bobiensis coenobii* enthalten, der, obwohl unvollständig, doch einen interessanten Ueberblick über die Lectüre giebt, die damals möglich war. In demselben ist S. 493 nur ein Buch des Boetius (*alterum*) über Astronomie erwähnt, und wenn dies allerdings wieder aus mehreren Büchern könnte bestanden haben, so liegt doch die Vermuthung nahe, dass im 76. Brief die VIII *volumina* nicht alle auf Boetius bezogen werden dürfen, wie es z. B. Cantor thut in den mathematischen Beiträgen S. 183 und 306. Olleris hält mit Recht diese Stelle für corrupt.

Im 124. Briefe folgt Olleris dem cod. 54 in Leyden, s. XI (p. IX der praefatio) und schreibt *de numero D^enario*, wogegen zwei Bedenken bestehen: 1) ist die Schreibweise *D^enarius* eine ungewöhnliche für X, und es ist die Frage, ob eine zweite solche Stelle, oder eine ähnliche, wie *B^inarius* für II, sich finden lässt; 2) ist der Sinn ganz unklar. Denn, wenn *se metiri* nicht „Primzahl sein" bedeutet, sondern „sein eigener Theiler sein", dann sieht man nicht ein, wie Gerbert am Beispiel von 4 erklären muss, was Remigius an der Zahl 10 gut verstanden hat. Olleris giebt nicht an, wie er den Sinn dieser Stelle sich denkt. Was Referent vorschlug, ist nicht 1, sondern I⁰ (= *primo*) und scheint demselben noch immer das Richtige und der Zusatz von *enario* zu *D* nur ein Versuch, das unverständliche D zu erklären.

Bezüglich des 208. Briefes hat Olleris Recht, wenn er S. 504 gegen die Ansicht Martin's sich ausspricht, dass Otto in diesem Brief ein Buch über Arithmetik von Gerbert verlangte. Er bittet um Unterricht über dasselbe oder um Erklärung desselben, das er aller Wahrscheinlichkeit nach bereits hat, und zwar durch Gerbert erhalten hat. Denn dies scheint gleichwohl als eine Thatsache bestehen zu bleiben. Das Gedicht, welches Olleris S. 294—295 mittheilt, ist nach der Ueberschrift an einem Bild (*imago*) des Boetius angebracht gewesen. Olleris denkt (S. CLXV) dabei an eine Büste oder ein Portrait. Könnte es nicht das Titelbild zu einem Exemplar der Arithmetik des Boetius gewesen sein, das Gerbert an Otto sendete? Ein solches Exemplar, zwar ohne Titelbild, aber sonst aufs Schönste ausgestattet, glaubt Referent aus der Bamberger Bibliothek kennen gelernt zu haben und die N. Jahrb. f. Phil. u. Päd. werden diese Verse bringen, die dort sich finden und höchst wahrscheinlich von Gerbert herrühren, wie es von einem Theil derselben bereits Weber im Programm von Cassel 1847 S. 15, Note 33 angenommen hat.

Von den Abhandlungen Gerbert's ist hier zunächst die *Regula de abaco computi* (S. 311—348) zu erwähnen. Sie ist zum ersten Mal gedruckt, und nach Olleris' Ansicht der *liber*, den Gerbert in seinem Briefe an Constantin erwähnt. Referent hat in seinem Schriftchen über Gerbert S. 53—54 den Gedanken ausgesprochen, dass unter diesem *liber* ein eigenes Werk von Gerbert selbst gemeint sei, und in der

Zeitschr. f. Math. u. Phys. X, S. 278 hat er nur die Möglichkeit zugegeben, dass auch das Werk des Joseph könnte gemeint sein. Was spricht nun dafür, dass wirklich eine Arbeit Gerbert's wieder aufgefunden ist?

Olleris sagt S. 582, dass der cod. Reg. Vat. n. 1661 auf dem ersten Blatt die Aufschrift *Gerberti Regula de abaco computi**) trägt, dass aber die Regula erst auf das XV. Capitel des Libellus an Constantin folgt. Also kann der Titel auch nur auf diese Schrift bezogen worden sein, der man dann Aehnliches noch beifügte. Die äusseren Gründe für Gerbert's Autorschaft sind also nicht viel von Belang; die inneren sind gewichtiger. Die Regeln über die Multiplication S. 311—324 sind die nämlichen, wie im Libellus S. 349—351, nur ausführlicher. Man könnte daran Anstoss nehmen, dass im Libellus die Multiplication von *singularis per singularem* aufgenommen ist, in der Regula dagegen fehlt; allein eben diese Multiplication, das einfache Einmaleins bildet die nothwendige Voraussetzung für die gegebenen Regeln, da ja eben an diesen Producten die *digiti* und die *articuli* unterschieden werden, und von jeden nur angegeben wird, an welche Stelle sie zu kommen haben. Die Regeln über die Division zeigen die Gleichheit im minderen Grade, aber doch eine solche Aehnlichkeit, dass ganz auf sie passt, was Gerbert im Brief an Constantin sagt: *quaedam, repetita memoria, eisdem verbis proferimus, quaedam eisdem sententiis.* Das Hauptgewicht legt aber Referent auf die Stelle nach den Regeln über die Multiplication (S 324): *Secundum dispositionem numerorum Abaci non potest haec multiplicatio ulterius***) progredi. Si quis autem velit in infinitum protendere ipsam normam Abaci, ad formam huius dispositionis possunt et praemissi numeri et residui in infinitum multiplicari.* Hierin liegt eine so deutliche Anspielung auf die 27 Abtheilungen, die der Abacus Gerbert's hatte (von 10^0 bis 10^{26}), dass nicht leicht ein Anderer als Verfasser dieses Abschnittes [S. 311—326, Z. 5 v. u.***)] kann angenommen werden, als Gerbert. Es müsste denn auch dies schon in der Schrift des Joseph enthalten gewesen sein, und dann Gerbert kein anderes Verdienst bleiben, als das, was Andere gefunden hatten, eifrig betrieben und zum Gegenstand der Arbeit Anderer gemacht zu haben.

Aber nur das Genannte kann Gerbert zugeschrieben werden, nicht mehr das, was S. 326, Z. 4 v. u. bis S. 348 noch als ein Theil der Regula

---

*) Der Zusatz *computi* scheint diesen Abacus von dem zu geometrischen Figuren benutzten unterscheiden zu sollen. Liegt darin nicht eine Andeutung, dass man im 11. Jahrhundert die Sache als etwas Neues ansah?

**) Das letzte Product lautet in unserer Weise ausgedrückt: $a.10^{12}.b.10^{13} = c.10^{26}+d.10^{25}$, wenn $ab=10c+d$.

***) S. 326, Z. 7 v. u. muss es statt *ad qua ultra* heissen et ultra ad quartus.

von Olleris abgedruckt ist. Chasles zwar findet (S. 503) in der im Folgenden stattfindenden Beiziehung der Brüche einen Grund für die Autorschaft Gerbert's, weil im Libellus nur von ganzen Zahlen die Rede ist und Gerbert sich gewiss auch mit den Brüchen befasste. Aber würde Bernelinus für die Minutien die Arbeit des Victorius benutzt haben, wenn Gerbert davon gehandelt hätte? Lassen sich die Marken aus Horn auf andere Ziffern, als die Gobarziffern für die ganzen Zahlen deuten? Kann man dabei auch an die römischen Bruchzeichen denken? Alles, was wir von Gerbert's Abacus bei Richer lesen, berechtigt allein zur Annahme, dass Gerbert auf diesem das Multipliciren und Dividiren mit ganzen Zahlen betrieb*). Wie seine Schüler die Minutien beizogen, glaubt Referent in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. X, S. 269—276 gezeigt zu haben.

Dass S. 326 Z. 4 v. u. eine neue Arbeit beginnt, die bis S. 333 Z. 2 v. o. reicht, zeigt sich schon äusserlich durch die Capitelnummer I, der noch II bis IX folgen, wenn man nur auf das achtet, was Olleris durch den Druck hervorgehoben hat. Es ist aber unzweifelhaft, dass im Folgenden noch andere Capitelnummern enthalten sind, nämlich XIV auf S. 329 in der Mitte, wobei zugleich deutlich hervortritt, dass die Arbeit nur verstümmelt erhalten ist, XV auf derselben Seite unten, C. XV. II, d. h. zweiter Paragraph des 15. Capitels in dem CXVII auf S. 330 in der Mitte, XVI auf eben dieser Seite etwas nach der Mitte, XVII in dem VIII auf derselben Seite, Z. 4 v. u., XX auf S. 331 ein wenig nach der Mitte, XXI auf S. 332 Z. 2 v. o. An letzteres Capitel schliesst sich in bester Weise der Abschnitt an, der durch die Aufschrift *Ratio de limace* von dem Vorhergehenden getrennt ist, die wahrscheinlich vom Rand erst in den Text kam. Diese Aufgabe ist die erste unter den Aufgaben Alcuin's. Ob sie nun dieser Sammlung entlehnt ist, oder umgekehrt die dem Alcuin zugeschriebene Sammlung die spätere ist, mag hier dahin gestellt bleiben.

Dass aber die erwähnte Arbeit nicht von Gerbert, sondern von einem Schüler Gerbert's herrührt, begründet Referent mit der Aehnlichkeit, welche dieselbe mit der Arbeit hat, die der cod. lat. mon. 14689, ehemals Emmer, G. LXXIII von f. 121^b bis 127^a enthält, und die sich geradezu als eine Arbeit aus der Schule Gerbert's bezeichnet**). Referent hat diese Arbeit in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. X, S. 242 mit A_4 bezeichnet und S. 250 und 266 darüber sich ausgesprochen.

---

*) Damit ist nicht gesagt, dass Gerbert nicht sehr viel mit Brüchen gerechnet haben kann, aber er that dies in der Weise des Victorius, d. h. ohne Beiziehung des Abacus.

**) *Exigis a me figuras et numeros abaci, quos nostris temporibus G. (Gerbertus), vir praecipui ingenii et nostris Gallis restituit, tum litteris ipse mandavit. Sed quod illic succinctum atque compendiose praecipitur, istic expediam quasi calamo leviore.*

Was nun S. 333 bis 345 steht, ist dasselbe, was Referent ib. mit A_1 bezeichnet hat, und worüber er ib. S. 243 und 273 sich geäussert hat; nur fehlen bei Olleris S. 334 die Producte der *sescuncia in sextantem* bis *in assem*, die im cod. mon. 14689 f. 64[b] stehen. Auch fehlt die auf S. 338 unten und 342 oben erwähnte *prima pagina huius libelli*, die Referent ib. S. 273 in der Anmerkung aus dem cod. lat. mon. 14836 f. 112[a] im Auszug mittheilte. Vielleicht ist die von Olleris S. 346—348 gegebene Tabelle diese pagina und nur in der Abschrift ans Ende gerathen; doch kann sie ebenso gut aus einem ähnlichen Werk genommen sein. Der letzte Abschnitt nämlich auf S. 345*) steht auch im cod. lat. mon. 14689 f. 68[b] unmittelbar nach der vorstehenden Arbeit, und auch die erste Tabelle auf S. 346 findet sich ebendaselbst, aber es steht noch weiter folgender Text dabei: *Multiplicatis in se quadrante et asse vel assibus facile est quartam eorum, qui multiplicatur (multiplicant?) unam eis addere et sic tetragonum erigere, positum perficere* $[(a+\frac{1}{4})^2=(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{4}a+a^2+\frac{1}{4}a]$. *Sed quartas duas multiplicantium, asse vel assibus in se eum semisse in se multiplicatis, idem est, quod semis eorundem eis addere,* [*sic et ille ceteri*] (*et sic?*) *positum tetragonum adimplere* $[(a+\frac{1}{2})^2=$ $=a^2+\frac{1}{2}a+(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}a]$. *Dodrantis autem tres quartas idem est, quod mediam et quartam.* $[(a+\frac{3}{4})^2=a^2+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})a+(\frac{3}{4})^2+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})a]$. *Triens quoque cum asse vel assibus multiplicatus multiplicantium, non multiplicatorum, terciam querit, ut tetragonizet* $[(a+\frac{1}{3})^2=(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}a+a^2+\frac{1}{3}a]$. *Sed acute observandum est, ut, quotlibet asses processerint* [= *praecesserint?*], *totiens ponantur trientes et iterum totidem, deinde unus tantum trientis triens, ad ultimum multiplicatio assium.* $[a.\frac{1}{3}+a.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}+a.a]$. *Eadem regula est de bisse et de aliis omnibus.*

Dann folgen auf f. 69[a] unter der Ueberschrift *Racio ponendum* (*l. ponderum*) die Reductionszahlen der *unciae* und *minutiae* in einer Weise, dass die Aehnlichkeit mit der Tabelle, die Olleris S. 346—348 giebt, nicht verkannt werden kann**). Darauf heisst es: *Ideo hos numeros scripulorum cuique minutiae annotavi, aut* (*l. ut*) *si nescieris, quota pars quaeque assis existat,*

---

*) Zeile 6 v. u. muss es statt *assium is (sic) qui minutias praecedit* heissen: *assium in se, qui minutias praecedunt.* Der Münchner Codex hat *a si v̄ in seq minutias praecedunt.*

**) Olleris giebt diese Tabelle, wie sie handschriftlich vorlag, mit allen Zuthaten, wie z. B. den Gobarziffern mit ihren Namen (348) und einer Randbemerkung (347). Es wäre gut gewesen, wenn Olleris dieselbe in ihrer ursprünglichen Einfachheit hergestellt und die Zusätze der Handschrift in Anmerkungen beigefügt hätte; denn so, wie sie jetzt gedruckt ist, tritt es wenig hervor, dass *as*, *deunx* u. s. w. zuerst auf die *uncia*, dann den *scripulus*, drittens auf die *sextula* reducirt sind und die Benennungen, deren Werth kleiner als der der *uncia* ist, weiter auf die *siliqua*. Ob die Reduction auf den *obolus* schon ursprünglich geschrieben war, ist nicht abzusehen; die griechischen Zahlzeichen und die Erwähnung des *solidus* sind höchst wahrscheinlich späterer Zusatz.

facile videre possis ex annotando numero. Si nescieris, quota pars sicilicus sit assis, vide, quota pars sit senarius ex CCLXXXVIII et tota pars sicilicus assis.

In welchem Zusammenhang dies Alles mit der vorhergehenden Arbeit steht, ist nicht angedeutet und schwer zu sagen. Es scheint eben in den Codices zusammengeschrieben worden zu sein, was ungefähr von Aehnlichem handelte und so wird man der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man das, was Olleris von S. 311—348 giebt, in folgende Stücke zerlegt: 1) Gerbert's (?) erste Arbeit 311—326; 2) die verstümmelte Arbeit eines unbekannten Verfassers 326—333; 3) Multiplication und Division von Brüchen 333—345; 5) Reductionstabellen 346—348. Letztere drei Stücke sind möglicherweise von demselben Verfasser und stehen nur zufällig wie Bruchstücke nebeneinander.

Auf S. 349—355 steht der *Libellus de numerorum divisione*, über dessen Aechtheit kein Zweifel besteht. Nur bezüglich des Textes ist zu erwähnen, dass S. 354 Z. 7 (9) v. u. die Worte *vel cum articulo semper* als blosse Wiederholung aus der vorhergehenden Zeile mit dem cod. MP. besser weggelassen worden wären und dass S. 355 im Capitel XV Olleris den fehlerhaften Text, dem Chasles folgte, beibehielt. (Vergl. Zeitschrift f. Math. u. Phys. IX, S. 163.)

Das Capitel XVI, das S. 355—356 steht, hätte als offenbar späterer Zusatz wegbleiben sollen, zumal als auch die codd. Reg. 1403 (oder 1405? vergl. S. 349) und L. 54 und MP. dieses Capitel nicht enthalten.

Die Schrift, die S. 357—400 steht, ist der *Liber Abaci* des Bernelinus in vier Büchern, und es ist als ein besonderes Verdienst des Herrn Olleris zu bezeichnen, dass er dieses Werk, obwohl es nur mittelbar zur Kenntnissnahme über Gerbert's Leistungen dient, doch aufgenommen hat. Es ist nämlich das vierte Buch mit Benutzung des *calculus* des Victorius bearbeitet und gerade dieses Buch konnte Olleris aus dem cod. MP. (Montpellier) in viel vollkommenerer Weise herstellen, als es bisher aus Handschriften bekannt war. S. 389 macht Olleris zu *Siliqua est quae scribitur*: ∽ *LQ* die Bemerkung: *Reperies etiam δδ in Gerberti Geometria.* Er konnte noch beisetzen, dass auf S. 347—348 das Zeichen ∽ *LA* gebraucht ist und S. 348 auch ∽ 1Ψ1.

Zu den Werken arithmetischen Inhalts hat Olleris S. 573—590 Noten gegeben, von denen ein Theil bereits erwähnt wurde. Folgendes ist noch beizufügen. S. 588—589 finden sich die Namen, Zeichen und Werthe der Theile von *as* und *uncia* zusammengestellt. Man muss sehr dankbar für diese Arbeit des Herrn Bourget sein, welche das Nachrechnen bei den vorkommenden Zahlzeichen sehr erleichtert. Doch sind Oboli III und Oboli V unrichtig bestimmt, wie aus der Tabelle auf S. 347 unzweifelhaft hervorgeht. Oboli III = 3 oboli, nicht der dritte Theil eines Obolus; *T* ist ungenau für das griechische $\Gamma = 3$ gesetzt. Also sind oboli III

$= 3 \cdot \frac{1}{576} = 9 \cdot \frac{1}{1728} = 9$ *siliquae*, wie es S. 347 auch angegeben ist und oboli $V = 5 \cdot \frac{1}{576} = 15 \cdot \frac{1}{1728} = 15$ *siliquae*. *E* ist das griechische $\varepsilon = 5$.

S. 586 kommt Olleris auf die Arbeit zu sprechen, die Gerbert an Otto III. geschickt haben soll. Würde er die Anmerkung in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. X, S. 241 gekannt haben, so würde er der Mühe überhoben gewesen sein, von Herrn Director Halm sich ausführliche Mittheilungen über den cod. Emmer. G. LXXIII = cod. lat. mon. 14689 zu erbitten. Doch hat diese Anfrage den Nutzen gehabt, dass nunmehr auch die ganze Stelle selbst, die in Frage kommt, auf S. 587—588 von Olleris abgedruckt wurde, so dass Jedermann durch Vergleichung mit den Regeln im Libellus von Constantin sich überzeugen kann, dass von einer Arbeit Gerbert's dabei keine Rede sein kann.

S. 588 führt Olleris an, dass Chasles die Schrift, welche mit den Worten beginnt *Doctori et patri theosopho J. G. filius eius* dem Gerland zuschreibe, einem Mönch des zwölften Jahrhunderts. Es liegt hier möglicherweise eine Verwechselung vor. Denn dass Gerland zwei Arbeiten über das Rechnen geschrieben hat, ist zwar an sich nicht unmöglich, aber die Arbeit, die sicher von ihm ist, beginnt mit den Worten: *Nonnullis arbitrantibus multiplicandi dividendique scientiam* u. s. w. Im Ms. 230 des Fürsten Boncompagni, welches dasselbe ist, von dem eine Mittheilung im Serapeum 1854 S. 95—96 steht, ist diese Arbeit *Opus magistri Gerlandi de abaco* genannt. Diese Schrift nun hat mit jener nicht soviel Gleiches, dass sie gleiche Verfasser haben könnten. Man vergl. Zeitschr. f. Math. u. Phys. X, S. 243—244, 249, 256—258, 265—266, 274—275.

Von S. 401—470 giebt Olleris die Geometrie Gerbert's, von der er aber selbst nicht unterlassen kann, sowohl S. XXXVII—XXXVIII als S. 594 den Zweifel an der Aechtheit auszusprechen. Man muss Herrn Olleris hierin beistimmen. Aber hervorgehoben sollte sein, dass das Gegebene nicht eine Arbeit ist, sondern die ersten 13 Capitel (S. 401—427), die auch in dem Ms. zu Oxford und in dem Pariser Ms. 7185 allein enthalten sind, bilden eine Arbeit für sich, und mit dem 14. Capitel beginnt eine zweite, die vielleicht bis zum 40. Capitel (S. 446) reicht. Vom 41. Capitel an bis zum 94. hat man eine wahrscheinlich durch zufälliges Zusammenschreiben entstandene Sammlung von Aufgaben, meist über Berechnungen von Geraden und Flächen; aber auch Zeichnungen kommen vor (Capp. 88, 89 und zum Theil auch 93) und im Cap. 85 Summirungen einiger Zahlenreihen.

Der mittlere Theil (S. 427—446) hat vielleicht noch das grösste Recht, auf Gerbert zurückgeführt zu werden. In der Zeitschr. f. Math. u. Phys. XII, S. 5 nämlich wirft Herr M. Steinschneider die Frage auf: „Wer ist Gerbertus Geometra, dessen Namen unter Nummer XXX der Probleme sich findet, welche den Schluss bilden des lateinischen: *Saphcae recentiores doctrinae Patris Abrusahk Azarchelis etc.* a To. Schonero etc.

(4. Nürnberg 1534)? Ist es etwa Sylvester?" Referent hat die beiden Werke verglichen und eine bedeutende Aehnlichkeit nur bezüglich des 25. Capitels der sogenannten Geometrie Gerbert's finden können; aber Alles von Abrusahk aufgenommene findet sich dort in den Capp. 22, 25, 16, 18, 20, 19 mit grösserer oder geringerer Abweichung im Wortlaut, die sich hinreichend erklärt, wenn man bedenkt, dass man es mit einer Rückübersetzung aus dem Arabischen zu thun hat, vorausgesetzt nämlich, dass die Worte des Titels: „*innumeris in locis emandatae correctis erroribus eius, qui ex Arabico convertit*" auch für dieses Capitel gelten. Es kann also der Gerbertus Geometra allerdings Silvester sein, wenn auch nur insoweit, dass er solche Aufgaben in der Schule zu Rheims vortrug. Wie er bei dem *abacus* das Praktische desselben im Auge hatte, so kann er auch in der Geometrie die praktischen Aufgaben der Messung von Höhen und Tiefen und Aehnlichem vorzüglich behandelt haben. Mehr als blosse Wahrscheinlichkeit wird nicht zu erreichen sein.

S. 595 giebt Olleris eine Reihe von Fehlerverbesserungen und einige Bemerkungen des Herrn Bourget. Den Versehen im Schreiben und im Druck ist vielleicht beizufügen, dass es S. 400 Z. 13 (14) v. u. *pedes quatuor* heisst, statt *pedes V*, Z. 9 (10) XII und CXLIV statt XVI und CCLVI. Bei den Dreiecken in der Figur 35, 36 und 37 sind die Zahlen nicht ganz verlässig; so fehlt z. B. in Fig. 35 bei dem ersten Dreieck die Zahl der Kathete III, in Fig. 36 bei dem fünften Dreieck bei der Zahl der Fläche * $= 9\frac{1}{6}$; in Fig. 37 muss es bei dem ersten Dreieck VIII statt III heissen, bei dem dritten XLV statt ILV, bei dem neunten fehlt die Zahl der Hypotenuse $15\frac{5}{12}$. Auch lässt sich bemerken, dass man in den vier Reihen die Zahlen der Dreiecke erhält, wenn man die des ersten Dreiecks in der

1. Reihe mit 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{9}$, $6\frac{1}{3}$, in der
2. „ „ 2, 3, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{8}$, in der
3. „ „ 2, 3, $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{6}$, in der
4. „ „ 2, $2\frac{1}{6}$, $3\frac{1}{12}$ multiplicirt, bei der Fläche natürlich mit dem entsprechenden Quadrat dieser Zahlen.

Hierbei lässt sich gelegentlich bemerken, dass überhaupt einige Druckfehler stehen blieben, die bei dem Lesen und Nachschlagen lästig sein können; so z. B. muss es S. CXLIX Note 2 p. 237 heissen, statt 273, S. CLXV Note 2 279 statt 219, S. CLXXVII Note 1 479 statt 477. S. 139 fehlt D neben XXVIII. S. 343 muss es im Tableau VIII statt IIIII heissen (Fehler im cod. MP.?); S. 358, Z. 9 (12) von unten *pura fide* statt *para fide*; S. 364, Z. 6 (7) von unten *ultraque* statt *utraque*; S. 389, Z. 5 (8) von unten *vel* statt *vec*; S. 397, Z. 4 (6) v. u. *minutiarum* statt *munitiarum*; S. 577 Z. 17 v. u. Gobâr statt Grobâr.

Von den Bemerkungen des Herrn Bourget ist zu erwähnen, dass sein Vorschlag, im Capitel 68 *in longitudine* statt *in utroque latere* zu setzen,

deshalb nicht anzunehmen ist, weil aus dem Capitel 72 deutlich hervorgeht, dass mit *latus* die längere Seite gemeint ist.

Den Schluss der Werke, die Olleris aufgenommen hat, bilden der Brief des Adalboldus an Gerbert (S. 471—475), der Brief Gerbert's an Adalboldus (S. 477—478), endlich der Brief an den Abt Constantinus (S. 479—480), wohl zu unterscheiden vom *scholasticus* in Fleury.

Es ist ein reicher Inhalt, der hiermit geboten wird und Fleiss und Sorgfalt ist allenthalben in der Arbeit zu erkennen. Sehr zu beklagen ist es, dass Herr Olleris bei seinen Bemühungen nicht überall freundliches Entgegenkommen gefunden hat, sondern an zwei Stellen seiner Arbeit (S. 576 und 592) klagen muss, dass seine höflichsten Anfragen ohne Antwort geblieben sind. Möge die Anerkennung, die seinem guten Willen zu Theil werden muss, ihn dafür entschädigen.

Ansbach. G. Friedlein.

Dr. Hermann Weissenborn, Lebensbeschreibung des Ehrenfried Walther v. Tschirnhaus auf Kiesslingswalde und Würdigung seiner Verdienste. Mit einem Vorworte über Prof. J. A. Grunert als Preisrichter. Eisenach 1866, in Commission bei Joh. Friedr. Baerecke. XXX und 205 Seiten, 3 Figurentafeln.

Die Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften zu Görlitz schrieb vor mehreren Jahren einen Preis von 50 Thalern für eine Biographie und Würdigung Tschirnhaus' aus. Am bestimmten Termine, 31. Januar 1863, war eine längere Abhandlung eingelaufen, welche zumeist auf ein Gutachten von Prof. Grunert hin des Preises nicht für würdig erkannt wurde. Den Satzungen der Gesellschaft gemäss wurde dasselbe Thema mit verdoppeltem Preise noch einmal gestellt und der Einlieferungstermin auf den 31. Januar 1865 bestimmt. Auch diesmal lief eine Arbeit ein, welche wieder von demselben Richter geprüft und auf Grund seines Gutachtens gekrönt wurde. Diese Preisschrift hatte Herrn Alfred Kunze, Gymnasiallehrer in Eisenach, zum Verfasser. Sie erschien 40 Druckseiten stark im 43. Bande des Neuen Lausitzischen Magazins und in wenigen Separatabzügen. Diese Nachrichten entnehmen wir wenigstens den ersten acht und den letzten zwei Seiten der Vorrede des uns vorliegenden Buches, des, wie ausdrücklich hervorgehoben ist, unveränderten Abdruckes der ersten zurückgewiesenen Arbeit. Herr Weissenborn, wie sein glücklicherer Nachbewerber Gymnasiallehrer in Eisenach, glaubt seine Arbeit, wenn gleich von demselben Richter, doch nicht nach denselben Grundsätzen geprüft, wie die zwei Jahre später eingelaufene. Er appellirt daher an das allgemeine Urtheil, indem er seine Schrift der Oeffentlichkeit

übergiebt und zugleich in der Vorrede das Gutachten von Prof. Grunert mit polemischen Anmerkungen gegen dasselbe abdruckt, wodurch die Vorrede zu der ungewöhnlichen Länge von XXX Druckseiten sich ausdehnt. Referent bedarf wohl keiner Entschuldigung, wenn er sich an diesem Streite nicht zu betheiligen wünscht; er wird vielmehr die Vorrede und deren Inhalt grundsätzlich ignoriren. Er wird ebenso wenig in der Lage sein, einen Vergleich mit der Kunze'schen Arbeit anzustellen, welche ihm nicht vorliegt, würde aber sogar, wenn dieses der Fall wäre, bei der gegenwärtigen Sachlage die Vergleichung vermeiden. Referent wird vielmehr das gegenwärtige Buch einfach so recensiren, als wenn es ohne jede Einleitung auf dem Büchermarkte erschienen wäre, und versichert zum Beweise seines Wunsches nach uneingenommener Kritik, dass die bisherigen Sätze niedergeschrieben sind, bevor er von der Vorrede mehr als den Anfang bis zum Abdrucke des Gutachtens und nach Ueberspringung desselben deren Schluss gelesen.

Das unbefangene Urtheil über die Weissenborn'sche Schrift geht aber alsdann dahin, dass sie das Resultat eines emsigen Fleisses ist, dass der Verfasser ohne Zweifel viel Arbeit und Mühe darauf verwandt hat, dass aber dem Leser gleichfalls eine nicht geringe Mühe zugemuthet ist, wenn er aus der gegebenen Zusammenstellung ein Bild von der Thätigkeit und den Verdiensten Walther v. Tschirnhaus' sich schaffen will, dass der Verfasser zu diesem Ziele keineswegs genügende Hülfe bietet. Wir wollen dem Verfasser, den das lesende Publikum ja schon seit 11 Jahren vortheilhaft kennen gelernt hat, und dessen historische Erstlingsarbeit den Stoff unserer eigenen ersten Recension in dieser Zeitschrift (Bd. I. Literaturzeitung S. 57—63) bildete, nicht Unrecht thun. Tschirnhaus selbst trägt die Mitschuld an dem gerügten Mangel. Herr Weissenborn sagt auch (S. 203) vollständig zutreffend:

„Methoden zu finden, durch welche ganze Klassen von öfters sehr schwierigen Aufgaben mit einem Schlage gelöst würden, und durch welche über Gebiete, auf denen sich die namhaftesten bisherigen Mathematiker vergebens versucht hatten, Licht verbreitet würde, war augenscheinlich sein hauptsächlichstes Bestreben. In der That grossartig würden seine Leistungen sein, wenn sich Alles so verhielte, wie Tschirnhaus glaubte. Wir besässen dann ein Verfahren, mit Leichtigkeit zu entscheiden, ob eine Curve quadrirbar sei oder nicht, und im ersteren Falle ihre Quadratur zu finden, und zwar auf einem von der Theorie des Unendlichkleinen unabhängigen Wege; wir vermöchten einen Flächenraum durch eine Curve in gegebenem Verhältnisse zu theilen, auf einer Curve Stücke abzuschneiden, deren Länge in gegebenem Verhältnisse stände, könnten Gleichungen jeden Grades auflösen u. A. Leider aber ging Tschirnhaus nicht selten viel zu schnell vor, seine lebhafte Phantasie und vielleicht auch Mangel an Geduld, der ihn abhielt, sich mit speciellen, allerdings öfters mühsamen,

aber durchaus nothwendigen Untersuchungen zu beschäftigen, liess ihn in vielen Dingen die Schwierigkeiten, die sich im Einzelnen bieten, übersehen und, alle Zwischenglieder überspringend, aus einem allerdings oft originellen nnd geistreichen Grundgedanken Resultate ziehen, die, so überraschend und glaubhaft sie auch auf den ersten Anblick waren, doch einer genauer eingehenden Untersuchung nicht Stich hielten."

Das Alles kann man wörtlich unterschreiben. Aber gerade bei der Schilderung eines solchen Schriftstellers verlangt der Leser, dass jene „originellen und geistreichen Grundgedanken" scharf hervorgehoben würden, dass sie, möchten wir sagen, in gesperrter Schrift hervorträten, sei es als Einleitung zu den einzelnen Capiteln, sei es als Schlussresultat derselben. Diesem Verlangen genügt Herr Weissenborn nicht. Er giebt ausführliche Auszüge aus Tschirnhaus' Abhandlungen und Briefwechsel. Wir billigen dieses Verfahren. Wir sind auch einverstanden damit, wenn er durch Mittel der modernen Analysis prüft, ob die Sätze, zu welchen Tschirnhaus gelangte, wahr sind oder falsch. Allein wir vermissen den Auszug aus den Auszügen, die Herstellung der, ob wahren, ob falschen ist gleichgültig, leitenden Ideen. Diese finden wir nirgends in der ganzen Schrift, weder bei Tschirnhaus' Versuchen, eine Quadrirung auszuführen, noch bei den Arbeiten über Rectification oder über Tangentenziehung; eine nicht genügende Andeutung bei den Arbeiten über Gleichungen.

Allerdings wäre Das, was wir vermissen, sehr schwierig zu leisten. Referent gesteht gern ein, dass er die Absicht hatte, in dieser Recension ergänzend den Versuch zu machen, jene Grundgedanken zu enthüllen, und dass der bedeutende Zeitaufwand, welchen schon diese Absicht ihm kostete, ihn davon abschreckte. Wir tadeln also nicht etwa in dem Sinne, als ob ein leicht zu Beschaffendes in der Weissenborn'schen Schrift fehle; aber dass es fehlt, und dass damit die Würdigung der Verdienste von Tschirnhaus nicht als geglückt bezeichnet werden kann, durften wir nicht verschweigen. Vielleicht gelingt es Herrn Weissenborn, der sich ja unstreitig tief in Tschirnhaus' Leistungen eingearbeitet hat, in einer compendiösen nachträglichen Abhandlung diese Ergänzung selbst zu liefern.

Heidelberg. CANTOR.

Bibliographie

vom 1. Juli bis 1. September 1867.

Periodische Schriften.

Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, redig. von R. Wolf. 12. Jahrg. 1. Heft. Zürich, Höhr. pro compl. 3 Thlr.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. Bd. 26 (Registerband). Wien, Gerold. 16⅔ Thlr.

—— Register zu Band 1—25 apart 12 Ngr.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'académie impér. des sciences de St. Petersbourg. Tome IV, livr. 1. Leipzig, Voss. 18 Ngr.

Mélanges physiques et chimiques tirés du bulletin de l'acad. impér. des sciences de St. Pétersbourg. Ebendaselbst. 23 Ngr.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie II, Tomo 22. Torino, Loescher. 60 *l.*

(Cavalli, sur la résistance statique et dynamique des solides.
Plana, J., sur le rapport qui existe entre le refroidissement de la masse totale du globe terrestre et le refroidissement de sa surface.
Scacchi, sulla poliedria delle facce dei cristalli.)

Reine Mathematik.

Sass, J. B., Buchstabenrechnung und Algebra. 1. Theil. 4. Aufl. Altona, Schlüter. 27 Ngr.

—— Resultate dazu. Ebendaselbst. ¼ Thlr.

Hofmann, F., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. Theil. Arithm. Aufg. Bayreuth, Grau. 15 Ngr.

Reiss, M., Beiträge zur Theorie der Determinanten. Leipzig, B. G. Teubner. 1 Thlr.

Hankel, H., Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. 1 Theil. Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig, Voss. 1⅕ Thlr.

BACHMANN, P., Theorie der complexen Zahlen, welche aus zwei Quadratwurzeln zusammengesetzt sind. Berlin, Weber & Co. ⅓ Thlr.

STERN, M. A., Ueber die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung. Göttingen, Dieterich. ⅓ Thlr.

ZMURKO, L., Beitrag zur Theorie des Grössten und Kleinsten der Functionen mehrer Variabelen. (Akad.) Wien, Gerold. 10 Ngr.

SCHÄFER, R., Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Berlin, Behrend. 1⅔ Thlr.

PFAFF, H., Neuere Geometrie. Erlangen, Deichert. 2⅓ Thlr.

STEINER's Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2. Theil. Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften; bearb. von H. Schrötter. Leipzig, B. G. Teubner. 4 Thlr.

GRÜNFELD, H., Elementarcursus der Geometrie. 2. Ausg. Schleswig, Schulbuchhandlung. 12 Ngr.

FIEDLER, W., Die Methodik der darstellenden Geometrie zugleich als Einleitung in die Geometrie der Lage. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Ngr.

STOLZ, O., Die Axen der Linien zweiter Ordnung in allgemeinen trimetrischen Punktcoordinaten. (Wiener Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

STEGMANN, A., Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Kempten, Kösel. 18 Ngr.

ERLER, W., Aufgaben aus der Mathematik für grössere Vierteljahrsarbeiten der Primaner. Jena, Frommann. 24 Ngr.

BENECKE, A., Ueber die geometrische Hypothesis in Platon's Menon. Elbing, Meissner. ⅓ Thlr.

THOMAE, J., *De propositione quadam Riemanniana ex analysi situs. Diss. inaug.* Berlin, Calvary & Co. 8 Ngr.

LAGRANGE. *Oeuvres de Lagrange, publiées par les soins de M. J. A. Serret. Tome I. Paris, Gauthier-Villars.* 30 *fr.*

Angewandte Mathematik.

HAGEN, G., Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Aufl. Berlin, Ernst & Korn. 1⅓ Thlr.

KOUTNY, E., Construction der perspectivischen Selbstschattengrenze von Rotationsflächen unter Voraussetzung paralleler Lichtstrahlen. (Akad.) Wien, Gerold. 16 Ngr.

STEFAN, J., Ueber die Longitudinalschwingungen elastischer Stäbe. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

WINKLER, E., Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik. 1. Theil. 1. Hälfte. Prag, Dominicus. 1 Thlr. 16 Ngr.

LAMEZAN, G. v., Die theoretisch beste Curve für die Spitze der Geschosse und Schiffe. München, liter.-artist. Anst. 16 Ngr.

RZIHA, E., Theorie der Minen, basirt auf die Wellenbewegung in concentrischen Kugelschichten. Lemberg, Winiarz. 1⅓ Thlr.

CLAUSIUS, R., Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie. 2. Abth. Braunschweig, Vieweg. 1⅓ Thlr.

MAYER, J. R., Die Mechanik der Wärme in gesammelten Schriften. Stuttgart, Cotta. 1 Thlr. 18 Ngr.

VOGEL, H., Beobachtungen von Nebelflecken und Sternhaufen am sechsfüssigen Refractor und zwölffüssigen Aequatoreal der Leipziger Sternwarte. Leipzig, Engelmann. 1 Thlr.

LITTROW, K. v., Bestimmung der Meridiandifferenz Leipzig-Dablitz für die mitteleuropäische Gradmessung. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

ARGELANDER, F., Astronmische Beobachtungen der Sternwarte zu Bonn. 6. Bd. (Mittlere Oerter von 33811 Sternen etc.) Bonn, Marcus. 5 Thlr.

KLINKERFUES, W., Die Aberration der Fixsterne nach der Weltentheorie. Leipzig, Quandt & Händel. 15 Ngr.

WERNER, G., Leitfaden zum Studium der Krystallographie. Hannover, Rümpler. 24 Ngr.

DUBOIS, E., *De la déviation des compas à bord des navires et du moyen de l'obtenir à l'aide du compas de déviation. Paris, Bertrand.* 3 *fr.*

SONNET, H., *Dictionnaire des mathématiques appliquées. Fascic.* 1 *et* 2. *Paris, Hachette.* 28 Ngr.

Physik.

DOVE, H. W., Ueber die mittlere und absolute Veränderlichkeit der Temperatur der Atmosphäre. (Akad.) Berlin, Dümmler. 1 Thlr. 2 Ngr.

LANG, V. v., Krystallographisch-optische Bestimmungen mit Rücksicht auf homologe und isomorphe Reihen. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

KNOP, A., Molecularconstitution und Wachsthum der Krystalle. Leipzig, Haessel. 1 Thlr.

PLANTAMOUR, E., *Des anomalies de la température observées à Genève pendant les* 40 *années* 1826—1865. Basel, Georg. 1⅓ Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

'Ιωάννου Γραμματικοῦ 'Αλεξανδρέως τοῦ Φιλοπόνου εἰς τὸ δεύτερον τῆς Νικομάχου ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς. Primum edidit Ricardus Hoche. *Berolini, apud S. Calvary eiusque socium MDCCCLXVII.* VIII. 38. (W. H. Blume gewidmet.)

Der Herausgeber der *ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή* des Nikomachos giebt nach der Herausgabe des Commentars des Johannes Philoponos zu dem 1. Buch derselben (Lips. 1864) nun auch die Fortsetzung, den Commentar desselben Verfassers zu dem 2. Buche. Die Bedeutung einer solchen Arbeit darf nicht nach dem Werth derselben an sich geschätzt werden. Die blossen Wiederholungen der einfachsten Sätze wären kaum des Druckes werth, geschweige der Mühen, welche demselben vorhergehen und ihn begleiten. Gleichwohl wird man noch öfter veranlasst sein, diesen Commentar nachzusehen und dann Dem Dank wissen, der ihn so leicht zugänglich gemacht hat.

Für den Text des Nikomachos hat Hoche selbst bereits Nutzen aus dem Commentar gezogen, wie die Stellen II, 1, 16. XI, 2, 19. XII, 8, 5. XIII, 6, 2. XIV, 5, 3. XV, 4, 17. XIX, 4, 23 und 6. XXIII, 6, 16. XXIV, 4, 19. 10, 20 und 1 und 2. XXVI, 1, 7 und 8, S. 135. XXVII, 1, 13, S. 137 seiner Ausgabe beweisen. Es werden noch andere Stellen sich finden, an denen Philoponos zu Rathe gezogen werden kann. Referent ist z. B. auf eine gestossen, die der Beachtung werth scheint. Zu XXV, 3, 1, S. 133 führt Hoche für die Lesart *ἀμφοτέρων* nur die Handschrift H. an. Es spricht dafür aber auch das, was Philoponos ϛζ, 3 schreibt, woraus man zugleich sieht, dass dieser statt *ἤτοι γὰρ ἑκατέρων* in seiner Handschrift gelesen hat *μέρει ἑαυτοῦ ἢ ἀμφοτέρων.* Dabei ist es für die Beurtheilung des Philoponos beachtenswerth, dass er die Unhaltbarkeit des *ἑαυτοῦ* nicht erkannt hat, sondern mit der Andeutung der Unverständlichkeit der ganzen Stelle sich begnügte, deren Sinn *Boetius inst. arithm.* II, 47 ohne Anstand darlegt. Mag man aber dem Philoponos das allzusichere Festhalten an dem ihm vorliegenden Text gar nicht anrechnen, so findet man doch Anderes noch, was zu seinen Ungunsten spricht. So wird *k*, 17—18, dass $1\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}=1\frac{1}{8}$, ausgerechnet mit $2.3=6$ und $6+2=8$, also 8 aus einer grund-

losen Verbindung der in den Worten *ἐπίτριτος* und *ἡμιόλιος* liegenden Zahlen 3 und 2 abgeleitet. Im Kap. *νζ* versteht Philoponos das *ἰσάκις ἴσοι ἐλαττονάκις* falsch, indem er Letzteres auf das Quadrat, nicht auf die Seite des Quadrates bezieht. S. 36 zwar, *ρλδ*, 6, giebt er ein richtiges Beispiel, im Folgenden aber fällt er wieder in einen ähnlichen Fehler. Letzteres Kapitel ist aber in einem solchen Zustand, dass es sehr zweifelhaft ist, ob Philoponos für alles darin Geschriebene verantwortlich gemacht werden kann. Denn dass $12 = 1\frac{1}{2}.8$ und *ϛ η ιβ* eine *γεωμετρικὴ ἀναλογία*, wie es S. 36, 19—20 heisst, ist ihm wohl schwerlich zuzumessen, ebenso wenig die Verwirrung in den Zeilen 25—28. Aber die Behauptung, dass auch die *δυάς* keine Zahl sei (*ξ*, 9), die Verwendung der *σφαιρικὰ καὶ γραμμικὰ* des Nikomachos (II, XXI, 1) zu einer *ἀναλογία σφαιρική τε καὶ γραμμική* (*ο*, 4), die Erläuterung der *ἀναλογία οβ*, 3—6, deren Sinn erst *οε*, 8—9 zeigt, die Deutung der Worte des Nikomachos *ἄν τε ἐναλλάξ* (XXIII, 5) auf die blosse Umkehr des Verfahrens (*πα*, 4—8), während Nikomachos die 3 Formen $\beta\smile\gamma\smile\delta$, $\beta\smile\gamma\ \delta\smile\varepsilon$, $\beta\ \overset{\frown}{\gamma\ \underset{\smile}{\delta}}\ \varepsilon$ vor Augen hat, die Deutung des *ἀρτιοταγεῖς* (*πθ*, 3) durch *ἐν διπλασίονι λόγῳ* sammt einem Beispiel von 7 Gliedern, statt eines mit Gliedern in gerader Anzahl, die Division mit 2 (*ριη*, 13) statt der Ausziehung der Quadratwurzel auf Grund der zufälligen Gleichung $\frac{4}{2} = \sqrt{4}$, dies alles scheint von Philoponos herzurühren.

Verringert sich dadurch das Interesse an seiner Arbeit, so lässt sich andererseits hervorheben, dass es Beachtung verdient, dass Philoponos in *κδ* nur die griechischen Buchstaben und das Ausdrücken der Zahlen durch Punkte oder Striche nennt, während es ihm doch sehr nahe lag, besondere Zahlzeichen anzuführen, wenn er solche kennen gelernt hätte, dass in *ξε*, 6 12.12 in der Form $(10+2).(10+2)$ multiplicirt wird, dass in *λα*, 19—26 die *μέθοδος τετραγώνων δίαυλος*, in *μϛ* die Entstehung von *γραμμή*, *ἐπίπεδον* und *στερεόν* durch die Bewegung von *σημεῖον*, *γραμμή*, *ἐπίπεδον*, in *νε*, 18 die ungenaue Verwendung des Wortes *ἕτερον* durch die Athener auch bei mehr als 2 Dingen — mit dem Unterschied von *ἑτερομήκης* und *προμήκης* nimmt es Philoponos selbst nicht genau, z. B. ϟ, 12 und 15. *ριη*, 7 — in *ϟβ*, 9 die *σειρὰ χρυσῆ* des Homer (Il. 8, 25—26), in *ργ* die Weise der alten Musik gegenüber der *νέα μουσική* angegeben wird.

Die Arbeit Hoche's selbst giebt in der *praefatio* die *variae lectiones* zunächst aus 4 Handschriften, einer von Göttingen (G), einer von Hamburg (H) und zwei aus München (*μ* und *M*); den Text, den die Handschrift in Zeitz bietet, will Hoche bei einer anderen Gelegenheit mittheilen; doch blieb dieselbe nicht ganz unberücksichtigt, z. B. bei [*ε*] und *κη*, 1. Bei *πη*, 12 findet sich auch die in der Ausgabe des Nikomachos mit *S* bezeichnete Handschrift aus München, und es wäre gut, wenn die Bedeutung dieses *S* kurz beigefügt wäre. Am Schluss der *praefatio* werden noch einige Stellen

des I. Buches mitgetheilt, in welchen *M* von *G* und *H* abweicht. Dieses Voraausstellen der Lesarten mag bei der Herstellung der Arbeit Vortheile bieten, die Benutzung erschwert es, zumal als die Anwendung der Klammern im Text zwar eine mannichfaltige ist und bald eine Conjectur oder einen Zusatz des Herausgebers, bald eine Stelle bedeutet, die der eine oder andere Codex allein hat, oder die in einer Handschrift fehlt (vgl. α, 8.23. ιϛ, 8. λβ, 11. ξη, 1.4. οα, 12.13), aber doch nicht alle Stellen umfasst, an denen eine Verschiedenheit der Lesart stattfindet. Umgekehrt vermisst man auf S. II die Angabe, wie es sich mit dem [τῇ] κγ, 4 verhält.

Der Text, dem ein sehr dankenswerther *Index nominum* für den ganzen Commentar des Philoponos folgt, ist dadurch bequem zur Benutzung eingerichtet, dass an der Seite die Kapitel der Arithmetik des Nikomachos angegeben sind, an welche Philoponos anknüpft. Ihn auch leicht lesbar zu machen, hat Hoche sehr grosse Sorgfalt angewendet und an sehr vielen Stellen die bei Handschriften unausbleiblichen Uebelstände, wie Lücken, Verschreibungen u. ä. verbessert. Man sehe z. B. α, 8 [τὸ], ο, 20 [τριττή], ϟδ, 2.4.5 die Ergänzungen. Die wenigen Bemerkungen, die Referent hierüber noch zu machen hat, sind folgende. ζ, 3 muss es statt ὑπεπιτέταρτος nach Nikomachos I, 18, 3 ὑποτετραπλάσιος heissen. — ιγ, 11 ist zwischen ἡμιόλιος und β ἡμιολίους eine Lücke, die mit καὶ δ ϑ τοῦ ϛ· ὁ οὖν δ auszufüllen ist. — ιδ, 4 stünde wohl vor οὕτως besser noch διπλάσιος, wenigstens würde dadurch deutlicher, wie das Eingeklammerte ausfiel. — ib. 6 ist das Komma nach β zu tilgen. — λα, 2.3 passt τρίγωνοι μὲν ἀριϑμοὶ γίνονται und εὑρήσεις τοὺς τριγώνους nicht zusammen; letzteres scheint ein späterer Zusatz und statt λαμβανομένων scheint λαμβανομένου zu schreiben zu sein. Vergl. κγ, 19. — λβ, 11 ist μείζονος überflüssig, da τοῦ πρὸ αὐτοῦ nachfolgt. — λε, 2 ist nach β^ος noch δὲ einzusetzen, wenn es nicht vielleicht hiess ιβ δὲ β^ος. — λη, 5. μβ, 7.12.18 vermisst man die angedeuteten Zahlgruppen. — μγ, 8 ist vor μετ' αὐτόν noch ϛ^ος einzusetzen, wie in der 7. Zeile β^ος steht. — μδ, 5 scheint τῇ δυνάμει τριγώνῳ eine Unmöglichkeit und τῇ wegen μονάδι oder δυνάμει für τῷ verschrieben. — με, 3 ist wohl ebenso ὑποκειμένης wegen des nahen ἕδρας verschrieben statt ὑποκειμένου. — ib. 5 ist εἱς, welches auch in *M* fehlt, überflüssig; vergl. in der 6. Zeile σημεῖον α. — μζ, 22 ist διαστάσει für διαστάσεις zu schreiben. — μη, 13 ist vielleicht unvollständig, da β^ον und γ^ον nicht von derselben Zahlenreihe gelten; doch findet sich eine ähnliche auffallende Kürze auch πγ, 4 αὗται γὰρ ἦσαν ὑπεροχαί für αὕτη γὰρ ἐκ τῶν ὑπεροχῶν συνάγεται. — να, 6 hätte das β^ος des *cod. M* nach κύβος die Aufnahme verdient. — νβ, 9 muss es τετραγώνῳ statt τετραγώνων heissen, wie in der Ausgabe des Nikomachos S. 106, 18. Dort scheint aber in der Zeile 17 zu ὑπὸ τριῶν weder πλευρῶν noch γραμμῶν, sondern γωνιῶν zu ergänzen, was sich auch aus dem Vorhergehenden am leichtesten ergiebt. — νϛ, 13 scheint statt γ^ω vielmehr ϛ zu schreiben. — ib. 26 könnte in den Worten ἐν τῷ δὶς δ... ιϛ eine

eigenmächtige Ergänzung eines Copisten liegen. Der Schluss scheint anzudeuten, dass δὶς γ ς vorhergeht, was *H* hat. — ξα, 2 steht unrichtig τριπλάσιον für διπλάσιον; ξγ, 3 ebenso ις für ιε, ξς, 20 ια für ιγ. — πβ könnte eingeklammert sein, da es in *H* fehlt und der Inhalt zu dem, was Nikomachos sagt, nicht passt. Statt τὸν μέσον ist auch wohl τὸ μέσον zu lesen. — πδ wäre besser nach der Gestalt gegeben worden, die es in *H* hat, welche Handschrift überhaupt die beste zu sein scheint. Die Herbeiziehung der γεωμετρικὴ ἀναλογία in Zeile 4 und 5 ist eine höchst müssige Künstelei. — πε, 19 ist statt ἐπὶ τῶν τετραπλασίων καὶ πενταπλασίων zu schreiben ἐπὶ δ καὶ ε; denn es sind, wie das Folgende zeigt, 4 und 5 Glieder der τριπλάσιοι gemeint. — ϟ, 4 ist nach ἀνάλογος ς beizufügen. — ϟα, 4 muss, wenn das Beispiel $\eta^{\varkappa\iota\varsigma}$ ζ zum Text passen soll, vor ἑτερομήκη ἕτερον ausgefallen sein. — ϟζ, 6 ist für στερεῷ wohl ἑτέρῳ zu schreiben. — ρα, 1 und ριβ, 1 könnte vor (nach) β α ausgefallen sein. — ρθ, 1 ist statt τούτου δὲ ὁ β zu schreiben τούτου δὲ τοῦ β, ριζ, 10 statt προσχωρήσει προχωρήσει, ib. 11 statt να κθ, da zu subtrahiren ist. — ρκ, 4 ist ἔλεγον überflüssig, da εἶπε in der 1. Zeile steht und im 22. Kap. Nikomachos selbst diese 3 Analogien erwähnt. — Druckfehler, die einer Verbesserung bedürfen, finden sich ις, 2 ς statt ις, ν, 1 ἀνήκοσι, statt ἀνήκοοι, ξς, 13 δ statt θ, ib. 34 δάφοροι statt διάφοροι, π, 12 ταῦτο statt τοῦτο, πα, 8 σα statt ἴσα, ϟθ, 1 ε statt ς, ρι, 23 ἑκάσης statt ἑκάστης (S. 33 Z. 3 v. o. ist 25 statt 20 zu schreiben), ρλδ, 35 τοῦ θ statt τοῦ ς.

Hiermit sei das Buch der Beachtung Aller, die es mit Nikomachos und der alten Zahlentheorie überhaupt zu thun haben, bestens empfohlen, H. Hoche aber möge weitere Gelegenheit haben, dieser Seite der Alterthumskunde seine fördernden Dienste zu leisten.

Ansbach. FRIEDLEIN.

Systematisch geordnete Aufgaben zum Unterricht in der Buchstabenrechnung und Algebra für untere und mittlere Klassen von gelehrten Schulen und für den Selbstunterricht von BERNHARD GISEKE, Rector in Erfurt. Halle, Druck und Verlag von H. W. Schmidt. 1867.

Der Verfasser genannten Werkes geht von der Ansicht aus, dass die gebräuchlichen Aufgabensammlungen zu schnell zu den schweren Aufgaben übergehen, die nicht hinlänglich vorbereitet seien und dass überdies in der Lehre von den Gleichungen eine Anordnung der Aufgaben nach bestimmten Rubriken nicht gebräuchlich sei, obgleich eine solche wesentlich dazu beitrage, dem Schüler Sicherheit in der Behandlung einer jeden einzelnen Form von Gleichungen zu geben. Der Autor hat daher die Beispiele zur *Auflösung* der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten so

gewählt, dass ein gegliederter Fortschritt von der einfachsten Form der Gleichung zur complicirtesten stattfindet und dieselben wohl geeignet sind, selbst in vollen Klassen eine möglichste Sicherheit in der Behandlung genannter Gleichungen zu erzielen. Auch die Wahl der Aufgaben aus der Buchstabenrechnung ist im Ganzen eine treffliche. Doch kann Referent nicht umhin, es bedenklich zu finden, dass Potenzen mit negativen Exponenten eingeführt werden, ehe das Wesen derselben erkannt und die Verwandlung derselben in Potenzen mit positiven Exponenten hinlänglich eingeübt ist. Ueberhaupt scheint Referenten die Wurzellehre einigermassen stiefmütterlich behandelt zu sein, insofern, als sämmtliche Sätze über die Wurzeln aus Producten, Brüchen, Potenzen und Wurzeln, sowie die Potenzen mit gebrochenen Exponenten in einem Paragraphen abgehandelt und mit nur 60 Beispielen bedacht sind. Vielleicht wäre hierin, sowie in der Potenzlehre, derselbe Umfang von Aufgaben beizubehalten, den die betreffenden Kapitel in Heis' Sammlung von Aufgaben etc. haben. Auch dürfte sich der Verfasser bewogen finden, in der nächsten Auflage ein Kapitel über das Aufsuchen des gemeinschaftlichen Divisors und des gemeinschaftlichen Dividuus algebraischer Ausdrücke dem Werkchen einzufügen, da die Kenntniss dieses Verfahrens in den Paragraphen von dem Heben und dem Addiren der Brüche vorausgesetzt wird.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der algebraischen oder rechnenden Stereometrie für Gymnasien, Real- und höhere Bürgerschulen, Gewerb-, Bau- und Militärschulen u. s. w., bearbeitet und herausgegeben von Albert Dilling, Dr. phil. und Gymnasiallehrer zu Mühlhausen in Thüringen. Halle, Druck und Verlag von H. W. Schmidt. 1866.

Die Aufgabe der rechnenden Stereometrie besteht bekanntlich darin, die Beziehungen aufzusuchen, die der Inhalt der Körper, deren Oberflächen, der Inhalt der Flächen, die man an denselben unterscheidet, sowie die Längenzahlen der Kanten und sonstigen Linien, die man in den Körpern ziehen kann, unter einander haben. Muss sich nun der Unterricht in der Stereometrie in den meisten Fällen darauf beschränken, die Hauptformeln in Bezug auf den körperlichen Inhalt und die Oberfläche der Körper zu entwickeln und muss sich der Lehrer darauf verlassen, dass die Schüler eine hinlängliche Geschicklichkeit in der Algebra erlangt haben, um erforderlichen Falles die Transformationen und Eliminationen an den gegebenen Formeln auch ohne Hülfe des Lehrers vornehmen zu können und sind zahlreiche Aufgaben erforderlich, um die Fertigkeit der Schüler zu erhöhen, genannte Relationen in möglichst einfacher Form zum Ausdruck zu bringen, so wird gewiss jeder Lehrer der Mathematik obengenanntes Werk mit

Freuden begrüssen, das in systematischer Ordnung, mit erschöpfender Vollständigkeit und in einfachster Form genannte Relationen in Bezug auf das Prisma, das Parallelepiped, den Würfel, den Cylinder, die Pyramide, den Kegel, den Pyramiden- und den Kegelstumpf, ferner die Kugel und ihre Theile, sowie die regelmässigen Körper zusammengestellt enthält und mit einer solchen Fülle von wohlgewählten Beispielen versehen ist, dass der Lehrer auf mehrere Jahre hinaus eine Auswahl treffen kann. Ist nun auch Referent mit der Beschränkung des Stoffes auf das im Werke Gebotene im Allgemeinen einverstanden, so glaubt er doch den Wunsch aussprechen zu dürfen, dass es dem Autor gefallen möge, in der zweiten Auflage das Ponton, den drei- und mehrkantigen Ring, das Prismatoid und das mehrseitige schiefabgeschnittene senkrechte Prisma einer gleichen Behandlung zu unterwerfen und umsomehr das letztere, als es den passendsten Uebergang zum schiefabgeschnittenen senkrechten Cylinder bildet.

Dresden. Corn. Jos.

Bibliographie

vom 1. September bis 15. October 1867.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 10. Bd. 1. Abth. München, Franz. 4 Thlr.

Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften. 1867. II. Bd. 1. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft; herausg. von C. Bruhns. 2. Jahrg. 1867. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. ½ Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1865. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 21. Jahrg., redig. von H. Kiessling und A. Kundt. 1. Abth. Berlin, G. Reimer. 1⅚ Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. A. Zuchold. 17. Jahrg. 1. Heft, Januar bis Juni 1867. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 7 Ngr.

Reine Mathematik.

Traub, C., Theorie der sechs einfachsten Systeme complexer Zahlen. 1. Theil. 1. Hälfte. Mannheim, Schneider. ¼ Thlr.

Lieblein, J., Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. Prag, Satow. 1⅙ Thlr.

Neumann, C., Theorie der Bessel'schen Functionen. Leipzig, Teubner. ⅔ Thlr.

Dienger, J., Grundriss der Variationsrechnung. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

Unferdinger, F., Nähere Bestimmung des Unterschiedes zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel positiver Grössen und ein daraus abgeleitetes Theorem der Integralrechnung. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

—— Die Summe der Exponential-, der Sinus- und Cosinusreihe mit alternirenden Zeichengruppen. Ebendas. 3 Ngr.

Staudt, Ch. v., Von den reellen und imaginären Halbmessern der Curven und Flächen zweiter Ordnung. Nürnberg, Bauer & Raspe. 12 Ngr.

Steiner's, J., Vorlesungen über synthetische Geometrie. 1. Thl. Die Kegelschnitte in elementarer Darstellung; bearb. von C. Geiser. Leipzig, Teubner. 1⅔ Thlr.

Sturm, R., Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. Leipzig, Teubner. 2⅔ Thlr.

Morstadt, R., Ueber die directe Bestimmung der Achsen von Kreisbildern. (Akad.) Wien, Gerold. 5 Ngr.

Prestel, M., Vorschule der Geometrie. 3. Aufl. Leipzig, E. Fleischer. 1⅓ Thlr.

Zehme, W., Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. 4. Aufl. Hagen, Butz. 16 Ngr.

Ligowski, W., Taschenbuch der Mathematik. Tabellen und Formeln zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Berlin, Ernst & Korn. 26 Ngr.

Boetii, A., *De institutione arithmetica libri II, de institutione musica libri V. E libris manu scriptis edidit G. Friedlein.* Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 21 Ngr.

Brahy, E., *Exercices méthodiques de calcul différentiel. Bruxelles, Muquardt.* 1⅔ Thlr.

Michaelis, J. P., *Discussion des courbes et des surfaces du second degré.* Luxemburg, Bück. ⅓ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Wittstein, Th., Mathematische Statistik und deren Anwendung auf Nationalökonomie und Versicherungswissenschaft. Hannover, Hahn. 28 Ngr.

Lazarus, W., Ueber Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen. Hamburg, Meissner. 12 Ngr.

Generalbericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1866. Berlin, G. Reimer. 1 Thlr.

PAALZOW, A., Ueber die Drehung fester Körper, insbesondere der Geschosse und der Erde. Vortrag. Berlin, Weber & Comp. ⅙ Thlr.

WEISBACH, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 2. Theil. Statik der Bauwerke und Mechanik der Umtriebsmaschinen. 4. Aufl. 9. und 10. Lief. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

SCHJELLERUP, H., Genäherte Oerter der Fixsterne, von welchen in Bd. 1—66 der Astronomischen Nachrichten selbstständige Beobachtungen angeführt sind. Leipzig, Engelmann. ⅔ Thlr.

LITTROW, C. v., Sternschnuppen und Kometen. Geschichte der Entdeckung des Zusammenhanges zwischen diesen beiden Gattungen von Himmelskörpern. Wien, Gerold. 8 Ngr.

HANSEN, P. A., Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. veröffentlichten Störungen dieses Planeten, berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. Leipzig, Hirzel. 2 Thlr. 8 Ngr.

WEISS, E., Bericht über die Beobachtungen während der ringförmigen Sonnenfinsterniss am 6. März 1867 in Dalmatien. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

Nivellement de précision de la Suisse exécuté par la commission géodésique fédérale sous la direction de A. Hirsch et E. Plantamour. 1. *livr.* Basel, Georg. 1 Thlr. 2 Ngr.

SEGOIARO, P., *Considerazioni e calcoli sulla teoria degli archi equilibrati. Milano, Fratelli Bocca.* 4 *L.*

Physik.

DOVE, H. W., Ueber Eiszeit, Föhn und Scirocco. Berlin, D. Reimer. ⅓ Thlr.

BECQUEREL, E., *La lumière, ses causes et ses effets. T. I. Sources de la lumière. Paris, Didot frères.*

QUETELET, A., *Météorologie de la Belgique, comparée à celle du globe. Bruxelles, Muquardt.* 10 *fr.*

Mathematisches Abhandlungsregister.

1866.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Aequivalenzen.

179. Allgemeine Theorie der Wurzeln der Aequivalenzen mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der Gleichungen. Grunert. Grun. Arch. XLV, 454.

Aerodynamik.

180. *On the motion of a small sphere acted upon by the undulations of an elastic fluid.* *Challis. Phil. Mag. XXXI*, 343.
181. *On the fundamental ideas of Matter and Force in theoretical physics. Challis. Phil. Mag. XXXI*, 459.

Akustik.

182. *Sur les vibrations des plaques carrées. A. Terquem. Compt. rend. LXIII*, 378.
183. Ueber den Einfluss der inneren Reibung in der Luft auf die Schallbewegung. Stefan. Wien. Akad.-Ber. LIII, 529.
184. Ueber Interferenztöne. Stefan. Wien. Akad. Ber. LIII, 696.

Analytische Geometrie der Ebene.

185. Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. Hesse. Zeitschr. Math. Phys. XI, 369.
186. Ein Uebertragungsprincip. Hesse. Crelle LXVI, 15.
187. *Sur la transformation des lignes planes par la méthode des rayons vecteurs réciproques. Habich. N. ann. math. XXV*, 399.
188. Betrachtungen über das ebene Dreieck. Grunert. Grun. Arch. XLV, 429.
189. *De la courbe qui est à elle-même sa propre podaire. Haton de la Goupillière. Journ. Mathém. XXXI*, 329.
190. *Ligne droite, dont l'équation est* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2r}=0$, *p, q, r étant les perpendiculaires sur la ligne droite de 3 points donnés. Laisant. N. ann. math. XXV*, 461.
191. *De Rhombis, quorum latera per vertices trianguli aequilateri transeant, annotationes.* Lindman. Grun. Archiv XLV, 344.
192. *Condition nécessaire pour que deux ellipses de Cassini se coupent orthogonalement. Laisant. N. ann. math. XXV*, 466.

   Vergl. Brennpunkte 210, 211. Doppeltangenten. Ellipse. Kegelschnitte. Kreis. Kreisliniencoordinaten. Krümmung 304. Parabel. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

193. *Sur une nouvelle géométrie de l'espace. Plücker.* Journ. Mathém. XXXI, 331.

194. Ueber gewisse Beziehungen zwischen räumlichen Gebilden. Lipschitz. Crelle LXVI, 267.
195. *Sur la plus courte distance de deux droites quand elles deviennent parallèles. De Saint-Germain. N. ann. math. XXV*, 346.
    Vergl. Brennpunkte 209. Complanation. Cubatur. Krümmung 303. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Approximation.

196. *Sur l'approximation. N. ann. math. XXV*, 407.
197. *Sur l'erreur commise dans le calcul de π par la méthode des isopérimètres. Hermann. N. ann. math. XXV*, 509.

Astronomie.

198. *Astronomical prolusions. Sylvester. Phil. Mag. XXXI*, 52, 287, 380.
199. *On the reduction of the rectangular coordinates of the sun referred to the true equator and equinox of date to others referred to the mean equator and equinox of the beginning of the year.* Hill. Astr. Nachr. LXVII, 141.
200. *Auxiliary tables for the solution of Lambert's equation with a few remarks on the determination of cometary orbits.* Marth. Astr. Nachr. LXV, 321.
201. *Méthode particulière pour le calcul de l'orbite d'une petite planète vue peu de jours. De Gasparis. Compt. rend. LXIII*, 1076.
202. Ueber einige Irrthümer in Hansen's dritter Abhandlung über die Berechnung der Störungen der kleinen Planeten. Lesser. Astr. Nachr. LXVII, 187. — Möller. ibid. LXVIII, 239.
203. Ueber die Verbesserung einer Planetenbahn. Tietjen. Astr. Nachr. LXVII, 91.
204. *Note sur la théorie de la Lune au sujet d'un mémoire de Laplace de l'année* 1786. *Allégret. Compt. rend. LXIII*, 635.
205. *Method of calculating the coefficients of the lunar inequalities. Holt. Phil. Mag. XXXII*, 490.
    Vergl. Geschichte der Mathematik 255, 256, 257, 259, 260. Refraction.

Attraction.

206. Ueber die Anziehung eines homogenen Polyeders. Mehler. Crelle LXVI, 375.
207. Ueber die Anziehung elliptischer und kreisförmiger Scheiben. Grube. Zeitschr. Math. Phys. XI, 437.

B.

Binomialcoefficienten.

208. Ueber einen Euler'schen, auf Binomialcoefficienten bezüglichen Satz. Wolfers. Grun. Archiv XLV, 411.

Bipolarcoordinaten.

Vergl. Astronomie 198. Normalen 326.

Brennpunkte.

209. *Sur le lieu des foyers des sections centrales des surfaces du second degré. Le Besgue. N. ann. math. XXV*, 444. — *Painvin. ibid.* 553. [Vergl. Bd. X, No. 366.]
210. *On the locus of the foci of the conics, which pass through four given points. Cayley. Phil. Mag. XXXII*, 362.
211. Eine neue Erzeugungsweise der Focalpunkte der Cassinoiden. D'Arrest. Astr. Nachr. LXVI, 135.

C.

Cartesische Ovale.

Vergl. Astronomie 198.

Cassinische Curve.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 192. Brennpunkte 211. Normalen 326.

Complanation.

212. Ueber das Problem der Complanation. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XI, 505.
Vergl. Maxima und Minima 307. Variationsrechnung.

Convergenzbedingungen.

213. Einfacher Beweis des Gauss'schen Kriteriums über die Convergenz unendlicher Reihen. Pranghofer. Wien. Akad.-Ber. LIII, 503.
214. Ueber ein angeblich neues Kriterium für die Convergenz unendlicher Reihen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XI, 354. [Vergl. Nr. 17.]
215. Bemerkung über Doppelreihen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XI, 426.

Cubatur.

216. *Nouveaux théorèmes relatifs aux secteurs dans l'espace.* Oppermann. Astr. Nachr. LXVI, 129.
Vergl. Maxima und Minima 307. Tetraeder 370, 371, 372. Variationsrechnung.

D.

Determinanten.

217. Ueber einen Satz aus der Determinantentheorie. Stern. Crelle LXVI, 285.
218. Ueber ein Product zweier Determinanten. v. Hunyady. Zeitschr. Math. Phys. XI, 359.
Vergl. Methode der kleinsten Quadrate.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

219. *Les polaires des points milieux des côtés d'un triangle relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle déterminent un triangle qui a une surface constante.* *Neuberg.* *N. ann. math. XXV*, 511.
220. Ueber tetraedral-symmetrische Flächen. v. Hunyady. Zeitschr. Math. Phys. XI, 356. [Vergl. Nr. 56.]
Vergl. Brennpunkte 210.

Differentialgleichungen.

221. Ueber den Einfluss von Realitäts- und Stetigkeitsbedingungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Christoffel. Crelle LXVI, 1.
222. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Fuchs. Crelle LXVI, 121.
223. Zur Lehre von der Integration linearer Differentialgleichungen. Wassmuth. Grun. Archiv XLV, 70.
224. *Note sur l'intégration des équations differentielles simultanées et linéaires.* *Prouhet.* *N. ann. math. XXV*, 323.
225. Ueber die Integration der Differentialgleichung $y'' = ay + \psi(x)$. Rogner. Grun. Archiv XLV, 315.
226. *A remark on differential equations.* *Cayley.* *Phil. Mag. XXXII*, 379.
227. Ueber singuläre Auflösungen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. H. Weber. Crelle LXVI, 193.

Doppeltangenten.

228. Ueber die Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung. Roch. Crelle LXVI, 97.
229. *Propriété d'une courbe de troisième classe ayant une tangente double.* Bricout *de Montay.* *N. ann. math. XXV*, 333.

E.

Ellipse.

230. *Lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse ou à une hyperbole des tangentes faisant un angle donné.* Massing. *N. ann. math. XXV*, 329.
231. *Un cercle se meut en restant tangent à une ellipse de manière à avoir avec cette courbe un système de tangentes communes parallèles; quel est le lieu de son centre?* Amalric. *N. ann. math. XXV*, 469.
 ergl. Attraction 207.

F.

Functionen.

232. Ueber die Entwickelung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplace'schen Functionen höherer Ordnung. Mehler. Crelle LXVI, 161.
233. Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1866, 97.
234. *On the evaluation of vanishing functions.* Young. *Phil. Mag. XXXII*, 121.
 Vergl. Binomialcoefficienten. Kugelfunctionen. Ultraelliptische Transcendenten.

Fusspunktslinie.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 189.

G.

Geodäsie.

235. *On the figure of the earth.* Pratt. *Phil. Mag. XXXI*, 144, 430; *XXXII*, 17, 132, 313. — Clarke. *ibid. XXXI*, 193; *XXXII*, 236.
236. *Explication du tableau des données numériques qui fixent sur la surface de la France et des contrées limitrophes les points, où se coupent mutuellement 29 cercles du réseau pentagonal.* Elie de Beaumont. *Compt. rend. LXIII*, 29, 70, 105.
237. Ueber die Anwendung der anharmonischen und harmonischen Verhältnisse zur Auflösung einiger Aufgaben der Geodäsie. Franz Müller. Grun. Archiv XLV, 395.
238. *On secular local changes in the sea level.* Heath. *Phil. Mag. XXXI*, 201, 323; *XXXII*, 34.

Geometrie (descriptive).

239. Neue Constructionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinenden Reflexe und hierauf bezügliche Theoreme. Niemtschik. Wien. Akad.-Ber. LIII, 577.
240. *Construction graphique de la courbe gauche du troisième ordre qui passe par six points donnés dans l'espace.* Poudra. *N. ann. math. XXV*, 313.
 Vergl. Brennpunkte 211.

Geometrie (höhere).

241. Geometrische Betrachtungen und Lehrsätze. Steiner. Crelle LXVI, 237.
242. *Sur les problèmes de contact des courbes algébriques.* De Jonquières. *Crelle LXVI*, 289.
243. *Détermination du nombre des courbes d'ordre* r *qui ont un contact d'ordre* $[n < mr]$ *avec une courbe donnée d'ordre* m *et qui satisfont en outre à* $\frac{r(r+3)}{2} - n$ *autres conditions quelconques.* De Jonquières. *Compt. rend. LXIII*, 423.
244. *Détermination du nombre des courbes du degré* r, *qui ont deux contacts, l'un d'ordre* n, *l'autre d'ordre* n' $[n+n' < mr-1]$, *avec une courbe donnée du degré* m *et qui satisfont en outre à* $\frac{r(r+3)}{2} - n - n'$ *autres conditions.* De Jonquières. *Compt. rend. LXIII*, 485.

245. *Détermination du nombre des courbes de degré* r, *qui ont avec une courbe fixe* U^m *du degré* m *autant de contacts d'ordre quelconque qu'on le voudra et qui satisfont en outre à d'autres conditions données.* De Jouquières. *Compt. rend. LXIII*, 522.
246. *Note sur quelques formules de Mr. de Jonquières relatives aux courbes qui satisfont à des conditions données.* Cayley. *Compt. rend. LXIII*, 666.
247. *Remarques sur les questions de contact de courbes d'ordre quelconque avec une combe donnée dont les points se déterminent individuellement.* Chasles. *Compt. rend LXIII*, 670.
248. *Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces.* De Jonquières. *Compt. rend. LXIII*, 793, 870. — Chasles. *ibid.* 816, 874, 907.
249. Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades. Reye. Zeitschr. Math. Phys. XI, 280.
250. *Recherches sur les réseaux plans.* Jordan. *Compt. rend. LXIII*, 1061.
251. *Sur l'interprétation des formules qui donnent les angles des droites et des plans dans l'espace.* Painvin. *N. ann. math. XXV*, 337.
252. *Sur un faisceau de trois droites concourantes en un même point.* Viant. *N. ann. math. XXV*, 558.
253. *Propriété des points de la circonférence circonscrite à un triangle équilatéral.* Grossouvres. *N. ann. math. XXV*, 556.
254. Ueber die Erzeugung der Curven dritter Classe und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes. Siebeck. Crelle LXVI, 344.

Geschichte der Mathematik.

255. Beschreibung, wissenschaftliche Zergliederung und Gebrauchsweise des persisch-arabischen Astrolabiums. Kržiz. Grun. Archiv XLV, 289.
256. *Sur le quatrième volume des oeuvres d'Alphonse* X *de Castille.* Leverrier. *Compt. rend. LXIII*, 339.
257. Ueber den Entdecker des neuen Sternes vom November 1572 in der Cassiopeia. Wolf. Astr. Nachr. LXV, 63.
258. *Documents relatifs à la chaire de Galileo Galilei et à son buste dans l'Ecole de Padoue.* Zantedeschi. *Compt. rend. LXIII*, 646.
259. Bemerkungen zur Geschichte des zweiten Kometen von 1784. D'Arrest. Astr. Nachr. LXV, 289.
260. Historische Notizen über Nebelflecke. Hermann Schultz. Astr. Nachr. LXVII, 1.
261. *Kant, the author of the assertion, that the velocity of the rotation of the earth must be retarded by the action of the sun and moon in producing tides.* Fick. *Phil. Mag. XXXI*, 322.
262. Nekrolog von Joh. Franz Encke † 26. August 1865. Förster. Astr. Nachr. LXV, 177.
263. Andreas Freiherr von Baumgartner. Pisko. Grun. Archiv XLV, 1.
264. Nekrolog von Marian Koller † 19. September 1866. Reslhuber. Astr. Nachr. LXVIII, 189.

Gleichungen.

265. *On an improved form of statement of the new rule for the separation of the roots of an algebrical equation.* Sylvester. *Phil. Mag. XXXI*, 214.
266. *On the completion of demonstration of Newton's rule.* Young. *Phil. Mag. XXXI*, 369; *XXXII*, 123. [Vergl. Bd. XI, No. 312.]
267. *Note sur les irrationelles algébriques.* Jordan. *Compt. rend. LXIII*, 1063.
268. Geometrische Construction rationaler Polynome. Winckler. Wien. Akad.-Ber. LIII, 326.
269. *Condition nécessaire pour que les deux valeurs de l'inconnue dans une certaine équation du 2e degré soient identique.* Mister & Neuberg. *N. ann. math. XXV*, 354.
270. *Sur les équations algébriques du 3e degré.* Sivering. *N. ann. math. XXV*, 356.
271. *Méthode pour résoudre les équations du 3e degré en amenant dans le premier membre un cube parfait.* Alexandre. *N. ann. math. XXV*, 358, 527.
272. *Résoudre algébriquement l'équation* $[(x+2)^2+x^2]^3=8x^4(x+2)^2$. Renaud. *N. ann. math. XXV*, 429. [Vergl. No. 68]

273. Methode der Auflösung litteraler cubischer und biquadratischer Gleichungen. Matthiessen. Grun. Archiv XLV, 415.

274. *Sur le moyen de ramener une équation quelconque du 4e degré à une équation réciproque du même degré.* *Abadie.* *N. ann. math.* XXV, 477.

275. Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten biquadratischen Gleichung. Kurz. Grun. Archiv XLV, 14. [Vergl. Bd. XI, No. 296.]

276. *Sur une classe de résolvantes de l'équation du cinquième degré.* Brioschi. *Compt. rend.* LXIII, 485, 785.

277. Ueber Malfatti's Resolvente der Gleichungen des fünften Grades. Brioschi. Grun. Archiv XLV, 186.

Vergl. Aequivalenzen. Imaginäres. Trigonometrie 354.

H.

Homogene Functionen.

278. *Décomposer la somme de n+1 carrés $x^2+y^2+\ldots+s^2+(x+y+\ldots+s)^2$ en somme de n carrés.* A. R. *N. ann. math.* XXV, 414.

279. Ueber bilineare Formen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1866, 597.

Homographie.

280. *Propriétés des coniques circonscrites et inscrites à un triangle formé avec 3 points homologues à eux mêmes par rapport à deux figures homographiques.* *Vieille.* *N. ann. math.* XXV, 327.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 196.

Hydrodynamik.

281. *Supplementary Researches in Hydrodynamics.* *Challis.* *Phil. Mag.* XXXI, 33. [Vergl. Bd. XI, No. 304.]

282. *Sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement.* *Kleitz.* *Compt. rend.* LXIII, 958.

Hyperbel.

Vergl. Ellipse 230. Parabel 345.

I.

Imaginäres.

283. *Equations possédant un certain nombre de racines imaginaires.* *Graindorge.* *N. ann. math.* XXV, 520.

284. Ueber die Grenzwerthe, welche die Coefficienten einer algebraischen Gleichung überschreiten müssen, damit die letztere eine bestimmte Anzahl imaginärer Wurzeln enthalte. Schramm. Grun. Archiv XLV, 325.

K.

Kegelschnitte.

285. *Sur les coniques déterminées par cinq conditions de contact avec une courbe donnée.* *Cayley.* *Compt. rend.* LXIII, 9.

286. *Sur les lieux géometriques relatifs à un ou plusieurs systèmes de parallèles tangentes à une série de coniques homofocales.* *Volpicelli.* *Compt. rend.* LXIII, 652, 956. [Vergl. No. 81.]

287. *Propriété d'un triangle inscrit à une conique.* *Massing & Kaentz.* *N. ann. math.* XXV, 366.

288. *Conique circonscrite à un triangle de manière à ce que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point.* *Biny.* *N. ann. math.* XXV, 420.

289. *Sur la conique enveloppe d'un côté d'un angle constant, dont le sommet décrit une circonférence donnée et dont l'autre côté passe par un point fixe.* *Saacké.* *N. ann. math.* XXV, 372.

290. *Conique donnée d'une certaine manière par moyen d'une circonférence, d'un point et d'un droite.* Cayla. *N. ann. math. XXV*, 474.
291. *Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques.* Zeuthen. *N. ann. math. XXV*, 289, 385, 433, 481, 529. [Vergl. No. 74.]
292. *Sur l'intersection de deux courbes du second degré.* Rouquet. *N. ann. math. XXV*, 343.
293. *Propriété de deux coniques ayant un même foyer et leurs axes proportionnels.* Lebasteur. *N. ann. math. XXV*, 370.
294. *Propriété de 3 coniques passant par deux points communs.* Cornu & Morange. *N. ann. math. XXV*, 559.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 185. Brennpunkt 210. Ellipse. Geometrie (höhere) 252. Kreis. Normalen 325. Oberflächen zweiter Ordnung 334. Parabel.

Kettenbrüche.

295. Ueber die Kettenbruchentwickelung der Gauss'schen Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$. Thomé. Crelle LXVI, 322.
296. Ueber Kettenbrüche. Heine. Berl. Akad.-Ber. 1866, 436
297. *Sur les fractions continues.* Laurent. *N. ann. math. XXV*, 540.

Kreis.

298. *Sur le cercle des neuf points.* Strexaloff *N. ann. math. XXV*, 426.
299. *Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle des 9 points du triangle dont les sommets se trouvent dans les centres des cercles exinscrits.* Blouet. *N. ann. math. XXV*, 379.
300. *Par moyen d'une conique et d'un point fixe on obtient un certain système de circonférences toutes tangentes à une même circonférence.* Viaut. *N. ann. math. XXV*, 459. [Vergl. No. 86.]
301. *Construction des centres des circonférences tangentes à trois circonférences données et des centres des sphères tangentes à quatre sphères données.* Stéphan. *N. ann. math. XXV*, 321.
Vergl. Ellipse 231. Geometrie (höhere) 253. Parabel 344.

Kreislinien-Coordinaten.

302. Grundzüge eines Kreislinien-Coordinaten-Systems. v. Gyurkovich. Zeitschr. Math. Phys. XI, 494.
303. *Sur le rayon de courbure des courbes gauches.* Hermite. *N. ann. math. XXV*, 297.

Krümmung.

304. Ueber den Krümmungsradius der Roulette. Hennig. Crelle LXVI, 382. [Vergl. No. 3.]
Vergl. Oberflächen 329.

Kugelfunctionen.

305. Ueber die Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten. Thomé. Crelle LXVI, 337.

L.

Logarithmen.

306. Berechnung der Logarithmen der Summe und der Differenz zweier Zahlen aus den Logarithmen dieser Zahlen. Seeling. Grun. Archiv XLV, 451.
Vergl. Operationscalcul.

M.

Maxima und Minima.

307. *Sur les solides de plus grand volume à surface égale et de plus petite surface à volume égal.* Bobinet. *Compt. rend. LXIII*, 361.

308. Der Rotationskörper des kleinsten Widerstandes. Grunert. Grun. Archiv XLV, 237.
Vergl. Variationsrechnung.

Mechanik.

309. Sur une condition à laquelle doivent satisfaire les intégrales des équations du mouvement. Laurent. Compt. rend. LXIII, 734.

310. Ueber Hamilton's partielle Differentialgleichung mit besonderer Rücksicht auf die Probleme der relativen Bewegung. C. Neumann. Zeitschr. Math. Phys. XI, 264.

311. Sur les mouvements relatifs. Page. N. ann. math. XXV, 402.

312. Ueber einen allgemeinen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems. Lipschitz. Crelle LXVI, 361.

313. On the composition of forces. Reeve. Phil. Mag. XXXI, 345, 404.

314. A new theorem on the equilibrium of four forces acting on a solid body. Cayley. Phil. Mag. XXXI, 78.

315. Bemerkenswerthe Beziehungen des Momentes der Gesammtresultante und der Momente der nach den Axen der x, y, z wirkenden Seitenresultanten beliebiger auf einen freien Punkt wirkender Kräfte. Pranghofer. Wien. Akad.-Ber. LIII, 319.

316. Mouvement d'un point matériel astreint à rester sur un cône de révolution. Biez. N. ann. math. XXV, 451.

317. Sur le mouvement longitudinal d'un système de plusieurs prismes. De Saint-Venant. Compt. rend. LXIII, 1108.

318. On the measurement of small forces by means of the pendulum. Jamin & Briot. Phil. Mag. XXXI, 160. [Vergl. Bd. XI, No. 351.]

319. On hanging considered from a mechanical and physiological point of view. Haughton. Phil. Mag. XXXII, 23.

320. Formules relatives à la rotation des projectiles oblongs. Resal. Compt. rend. LXIII, 459.

321. Ueber die Reibungsarbeit cylindrischer, konischer und kugelförmiger Tragzapfen. Zetzsche. Zeitschr. Math. Phys. XI, 399.

322. Sur la résistance des poutres droites soumises à des charges en mouvement. Phillips. Compt. rend. LXIII, 915.
Vergl. Aerodynamik. Akustik. Attraction. Hydrodynamik. Maxima und Minima 306. Optik. Wärmelehre.

Methode der kleinsten Quadrate.

323. Symmetrische Ausdrücke für die Gewichte der zu bestimmenden Unbekannten. Oppolzer. Astr. Nachr. LXVII, 174.
Vergl. Wahrscheinlichkeitsrechnung 340.

N.

Nautik.

324. Beschreibung einer Tabelle zur Erleichterung der Schifffahrt im grössten Kreise. Friesach. Wien. Akad.-Ber. LIII, 258.

Normalen.

325. Ueber die Normalen von Kegelschnitten, besonders über die Constructionen der von einem beliebigen Punkte ausgehenden Normalen. Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. XI, 311.

326. *Construction de la normale à l'ellipse de Cassini.* Moreau. N. ann. math. XXV, 361. — Marques Braga. ibid. 362.

327. *Sur le déplacement d'un corps solide; nouvelle Méthode pour déterminer les normales aux lignes ou surfaces décrites pendant ce déplacement.* Mannheim. Journ. Mathém. XXXI, 273. [Vergl. No. 97.]

O.

Oberflächen.

328. *Note sur la surface de l'onde.* Emile Mathieu. Journ. Mathém. XXXI, 298.

329. Ueber die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1866, 612, 855.

330. *Rapport sur trois Mémoires de M. de la Gournerie relatifs à de nouvelles surfaces réglées.* *Chasles.* *Compt. rend. LXIII*, 254.
331. Ueber zwei merkwürdige Flächen vierten Grades. Kummer. Berl. Akad.-Ber. 1866, 216.
332. Ueber eine bemerkenswerthe Gattung von Flächen. Pranghofer. Wien. Akad.-Ber. LIII, 505.
    Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 220. Geometrie (descriptive). Normalen 327.

Oberflächen zweiter Ordnung.

333. Theorie der Flächen zweiten Grades. Grunert. Grun. Archiv XLV, 75.
334. *Théorèmes relatifs aux courbes et aux surfaces du second ordre.* *Faure.* *N. ann. math. XXV*, 299.
    Vergl. Brennpunkt 209.

Operationscalcul.

335. *On the properties of the Test Operators which occur in the calculus of Invariants, their derivatives, analogues and laws of combination; with an incidental application to the development in a Maclaurinian series of any power of the logarithm of an augmented variable.* *Sylvester.* *Phil. Mag. XXXII*, 461.

Optik.

336. Bestimmung des Einflusses, welchen die Bewegung der Lichtquelle auf die Brechung des Strahles äussert. Klinkerfues. Astr. Nachr. LXV, 23.
337. Untersuchungen aus der analytischen Optik, insbesondere über den Einfluss der Bewegung der Lichtquelle auf die Brechung. Klinkerfues. Astr. Nachr. LXVI, 337; LXVII, 15.
338. *Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière.* *Briot.* *Journ. Mathém. XXXI*, 305.
339. *Sur la réflexion et la réfraction de la lumière.* *Briot.* *Compt. rend. LXIII*, 1112.
340. *Théorie nouvelle de la réflexion cristalline d'après les idées de Fresnel.* *Cornu.* *Compt. rend. LXIII*, 1058.
341. *Recherches d'optique géométrique.* *Levistal.* *Compt. rend. LXIII*, 458.
342. Ueber einige merkwürdige Punkte in Linsen und Linsensystemen. Listing. Astr. Nachr. LXVIII, 129.
    Vergl. Geometrie (descriptive) 239. Refraction.

P.

Parabel.

343. *Les droites qui unissent les milieux des côtés d'un triangle conjugué à une parabole sont tangentes à cette courbe.* *Lévy.* *N. ann. math. XXV*, 380.
344. *Sur le cercle osculateur à une parabole.* *Dupain.* *N. ann. math. XXV*, 350.
345. *De la parabole ayant pour foyer un point donné et passant par deux points donnés.* *Roque.* *N. ann. math. XXV*, 465.

Perspective.

Vergl. Stereometrie 366.

Planimetrie.

346. Ueber den gemeinsamen Durchschnitt dreier Linien. Weihrauch. Grun. Archiv XLV, 356. [Vergl. Bd. XI, No. 10.]
347. Construction eines Dreiecks aus den zu zwei Seiten gehörenden Höhen und aus der Geraden, welche den Halbirungspunkt einer dieser Seiten mit der Gegenecke verbindet. Dewall. Grun. Archiv XLV, 348. [Vergl. Bd. X, No. 193.]
348. Ueber die Punkte des Dreiecks, deren Verbindungsstrecken vom Schwerpunkt gedrittelt werden. Reuschle. Zeitschr. Math. Phys. XI, 475.
349. Ein Satz vom Dreiecke. Emsmann. Grun. Archiv XLV, 353.
350. Ueber Dreiecksflächen. Gretschel. Grun. Archiv XLV, 194.
351. *Construire un carré dont les côtés prolongés passent par 4 points donnés.* *Marques Braga.* *N. ann. math. XXV*, 381.

352. Ueber den Zusammenhang der Seiten des regelmässigen Fünf- und Zehnecks und des Radius. Weihrauch. Grun. Archiv XLV, 355. [Vergl. Bd. X, No. 240.]

Q.

Quadratische Formen.

353. *Sur les deux formes* $2x^2+3y^2+4z^2+4zt+4t^2$ *et* $x^2+2y^2+6z^2+6t^2$. *Liouville. Journ. Mathém. XXXI*, 280.
Vergl. Homogene Functionen 278.

Quadratur.

354. Note über ein Theorem der ebenen Geometrie. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XI, 434.
Vergl. Planimetrie 350.

R.

Rectification.

355. Entwickelung der allgemeinen Rectificationsformel. Grunert. Grun. Archiv XLV, 279.
Vergl. Approximation 197.

Refraction.

356. *Sur la réfraction solaire. Faye. Compt. rend. LXIII*, 193.
357. Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Constitution der Atmosphäre. Bauernfeind. Astr. Nachr. LXVII, 33. [Vergl. Bd. X, No. 390.]
Vergl. Optik 338, 339.

Reihen.

358. Ueber die Summen $\sum_0^x \sin(p+xq)$ und $\sum_0^x \cos(p+xq)$ und Verwandtes. Reusch. Zeitschr. Math. Phys. XI, 536.
359. *Sur les séries doubles. Laurent. Compt. rend. LXIII*, 296.
Vergl. Convergenzbedingungen Kugelfunctionen. Trigonometrie 373. Zahlentheorie 394.

S.

Schwerpunkt.

Vergl. Planimetrie 348. Reihen 358.

Sphärik.

360. *Lieu des points d'une surface sphérique fixés par la condition que le produit des tangentes de leurs demie distance sphérique à deux points donnés soit constant. Em. C. N. ann. math. XXV*, 364.
361. Der pythagoräische Lehrsatz in der Sphärik. Gretschel. Grun. Archiv XLV, 231. — Knorre. ibid. 234. [Vergl. Bd. XI, No 391.]
362. Zur Transversalenlehre vom sphärischen Dreiecke und sphärischen Vierecke. Rogner. Grun. Archiv XLV, 318.
363. *Formules de trigonométrie sphérique. Barbier. N. ann. math. XXV*, 349.
364. *Règle mnémonique pour obtenir les formules de Delambre. Dostor. N. ann. math. XXV*, 417.
365. *On a memoria technica for Gauss's theorems. Sylvester. Phil. Mag. XXXII*, 436.
Vergl. Kreis 301.

Stereometrie.

366. *Rechercher sur les polyèdres.* C. Jordan. *Crelle LXVI*, 22.
367. *Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non eulériens.* C. Jordan. *Crelle LXVI*, 86. [Vergl. No. 150 und 151.]

T.

Tabellen.

368. *Description of a new Proportion-table equivalent to a Sliding-rule* 13 *feet* 4 *inches long.* Everett. *Phil. Mag. XXXII*, 350.
   Vergl. Astronomie 200. Zahlentheorie 397.

Tetraeder.

369. *Théorème sur le tétraèdre.* Sartiaux. *N. ann. math. XXV*, 317.
370. Analytischer Beweis eines bekannten Satzes von dem Inhalte des Tetraeders. Grunert. Grun. Archiv XLV, 66.
371. Ueber Tetraedervolumina. Gretschel. Grun. Archiv XLV, 198.
372. *Sur le volume d'un tétraèdre et sur un théorème de Steiner.* De Virieu. *N. ann. math. XXV*, 316.
   Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 220.

Trigonometrie.

373 Allgemeine Entwickelung der Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser regelmässiger Sehnenpolygone, deren halbe Seitenzahl ungerade. Schwarzer. Wien. Akad.-Ber. LIII, 434.
374. Auflösung der Gleichung $\cos\alpha^2 . \sin\varphi^4 - 2\sin\alpha . \cos\alpha . \sin\varphi . \cos\varphi + \sin\alpha^2 . \cos\varphi^4 = 0$. Grunert. Grun. Archiv XLV, 417.
   Vergl. Zahlentheorie 398.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

375. Ueber die Transformation zweiter Ordnung bei den ultraelliptischen Integralen erster Ordnung. Richelot. Berl. Akad.-Ber. 1866, 412.
376. Ueber Theta-Functionen vielfacher Argumente. Roch. Crelle LXVI, 177.
377. Beziehungen zwischen Theta-Producten. Gordan. Crelle LXVI, 185.
378. Bestimmung von $d\log\Theta(0, 0, \ldots. 0)$ durch die Classenmoduln. Thomae. Crelle LXVI, 92.
379. Ueber specielle vierfach periodische Functionen. Roch. Zeitschr. Math. Phys. XI, 463.
380. Ueber Functionen einer fünffach zusammenhängenden Fläche. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XI, 427.
   Vergl. Doppeltangente 228.

V.

Variationsrechnung.

381. *On the maximum solid of revolution, the surface of which is of given area and cuts the axis in two given points.* Challis. *Phil. Mag. XXXI*, 218. [Vergl. Bd. VII, No. 432 und Bd. VIII, No. 442.]
382. *On the maximum solid of revolution, the surface of which is given and which cuts the axis at two fixed points.* Todhunter. *Phil. Mag. XXXI*, 425 ; *XXXII* 199. — Challis. *ibid. XXXII*, 45, 278.

W.

Wärmelehre.

383. *Studies on gases.* Schroeder van der Kolk. *Phil. Mag. XXXI*, 124, 181.
384. *On the determination of the energy and entropy of a body.* Clausius. *Phil. Mag. XXXII*, 1. [Vergl. No. 165.]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] die zusammengesetzten Zahlen, ihre Anwendung [illegible] und zur Auflösung der Theorie einer [illegible]

[illegible] über die Kulik'schen Factorentafeln. [illegible] Wien. Akad.-Ber. [illegible]

[illegible] mit dem Halbmesser des umschriebenen [illegible]

[illegible]

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Zwölfter Jahrgang.

Supplement.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1867.

INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

I.

Euclid und sein Jahrhundert.

Mathematisch-historische Skizze

von

MORITZ CANTOR.

Der erste mathematische Schriftsteller Griechenlands, dessen Werke mehr als in kärglich überlieferten, vielleicht sogar kritisch bestreitbaren Bruchstücken uns vorliegen, war Euclid. Seine Blüthe fällt in das Jahr 300 v. Chr. Geb., einen für die Entwickelungsgeschichte der Wissenschaften so merkwürdigen Zeitpunkt, dass es kaum ein historisches Werk geben dürfte, welches nicht dort einen Abschnitt machte, welches nicht die Gründung der ersten alexandrinischen Schule als Markstein einer neuen Zeit betrachtete.

Oder sollen wir lieber sagen, es war der Abschluss einer alten Zeit, der hier erfolgte? Es war dieselbe Erscheinung, welche vielfach in der Weltgeschichte auftritt, dass nach Perioden grosser Entdeckungen und Erweiterungen der Wissenschaften ein Bedürfniss sich kundgiebt, das neu Erworbene zu sammeln und zu vereinigen, zu sichten und zum Gemeingut zu machen, Bibliotheken und Schulen zu gründen. Alexandrien, die Schöpfung des Welteroberers aus dem vierten Jahrhundert, war ganz geeignet, einen solchen Markt- und Stapelplatz der Bildung abzugeben. Seine Lage in Egypten, dem Lande, an dessen uralter Kultur auch der skeptischste Gelehrte nicht mehr zweifelt, aber auch dem Lande, welches durch besondere Gunst des Schicksals nach Alexander's Tode dem geistig hervorragendsten unter seinen Feldherren, Ptolemäus Sohn des Lagus, zufiel, trug nicht wenig dazu bei, dorthin Alle zu locken, welche höhere Bildungszwecke verfolgten, sei es nun als Lehrer oder als Lernende. Man hat oft gesagt, die Ptolemäer, die Freunde und Förderer des Gelehrtenstandes, gründeten die alexandrinische Schule; man hätte mit eben so vielem Rechte sagen können, die Schule zu Alexandrien

[illegible]

[illegible] Nicht einmal das Vaterland des Euclides steht mit Sicherheit fest, wenn wir nicht der Angabe eines arabischen [illegible] Glauben schenken wollen, welcher ihn einen Tyrier nennt. Andere wollen Euclides in Egypten geboren sein lassen; noch Andere aber [illegible] verwechseln ihn mit Euclides von Megara, dem Schüler Platons, welcher fast 100 Jahre früher lebte. Auffallend genug findet sich dieser Irrthum schon bei einem Schriftsteller aus dem Zeitalter des Tiberius, bei Valerius Maximus.[2] Auch das Todesjahr des Euclides ist durchaus unbekannt, und selbst anekdotisch gewordene Erzählungen aus seinem Leben, wie sie sonst über griechische Gelehrte vielfach mitgetheilt werden, finden sich nicht mit Ausnahme einer einzigen. Von ihm nämlich rührt die bekannte Antwort her, dass es in der Mathematik keinen besonderen Weg für Könige gebe, mit welcher er König Ptolemäus Lagi zurechtwies, der über die Schwierigkeiten des von ihm eingeschlagenen Ganges klagte und einfachere Methoden beanspruchte. Zeigte sich Euclides bei dieser Gelegenheit nicht gerade als gewandten Höfling, so wird uns doch sein Charakter[3]) als sanft und bescheiden beschrieben, voller Wohlwollen gegen Jeden, welcher die Mathematik zu fördern im Stande war, und absichtlich jede Begegnung mit fremden Entdeckungen in dem Gebiete seiner Wissenschaft vermeidend.

Die Schriften des Euclides waren trotz dieser selbst auferlegten Beschränkung sehr reichhaltig, da er natürlich nicht so weit ging, irgend welche Sätze zu unterdrücken, weil sie schon von Anderen bewiesen worden waren. Im Gegentheile hat gerade dasjenige euclidische Werk den weitaus grössten Einfluss auf die Mathematik aller Jahrhunderte ausgeübt, in welchem er am meisten von andern Schriftstellern als abhängig sich erweist, die sogenannten Elemente, στοιχεῖα. Hier mag deshalb zunächst eine Inhaltsanzeige gerade dieses Werkes folgen; sodann soll der Zweck untersucht werden, zu welchem es geschrieben wurde; in dritter Linie mag die Form des Werkes uns beschäftigen.

Der Inhalt der in dreizehn Bücher zerfallenden Elemente[4]) des

Euclides ist im Allgemeinen angegeben, wenn wir sagen, man müsse in ihnen vier Hapttheile unterscheiden. Erstens behandeln sie Raumgebilde, welche in einer Ebene gezeichnet sind und das Verhältniss ihrer gegenseitigen Grösse, die theils gleich, theils ungleich ist. Im ersteren Falle genügt der Nachweis der Identität, im letzteren verlangt man noch etwas mehr: man will die Ungleichheit messen. Dazu aber dient die Zahl, das Maass einer jeden Grösse, und folglich wird es Bedürfniss, Untersuchungen über die Zahl anzustellen. Damit ist der zweite Haupttheil des hier besprochenen Werkes geschildert. Die vollständig bestimmte Zahl reicht indessen nicht aus, um alle Grössen zu messen, welche der geometrischen Betrachtung unterworfen werden. Es giebt vielmehr Raumgebilde, seien es nun Längen oder Flächen, welche mit der Grösseneinheit derselben Art kein genau angebbares gemeinsames Maass besitzen, ohne dass sie desshalb aufhören, selbst Grössen zu sein. Man nennt sie nur im Gegensatze zu dem genau Messbaren mit der Einheit incommensurabel. Die Betrachtung solcher Incommensurabilitäten ist somit unerlässlich, sie bildet den dritten Haupttheil des Ganzen. Endlich im vierten Theile verlässt die Betrachtung das bisher eingehaltene Feld der Zeichnungsebene, die Verhältnisse des allgemeinen Raumes werden untersucht, die gegenseitige Lage und Grösse von Flächen und Körpern werden besprochen.

Das ist freilich nur der ganz allgemeine Inhalt des Werkes, und es dürfte sich empfehlen, noch etwas näher auf die Einzelnheiten einzugehen. Im 1. Buche handelt Euclides von den Grundbestandtheilen gradliniger Figuren in der Ebene, von geraden Linien, welche sich entweder schneiden und mit einer dritten Linie ein Dreieck bilden, über dessen Bestimmtheit durch gewisse Stücke zugleich gesprochen wird — Congruenz der Dreiecke — oder welche sich nicht treffen, so weit man sie verlängert — Parallellinien. Um mit Hülfe von Parallellinien eine Figur zu erzielen, bedarf es zweier schneidenden Graden, und so entsteht das Viereck, insbesondere das Parallelogramm, sofern die Schneidenden selbst unter sich parallel sind. Die Eigenschaften der Parallelogramme vereinigt mit denen der Dreiecke führen zum Begriffe von Figuren, welche an und für sich identisch sind, aber nicht in identischer Weise zur gegenseitigen Deckung gebracht werden können — Gleichheit von nichtcongruenten Flächenräumen. Bei solchen Flächen kommt es daranf an, die identischen Theile abzusondern, in anderer Weise zusammenzufügen, und so lehrt der 45. Satz die Verwandlung jeder geradlinigen Figur in ein Parallelogramm von gegebenen Winkeln, bis im 47. und 48. Satze das Buch mit dem interessantesten Falle einer derartigen Umwandlung, mit dem pythagoräischen Lehrsatze und dessen Umkehrung, abschliesst. Das 2. Buch ist gewissermassen ein Zusatz zu dem pythagoräischem Lehr-

satze. In ihm wird die Herstellung eines Quadrates aus Quadraten und Rechtecken in den verschiedensten Combinationen theils als Summe theils als Differenz gelehrt, bis auch wieder eine Zusammenfassung in der Aufgabe erfolgt, ein jeder gegebenen gradlinigen Figur gleiches Quadrat zu beschreiben. Zugleich lässt aber dieses Buch eine andere Auffassung zu, welche mit der doppelten Bedeutung des pythagoräischen Satzes in Verbindung steht. Er ist bekanntlich nicht bloss ein geometrischer Satz: er sagt nicht bloss aus, dass es zwei Flächenräume von besonderer Beschaffenheit gebe, welche einem dritten gleich sind. Er ist ebensosehr und wohl chronologisch früher[5]) zahlentheoretischer Natur: er lässt in dieser Auffassung erkennen, wie es zwei Zahlen bestimmter Art gebe, welche als Summe eine dritte Zahl liefern von gleicher Art wie die beiden Posten. Auch als Zusatz zum pythagoräischen Lehrsatze in diesem Sinne kann man das 2. Buch betrachten: es lehrt alsdann die Rechnung, insbesondere die Multiplication, mit additiv und subtractiv zusammengesetzten Zahlen. Das 3. Buch wendet sich zu der einzigen krummen Linie, welche der Behandlung unterzogen wird, zum Kreise und zu den Sätzen, welche auf Berührung zweier Kreise oder eines Kreises und einer geraden Linie sich beziehen. Alsdann folgen Betrachtungen über die Grösse von Winkeln und mit denselben irgendwie in Verbindung stehenden Kreisabschnitten. Endlich schliesst das Buch mit den einzeln betrachteten Fällen zweier Linien, die sich gegenseitig und ebenso einen Kreis schneiden und aus deren Abschnitten gewisse Rechtecke zusammengesetzt werden, welche Flächengleichheit besitzen. Der Schüler wird nun im 4. Buche weiter mit den Figuren bekannt gemacht, welche entstehen, wenn mehr als zwei gerade Linien mit dem Kreise in Verbindung treten. Er lernt die in und um den Kreis beschriebenen Vielecke, insbesondere die regelmässigen Vielecke kennen.

Damit ist vom euclidischen Standpunkte mit dem Begriffe der Gleichheit von Linien und Flächenräumen, der einzigen bisher angewandten Grundlage, das letzte Ziel erreicht. Wie ich schon oben allgemein andeutete, kommt nun die Ungleichheit in Betracht, insofern sie gemessen werden kann, und zwar ist diese Messung eine zwiefache: eine geometrische und eine arithmetische, wie wir etwa sagen könnten. Beide beruhen auf der Lehre von den Proportionen, welche desshalb auch im 5. Buche an dem Sinnbilde gerader Linien in vollständigster Ausführlichkeit dargelegt wird. Vielleicht ist diese Versinnlichung absichtlich gewählt worden, um eben schon hier die Doppelrolle anzudeuten, welche die Proportionenlehre in der Folge spielen soll. Die im Verhältnisse aufgefassten Grössen sind als Linien gezeichnet, damit man eine Grundlage für die Betrachtungen besitze, und damit es ein

Bekanntes sei, wenn künftig von einem Verhältnisse gegebener Linien die Rede ist. Die Linien sind aber nur nebeneinander gezeichnet, ohne in Verbindung zu stehen, ohne Figuren zu bilden, damit man einsehe, wie es sich hier um Allgemeineres handle, als um die Vergleichung geometrischer Gebilde. Erst das 6. Buch enthält die speciell geometrischen Anwendungen, insbesondere die Lehre von der Aehnlichkeit und von deren Benutzung, um jetzt rückwärts Verhältnisse in geometrischen Figuren zur Anschauung zu bringen, nachdem vorher die Theorie der Aehnlichkeit aus der Verhältnisslehre hervorgegangen. Das 7., 8. und 9. Buch beschäftigen sich mit der Lehre von den Zahlen. Der nächste Zweck dabei ist, wie ich vorhin mich ausdrückte, das arithmetische Messen der Ungleichheit, also die Folgerungen aus der Proportionenlehre, welche an Zahlengrössen hervortreten. Allein damit verbindet Euclid, vielleicht weil nirgend eine passendere Gelegenheit sich bieten wird, eine Zusammenstellung aller ihm bekannten Eigenschaften der Zahlen; Rechnungsoperationen mit denselben hat er, wie wir uns erinnern, schon im 2. Buche ausführen lassen. Das 7. Buch beginnt mit der Unterscheidung von theilerfremden Zahlen und solchen, welche ein gemeinsames Maass besitzen, und mit der Auffindung dieses letzteren. Dann ist von Zahlen die Rede, welche dieselben Theile anderer Zahlen sind, wie wieder andere von vierten, und damit ist also die Zahlenproportion eingeführt. Abgesehen von den vielen neuen Proportionen, welche in der mannigfaltigsten Weise aus der erstgegebenen abgeleitet werden, führt der Satz von der Gleichheit der Produkte der inneren und der äusseren Glieder einer Proportion auf die Theilbarkeit eines solchen Produktes durch einen der Factoren des anderen Produktes und zur Theilbarkeit überhaupt. Der Rückweg zur Untersuchung theilerfremder Zahlen ist damit gewonnen, und den Schluss des Buches bildet die Auffindung des kleinsten gemeinsamen Dividuums gegebener Zahlen. Das 8. Buch setzt die Lehre von den Proportionen fort, indem es zu Gliedern der Proportion solche Zahlen wählt, welche selbst Produkte sind und zwar zum Theil Produkte aus gleichen Factoren. An die früheren geometrischen Lehren erinnern eben noch die Benennungen, welche in diesem Buche zur Anwendung gelangen: die Wörter Flächenzahlen (Produkt zweier Zahlen, weil die Fläche einer Figur durch ein solches Produkt gefunden wird), Körperzahlen (aus ähnlichem, den geometrischen Entwickelungen freilich vorgreifendem Grunde das Produkt dreier Zahlen), Quadratzahlen und Cubikzahlen. Das 9. Buch setzt gleichfalls denselben Gegenstand fort, geht indessen dadurch wieder zu anderweitigen Betrachtungen über, dass es besondere Rücksicht auf etwa in einer Proportion vorkommende Primzahlen nimmt. Bei dieser Gelegenheit wird nämlich ziemlich ausser allem Zusammenhange als 20. Satz bewiesen, dass es

unendlich viele Primzahlen gebe, oder vielmehr, da der Begriff des Unendlichen erst viel später in der Mathematik auftritt, dass die Menge der Primzahlen grösser ist, als jede gegebene Menge derselben. Noch weniger Zusammenhang ist von dem 20. Satze zu dem ihm Folgenden wahrnehmbar. Mancherlei Eigenschaften grader und ungrader Zahlen, von deren Summen und deren Produkten werden erörtert, bis der 35. Satz die Summirung der geometrischen Reihe lehrt und auf diejenige geometrische Reihe angewendet, welche von der Einheit beginnend jedes Glied verdoppelt, endlich im 36. Satze wieder zu den Primzahlen zurückführt und so das Bewusstsein erregt, wie Euclides bei scheinbarem Abspringen von seinem Thema es immer unverrückt im Auge behält. Jener 36. Satz giebt nämlich an, die Summe der Reihe $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ sei mitunter eine Primzahl. Dieses tritt z. B. ein, wenn die Reihe aus 2, aus 3, aus 5 Gliedern besteht. Werde diese die Summe darstellende Primzahl mit dem letzten in Betracht gezogenen Gliede der Reihe vervielfacht, so entstehe eine vollkommene Zahl, d. h. eine Zahl, welche der Summe aller ihrer Theiler gleich ist.

Im 10. Buche ist der dritte Hauptheil des euclidischen Werkes behandelt, die Lehre von den Incommensurabeln. Es beginnt mit einem Satze, dessen Wichtigkeit weit grösser ist, als man beim erstmaligen Hören glauben sollte; denn er bildet die Grundlage einer ganzen Theorie, welche unter dem Namen der Exhaustionsmethode bekannt geworden ist und welche den Alten das ersetzte, was für die moderne Mathematik in ausgedehnterem und vollendeterem Maasse der sogenannte Infinitesimalcalcul zu leisten hat. Der Satz lautet so: „Sind zwei ungleiche Grössen gegeben und nimmt man von der grösseren mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte und so immer fort, so kommt man irgend einmal zu einem Reste, welcher kleiner ist als die gegebene kleinere Grösse.“ In Worten der neueren Mathematik würde man vielleicht lieber sagen, es gebe keine noch so unendlich kleine Grösse, unter deren Werth man nicht durch fortgesetzte Halbirung einer gegebenen Grösse gelangen könne, welche also nicht als Grenze eines immerwährenden Abnehmens des Gegebenen sich darstellen liesse. In dieser Ausspruchsweise tritt alsdann zur Genüge die grosse Bedeutung des Satzes hervor. Euclid freilich giebt zunächst keine Veranlassung, solche Betrachtungen anzustellen. Bei ihm befindet sich der Satz zwar an der Spitze des 10. Buches, aber ohne dass das zunächst Folgende mit ihm in Verbindung stände; sogar ohne die Folgerung, welche man vor allen Dingen erwarten sollte, dass, wenn zwei Grössen incommensurabel sind, man immer ein der ersten Grösse Commensurables bilden könne, welches von der zweiten Grösse sich um beliebig Weniges unterscheide. Statt dessen sind zwar geistvolle, aber doch nach unseren Begriffen maasslos weitläufige Untersuchungen da-

rüber angestellt, unter welchen Voraussetzungen Grössen sich wie gegebene Zahlen verhalten, also commensurabel sind, und unter welchen Voraussetzungen keine solche Zahlen sich finden lassen, die Grössen also incommensurabel sind. Als specielle Fälle des Commensurabeln und des Incommensurabeln erkennt die neuere Mathematik bekanntlich das Rationale und Irrationale an, letzteres eine Grösse, welche zwar nicht unmittelbar durch die Einheit genau gemessen werden kann, aber doch durch eine endliche Zahl von einfachen Operationen zu einem Rationalen führt. Auch die Griechen haben ähnliche Begriffe, wiewohl in der euclidischen Darstellung noch einigermaassen von den soeben erklärten abweichend. Sein Rationales, *ῥητόν*, umfasst nämlich ausser den der Einheit unmittelbar commensurabeln Grössen auch noch die einfachen Quadratwurzeln $\sqrt{a}$, welche demnach aus dem Begriffe des Irrationalen, *ἀλογόν*, auszuschliessen sind. Für die verschiedenen Gattungen des Irrationalen, je nachdem Wurzelgrössen durch Addition, Subtraction u. s. w. mit einander verbunden sind, kennt Euclides mannigfache Namen, bei deren im Ganzen unwichtiger Aufzählung wir uns jetzt nicht aufhalten wollen. Auch für den Inhalt der Sätze des 10. Buches genüge die obige kurze Andeutung, und nur zwei Sätze sollen besonders hervorgehoben werden: der erste Lehrsatz, welcher auf den 29. Satz folgt und welcher mit der arithmetischen Auffassung des pythogoräischen Lehrsatzes eng verknüpft die Aufgabe enthält, zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl sei; ferner der letzte Satz des Buches, welcher beweist, dass Seite und Diagonale des Quadrates nothwendiger Weise incommensurabel zu einander sein müssen, widrigenfalls Grades und Ungrades einander gleich wären. Nesselmann, einer der genauesten Kenner griechischer Mathematik, hat daraus, dass dieser Satz anhangweise beigefügt ist, die Vermuthung geschöpft, er sei vielleicht gar nicht euclidisch, sondern Zugabe eines späteren Bearbeiters.[6]) Ich kann dieser Meinung nicht beistimmen. Ich bin vielmehr der Ansicht, auch hier benutzte Euclid eine mehr oder weniger passende Gelegenheit, um einen Lehrsatz von sonstiger Bedeutung, der aber an keiner andern Stelle eingeschaltet werden kann, beiläufig zu behandeln. Die Bedeutung des Satzes von der Diagonale des Quadrats findet sich aber darin, dass er mit Andeutung des hier von Euclid ausführlich gelieferten Beweisverfahrens bei Aristoteles vorkommt. [7])

Ich habe noch von dem letzten Haupttheile der euclidischen Elemente zu reden, von der in dem 11., 12. und 13. Buche enthaltenen Stereometrie. Im 11. Buche beginnt diese Lehre genau in der Weise, wie sie auch heute noch behandelt zu werden pflegt, mit den Sätzen, welche auf parallele und senkrechte gerade Linien und Ebenen sich beziehen, woran Untersuchungen über Ecken sich schliessen.

Alsdann wendet sich der Verfasser zu einem besonderen Körper, dem Parallelopipedon, und geht nur in dem letzten Satze des Buches zu dem allgemeineren Begriffe des Prismas über. Das 12. Buch enthält die Lehre von dem Maasse des körperlichen Inhaltes der Pyramide, des Prismas, des Kegels, des Cylinders und endlich der Kugel. Eine eigentliche Berechnung dieses Körperinhaltes findet allerdings nicht statt, sicherlich nicht bei den Körpern, zu deren Bildung der Kreis mit beiträgt, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil Euclid die Ausmessung des Kreises selbst noch nicht versteht. Er zeigt in diesem 12. Buche, dass Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser sich verhalten; er zeigt auch, dass wie die Pyramide der dritte Theil des Prismas von gleicher Höhe und Grundfläche ist, ein ganz gleichlautender Satz für Kegel und Cylinder stattfindet, beides Sätze, welche von Eudoxus, dem Schüler Plato's, herrühren;[8]) er schliesst mit dem Satze, dass Kugeln im dreifachen Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen. Allein weiter kann er in die Kenntniss des körperlichen Inhaltes nicht eindringen. Das hauptsächliche Interesse, welches sich an dieses 12. Buch knüpft, besteht darin, dass hier zuerst Anwendungen der Exhaustionsmethode gemacht werden, welche, wie wir sahen, schon im ersten Satze des 10. Buches angebahnt wurden. Der Wichtigkeit des Gegenstandes und der Methode wegen möge hier der erste Satz, welcher durch Exhaustion bewiesen wird, noch näher erörtert werden, der Satz nämlich, dass Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser sich verhalten. Zur Abkürzung erlauben wir uns bei diesem Referate moderne Bezeichnungen zu benutzen. Als bereits bekannt vorauszusetzen ist der Satz, dass ähnliche, in zwei Kreise eingeschriebene Vielecke sich wie die Quadrate der Durchmesser verhalten. Heissen nun die beiden Kreisflächen K_1, K_2 und deren Durchmesser d_1, d_2, so ist entweder in der That $K_1 : K_2 = d_1^2 : d_2^2$, oder diese Proportion findet nicht statt, d. h. einer der beiden Kreise besitzt eine zu grosse Oberfläche, als dass sie in diese Proportion sich einfügte. Diese zu grosse Kreisfläche sei K_2, so wird sicherlich eine kleinere Oberfläche O existiren, für welche $K_1 : O = d_1^2 : d_2^2$, und es ist somit unmöglich, dass ein Flächenraum, welcher kleiner ist als K_1, sich in eben diesem Verhältnisse $(d_1^2 : d_2^2)$ zu einem Flächenraume befinde, der grösser ist als O. Gleichwohl lässt sich die Existenz eines solchen unmöglichen Verhältnisses unter den gemachten Voraussetzungen nachweisen und damit die Unzulässlichkeit der Voraussetzung selbst, als sei nicht $K_1 : K_2 = d_1^2 : d_2^2$. Denn man kann, so klein auch der Unterschied von K_2 und O sein mag, immer irgend ein Vieleck in K_2 beschreiben, welches der Kreisfläche noch näher kommt, also grösser ist als O. Das diesem Vielecke ähnliche Vieleck in K_1 beschrieben ist dagegen kleiner als K_1, und doch verhalten sich diese

beiden Vielecke wie $d_1^2 : d_2^2$. Alles kommt daher darauf an, dass man zeige, wie es ein in K_2 beschriebenes Vieleck gebe, dessen Flächeninhalt O übertreffe, und hierzu dient die Exhaustionsmethode. Ein dem Kreise umschriebenes Quadrat ist nämlich offenbar grösser, als der Kreis und zugleich genau doppelt so gross, als das dem Kreise einbeschriebene Quadrat. Mithin ist Letzteres grösser als die halbe Kreisfläche, oder unterscheidet sich von der Kreisfläche um weniger als deren Hälfte. Wird in jedem der vier diesen Unterschied bildenden Kreisabschnitte der Bogen halbirt und mit dem Halbirungspunkte und den Endpunkten als Spitzen ein Dreieck gebildet, so ist dieses die Hälfte eines Rechteckes, innerhalb welches der Kreisabschnitt eingeschlossen liegt, also grösser als die Hälfte des Abschnittes. Das entstandene Achteck unterscheidet sich somit von dem Kreise um weniger als den vierten Theil desselben. Ebenso wird zu zeigen sein, dass das Sechszehneck einen geringeren Unterschied als $^1/_8$ der Kreisfläche liefere u. s. w. Bei jedesmaliger Verdoppelung der Seitenzahl des Vielecks wird der Flächenunterschied desselben gegen den Kreis mehr als nur halbirt, und schon immerwährende Halbirung erreicht nach dem Satze der Exhaustion jede beliebige Grenze der Kleinheit. Es ist also damit sicher gestellt, das endlich ein Vieleck erscheinen muss, dessen Fläche von der des Kreises sich weniger unterscheidet, als O von demselben Kreise verschieden ist. Das 13. Buch endlich kehrt zu einem Gegenstande zurück, dem das 4. Buch theilweise gewidmet war. Es handelt von den regelmässigen einem Kreise eingeschriebenen Vielecken, insbesondere von den Fünfecken und Dreiecken. Dann aber benutzt es diese Figuren als Seitenflächen von Körpern, welche in eine Kugel eingeschrieben werden, und schliesst mit der wichtigen Bemerkung, dass es keine weiteren regelmässigen Körper geben könne, als die fünf zuletzt erwähnten, nämlich das Tetraeder, das Octaeder und das Icosaeder, die von Dreiecken begrenzt sind, der Würfel, dessen Seitenflächen Quadrate sind, und das Dodecaeder, welches von Fünfecken eingeschlossen ist.

So der Inhalt eines der merkwürdigsten mathematischen Werke, welche überhaupt jemals geschrieben wurden. Ich habe als nächste Aufgabe mir gestellt, über den Zweck des Werkes Einiges zu sagen. Man findet nicht selten die Meinung ausgesprochen, Zweck des ganzen Werkes sei jener letzte Lehrsatz von der Unmöglichkeit anderer regelmässiger Körper als der bekannten fünf; Euclides habe, um diesen Satz festzustellen, die 13 Bücher Elemente geschrieben. Wer den Inhalt, auch nur in unserem Auszuge, sich näher ansieht, wird keinen Augenblick länger bei dieser Meinung verharren. So vielen Scharfsinn, so reiche Kenntnisse, so grosse Mühe wendet man nicht auf, um schliesslich ein doch nur geringfügiges Ergebniss zu erzielen. Nein, der Beweis des letzten

Satzes ist nicht der Zweck des Werkes; nur die künstlerisch vollendete Gliederung machte es möglich, dass das Werk in dem einen Gipfelpunkte abschloss, aber Zweck sind die 13 Bücher der Elemente sich selbst. Das soll keine blosse Redensart sein. Mitunter sagt man freilich von einer Einrichtung, von einem Ereignisse, welche man nach Zwecken erklären will und wofür man keinen einleuchtenden Zielpunkt findet, die Sache sei sich selbst Zweck. Hier ist das nicht so gemeint. Euclides beabsichtigte mit seinen Elementen eine encyclopädische Uebersicht derjenigen Theile der Mathematik, welche in den folgenden Theilen der Wissenschaft zur Geltung kommen,[9]) also wirklich Elemente von Wissenszweigen sind. Und Euclides war nicht der Erste, welcher ein solches Elementarwerk in dem oben erörterten Sinne verfasste. Schon vor ihm traten Elementenschreiber auf, deren Namen uns der Commentator des euclidischen Werkes aufbewahrt hat.[10]) Hippokrates von Chios, Leon, Theudios von Magnesia, Hermotimos von Kolophon werden uns genannt, deren Erster um das Jahr 450, also anderthalb Jahrhunderte vor Euclides lebte. Diese positive Thatsache, welche mich nöthigt, wenigstens beiläufig auch älterer Zeiten zu gedenken als dieser Untersuchung als Ueberschrift dient, steht in vollendetem Einklange mit der Ueberlegung, dass ein Werk wie die euclidischen Elemente unmöglich an dem Anfange einer Entwickelungsphase entstanden sein kann. Die Fabel von der gewaffnet aus der Stirne des Zeus entspringenden Pallas wäre überboten, wenn man, abgesehen von dem vorzüglichen Werthe des euclidischen Elementarwerkes, auch nur den Gedanken hegen könnte, es sei möglich, dass überhaupt ein Sammelwerk, ein „Handbuch" oder „Lehrbuch der Mathematik," wie wir heute sagen, geschrieben würde, wenn nicht die Mathematik selbst als Lehrgegenstand schon lange bestand und im Wesentlichen ähnlicher Weise schon früher behandelt wurde, wie das neue Lehrbuch angiebt, mag dasselbe auch einzelne noch so wichtige Neuerungen sich erlauben.

Damit bin ich aber bei dem dritten Theile meiner Besprechung des euclidischen Werkes angelangt, bei der Form. Die Form dieses Lehrbuches ist dieselbe, welche seitdem zwei Jahrtausende hindurch in den Lehrbüchern der Mathematik festgehalten wurde, welche in den Schulwerken noch heute maassgebend ist und nur allmälig verlassen wird, insbesondere von solchen Schriftstellern, welche schon für weiter vorgeschrittene Leserkreise schreiben und desshalb das Regelmässige der euclidischen Form zu vermeiden suchen, welches ebenso dazu sich eignet dem Gedächtnisse eingeprägt zu werden, als es für den, der rasch lesen will, den Gegenstand fast ungeniessbar macht. Euclides spricht ein Mal wie das andere Mal zuerst einen Satz aus; daran knüpft sich die *Vorschrift, was der* Leser an der Figur vornehmen solle, welcherlei grade

oder krumme Linien, in welcher Richtung und Ausdehnungsgrösse er ziehen solle, und dann kommt der Nachweis des Satzes. Wenigstens verhält es sich so bei denjenigen Sätzen, welche Lehrsätze, Theoreme, heissen, und bei denen es sich um den Nachweis — ἀπόδειξιν — des Ausgesprochenen handelt. Bei den Aufgaben, Problemen, handelte es sich um die Construction — κατασκευήν — des Ausgesprochenen. Da wurde der zuerst gestellten Aufgabe unmittelbar die Auflösung nachgeschickt; dann erst folgte die zum Beweis der Richtigkeit der Auflösung nöthige Vorbereitung, als Ziehen von Hülfslinien u. s. w. und endlich der Beweis selbst. Von einer dritten Art von Sätzen, von den Porismen, soll nachher noch die Rede sein. Diese strenge Form, diese regelmässige Wiederkehr derselben Reihenfolge der Gedanken, dieses ermüdende Einerlei der Wortverbindungen, welches auch das widerspänstigste Gedächtniss zwingt, das Gehörte nicht ganz zu entlassen, besitzt wahrlich kaum eine Aehnlichkeit mit der anmuthigen Sprache griechischer Wissenschaft im Allgemeinen. Nur mathematischen Schriften ist diese Form eigen, aber auch nicht einmal allen Schriften, welche man jetzt zu den mathematischen zählt. Die dem Aristoteles zugeschriebene Mechanik z. B. besitzt nicht die Gliederung in Satz, Vorbereitung, Beweis oder Aufgabe, Auflösung, Vorbereitung, Beweis, wie wir sie bei Euclides beschrieben haben. Auch spätere Schriften über Arithmetik, über Astronomie, über Mechanik, über Musik entbehren zum grossen Theile dieser Gliederung. Nur die Geometrie wird constant in derselben Weise behandelt. Wenn aber noch der negativ nicht unbedeutsame Umstand hinzutritt, dass Proklus Diadochus, der gelehrte Erklärer des ersten Buches der euclidischen Elemente, welcher 412—485 lebte, diese Form nicht als euclidisch bezeichnet,[11]) was er gewiss nicht unterlassen hätte, wenn jener Schriftsteller sie eingeführt hätte, sollten wir da nicht berechtigt sein, anzunehmen, auch die sogenannten Elementenschreiber vor Euclid möchten derselben Form sich bedient haben, und ferner sei es gar keine ursprünglich griechische Form des Vortrages? Was erscheint glaublicher, dass speciell für Geometrie eine Darstellungsweise erfunden worden, welche in anderen, zumal in nichtmathematischen Wissenschaften keinerlei Anwendung fand, oder dass eine fremde Form hier Eingang fand, und zwar desshalb, weil der Inhalt in dieser Form bekannt wurde? Mit anderen Worten ist jetzt die Muthmassung so durchaus ohne Stütze, die Geometrie sei zu den Griechen gelangt, nachdem sie bei anderen Völkern wenn auch noch keinen hohen Grad der Vollkommenheit erreicht hatte, doch in Bezug auf die Lehrform schon sehr ausgebildet war? Ich will hier nicht weiter auf diese Hypothese eingehen, aber eine Andeutung glaubte ich mir gestatten zu dürfen.

Hier, wo von der euclidischen Form die Rede ist, darf auch wohl

hervorgehoben werden, dass die Art der Beweisführung uns als eine doppelte beschrieben wird; man könne den Weg der Analyse und den der Synthese einschlagen. Diese beiden Wörter haben in der Mathematik sich völlig eingebürgert, aber freilich im Laufe der Jahrhunderte sehr wechselnde Bedeutungen angenommen, so dass es auch für den eigentlichen Mathematiker nicht überflüssig sein dürfte, die euclidische Bedeutung festzustellen.[12]) „Analytisch wird ein Satz bewiesen, wenn man das Gesuchte als bekannt annimmt, und durch daraus gezogene Schlüsse auf erwiesene Wahrheiten zurückkommt; synthetisch hingegen, wenn man von erwiesenen Wahrheiten zu dem Gesuchten gelangt.“ So heisst es in der Anmerkung zum 1. Satze des 13. Buches, welche Euclid selbst dem Ausspruche des Satzes unmittelbar nachschickt. Der Sinn dieser Erläuterung ist etwa folgender. Soll die Wahrheit eines Satzes D bewiesen oder widerlegt werden — denn beides kann verlangt werden — so sagt der Analytiker: D findet statt, wenn ich zeigen kann, dass C stattfindet; C findet statt, wenn ich zeigen kann, dass B stattfindet; B findet statt, wenn ich zeigen kann, dass A stattfindet; A findet aber statt, also findet auch D statt; oder A findet nicht statt und die vorhin ausgesprochenen Coexistenzen sind reciprok wahr, also findet D nicht statt. Der Synthetiker dagegen beginnt mit der Behauptung des Stattfindens von A, welches ihm auf irgend eine Weise bekannt ist. Daran knüpft er die Folgerung, es werde B stattfinden, folglich sei C wahr, und folglich sei D wahr — oder möglicher Weise ein Satz, der das Gegentheil von D einschliesst, und den man desshalb Nicht$D$ zu nennen übereingekommen ist.

Darnach stellt sich die Sache so, dass innerhalb der beiden Beweisverfahren, der analytischen und der synthetischen, je zwei verschiedene Beweisformen möglich sind: die directe und die indirecte. Die erstere zeigt, dass A, auf welches die Existenz von D zurückgeführt ist, wirklich existirt, oder dass aus A schliesslich D folgt; die zweite Beweisform dagegen zeigt, dass A nicht existirt und zur Existenz von D doch nothwendig wäre, oder dass aus A die Wahrheit von Nicht$D$ sich ableiten lässt, d. h. die Falschheit von D. Die indirecte oder, wie man auch sagt, apagogische Beweisform ist sicherlich nicht minder streng als die directe, und doch ist sie bei den Mathematikern ziemlich verpönt, man vermeidet sie, wo man es irgend kann, wenn eine nicht gar zu schleppende directe Beweisführung möglich ist. Der Grund liegt darin, dass bei aller zwingenden Strenge für den Verstand der indirecte Beweis der Phantasie keine vollständige Befriedigung zu gewähren pflegt. Ungezügelt umherschweifend sucht sie noch immer dritte Fälle ausfindig zu machen, welche neben der Existenz von Nicht$D$ eine Coexistenz von D zulassen, und nur schwer giebt sie sich gefangen, dass wirklich die Eintheilungstheile des Eintheilungsganzen vollständig er-

schöpft wurden, dass wirklich zwei sich ausschliessende Thatsachen vorliegen, die nicht gleichzeitig gesetzt werden können.[13])

Wir haben gesehen, dass bei allen Beweisen es am Ende darauf hinauskommt, einen Satz A als Grundlage zu benutzen, dessen Wahrheit schon bekannt ist. Die Wahrheit dieses Satzes selbst ist in vielen Fällen das Ergebniss früherer Lehrsätze und gehörigen Ortes streng erwiesen. Allein immer ist dieses nicht der Fall und kann nicht der Fall sein, da eine unendliche Kette von Rückschlüssen nicht denkbar ist. Irgend einmal muss man stehen bleiben und eine Grundwahrheit als von selbst einleuchtend zum Ausgangspunkte der Beweisführung annehmen. Diese letzten Wahrheiten bilden die Axiome, die Grundsätze und Annahmen der euclidischen Mathematik, zwischen welchen man unterscheiden kann. Ein Grundsatz ist ein solcher Satz, welcher von unmittelbarer Gewissheit nicht bewiesen zu werden braucht, augenscheinlich (evident) ist; eine Annahme ist ein Satz, welcher nicht bewiesen werden kann, und somit ist ein Satz der letzteren Art allerdings mancher Anfechtung unterworfen. Ich nenne nur das berüchtigte 11. Axioma des Euclid: „Zwei gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so dass die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.“ Dieser Satz bedarf eigentlich des Beweises, und doch ist es nie gelungen, ihn so festzustellen, dass man nicht auf eine andere Annahme von kaum grösserer Sicherheit sich berufen müsste. Das ist der Ursprung der unzähligen Schriften über die Parallelentheorie, welche insbesondere in den beiden letzten Jahrhunderten die überflüssige Mühe vieler Mathematiker in Anspruch nahm. Euclid hat die Axiome, welche er gebraucht, am Anfange des ersten Buches der Elemente zusammengestellt. Aehnlich wie mit den Rückschlüssen verhält es sich mit den Zerlegungen der Begriffe. Auch diese können nicht in Ewigkeit fortgesetzt werden. Gewisse einfache Begriffe muss die Geometrie wie jede andere Verstandeswissenschaft anerkennen, welche nicht weiter zerlegt werden können, auf welche dagegen andere Begriffe durch Definitionen zurückgeführt werden. Euclid bringt seine Definitionen jeweil zu Anfang der Bücher, in welchen die definirten Dinge zuerst auftreten. Darin liegt ein gewisser Mangel an Folgerichtigkeit. Denn entweder musste eine systematische Anordnung absolut aller Definitionen gleich von Anfang an gewählt werden, sie mussten als eine Art von Wort- und Sachregister wohl noch vor den Axiomen ihren Platz finden, oder aber die logische Anordnung musste getroffen werden, dass jedes Wort da erläutert werde, wo es zuerst vorkommt. Die moderne Mathematik hat sich an diese letztere Anordnung gewöhnt, und schon der feinste Kritiker des 16. Jahrhunderts wusste sie zu empfehlen, indem er das treffende Bild gebrauchte: die Natur lasse nicht die Wurzeln aller Bäume

des Waldes vor dem Walde entstehen, der Baumeister beginne nicht die Gründung einer Stadt mit der Fundamentlegung aller künftigen Gebäude.[14])

Diese Bemerkungen wollte ich zunächst an den Bericht über die euclidischen Elemente anknüpfen, mit dem Vorbehalte Anderes noch in einem späteren Augenblicke zu besprechen. Als ich oben anfing, von der Form der Sätze zu reden, wurde eine Unterscheidung angebahnt, welche gegenwärtig als erwünschter Uebergang zum Folgenden dienen soll. Ich sagte nämlich, ausser den Lehrsätzen und den Aufgaben, welche ich beide im Sinne der Griechen charakterisirte, gebe es noch Porismen, eine eigene Gattung von Sätzen. Daran knüpfe ich jetzt wieder an, um von einer Schrift zu reden, welche Euclides unter dem Namen „drei Bücher Porismen" verfasste, und deren Inhalt lange Zeit das Räthsel der Mathematiker war, bis Herr Chasles eine Wiederherstellung des Werkes auf Grundlage der kurzen vorhandenen Notizen lieferte,[15]) welche alle Sachverständigen auf's Höchste befriedigte, und welche man desshalb auch als getreu anzusehen berechtigt ist, so lange nicht neue Entdeckungen etwa in Gestalt arabischer Uebersetzungen die heutige Annahme widerlegen. Schon aus dem Gesagten geht hervor, dass die eigentlichen Porismen des Euclid nicht mehr selbst existiren. Wir finden als Ueberrest derselben nur einen ziemlich kurzen, zudem noch lückenhaften Auszug bei Pappus, einem alexandrinischen Mathematiker, welcher gegen Ende des 4. Jahrhunderts nach Chr. Geb. blühte, und dessen noch häufig Erwähnung geschehen wird. In seinen Mathematischen Sammlungen[3]) gab nämlich Pappus eigene Untersuchungen über die mannigfachsten Theile der Mathematik, reichlich durchflochten mit Auszügen aus fremden Schriften, welche gleichzeitig erläutert werden. Unter diesen commentirten Schriften befinden sich denn auch die euclidischen Porismen, von welchen im 7. Buche der Sammlungen die Rede ist, und zu deren Verständniss Pappus eine Anzahl von Hülfssätzen oder Lemmen mittheilt. Freilich wäre der Gebrauch, welchen man von diesen Hülfssätzen allein machen könnte, um aus ihnen den Inhalt des Werkes, zu welchem sie erfunden sind, zu erschliessen, ein nur sehr geringfügiger. Wir besitzen nämlich auch noch Lemmen des Pappus zu Werken, deren Urschrift nicht verloren gegangen ist, und an diesen zeigt sich, dass der geometrische Scharfsinn des Verfassers ihn nicht selten weit abseits führte, und dass er sich wohl grade dadurch verleiten liess, etwas verschwenderisch mit der Benennung Lemma umzugehen. Es kommen Sätze bei Pappus vor, welche so gut wie in gar keiner Beziehung zu den Schriften stehen, als deren Hülfssätze sie bezeichnet werden, und a priori haben wir keine Gewähr dafür, ob es sich mit den Hülfssätzen zu den euclidischen Porismen nicht ebenso verhalten möchte. Seit der Chasles'schen Restitution ist man, wie es scheint, befugt, hier einen engeren Zusammenhang zu vermuthen.

Die 38 Lemmen des Pappus, die Inhaltsangabe der 3 Bücher Porismen, welche eben bei demselben sich findet, die Erklärungen des Wortes Porisma sowohl bei Pappus als bei Proklus Diadochus, das Alles stimmt so vollständig mit den Ergebnissen des berühmten Mitgliedes der Pariser Akademie überein, dass es schwer fällt, an einen Zufall dabei denken zu sollen. Mit Rücksicht auf diese Ergebnisse soll desshalb zunächst das Wort Porisma erläutert, dann der Inhalt der euclidischen Schrift angedeutet werden,[16]) welcher uns freilich zu ziemlich weitschweifigen Nebenuntersuchungen Anlass geben wird.

Der etymologische Rückgang von πορίζω auf πείρω, auf Pore, auf parare, auf forschen und auf das Sanskritwort pri ist nur von geringem Vortheile, da das Vorwärtsbringen, welches in allen diesen Wörtern sich kundgiebt, kaum einen Anhalt für den wissenschaftlichen Sinn eines solchen Kunstwortes zu liefern im Stande ist, höchstens die Bedeutung Zusatz, Corollarium, in welcher das Wort Porisma auch vorkommt (und zwar besonders in geometrischen Schriften) näher erläutert. Dagegen existiren für den uns jetzt beschäftigenden Sinn von Porisma mehrere Definitionen bei griechischen Mathematikern, welche uns eher Aufschluss versprechen. Zwei Definitionen finden sich bei Pappus in der Einleitung zum 7. Buche seiner mathematischen Sammlungen. Dort heisst es zuerst, „ein Porisma sei ein Ausspruch, bei welchem es sich um die Auffindung (πορισμόν) des Ausgesprochenen handle.“ Dann wird zu dieser im Ganzen nichtssagenden Erklärung hinzugefügt: „Diese Definition des Porismas wurde von den Neueren verändert, welche nicht Alles finden können, sondern auf die Elemente gestützt nur zeigen, dass das, was gesucht wird, existirt, nicht aber dieses selbst finden. So schrieben sie, obschon durch die Definition selbst und das Erlernte widerlegt, mit Bezug auf einen Nebenumstand: ein Porisma sei das, was zur Hypothese eines Ortstheoremes fehle.“ Eine weitere Definition findet sich bei Proklus, dem schon mehrfach erwähnten Commentator des Euclides, etwa 100 Jahre nach Pappus. Auch diese besagt zweierlei, wenn auch nicht in demselben Sinne wie die Definitionen des Pappus. „Einmal nennt man es ein Porisma, wenn ein Satz aus dem Beweise eines andern Satzes mit erhalten wird als Fund oder grade vorhandener Gewinn bei dem Gesuchten, zweitens aber auch, wenn Etwas zwar gesucht wird, aber um von der Erfindung Gebrauch zu machen und nicht von der Entstehung oder der einfachen Anschauung.... Man hat es nicht mit der Entstehung des Gesuchten zu thun, sondern mit dessen Erfindung, und auch eine blosse Anschauung genügt nicht. Man muss das Gesuchte in das Gesichtsfeld bringen und vor den Augen ausführen. Von dieser Art sind auch die Porismen, welche Euclid schrieb, als er seine Bücher der Porismen verfasste.“

Diese Definitionen lassen nun deutlich erkennen, dass in der That das Wort Porisma allmälig einen andern Sinn annahm, als es ursprüng-

lich besass, dass die modernen Schriftsteller (wenn wir die Sprache des 4. Jahrhunderts reden wollen) dabei an einen Nebenumstand sich hielten, welcher von den Alten nicht berücksichtigt wurde, dass aber jedenfalls und zu allen Zeiten das Merkmal als untrüglich hervortrat, dass ein Porisma gewissermassen eine Verbindung von Theorem und Problem war, ein Theorem, welches ein Problem anregte und einschloss. Ein sehr allgemeines Beispiel davon bildet in einem der Mathematik durchweg fremden Gebiete die ärztliche Diagnose. Sie ist ein wahres Porisma. Sie erhärtet als Theorem den gegenwärtigen Zustand des Kranken, wobei sie ebensowohl die bei allen Individuen gemeinsamen Erscheinungen als die von einem Menschen zum anderen veränderlichen Naturkundgebungen berücksichtigt. Sie schliesst aber auch ein Problem in sich: die weitere Entwickelung des Krankheitsprocesses vorauszusehen und wo möglich zu leiten. Sie zeigt sich als unvollständig, so lange nicht eben dieses Problem seiner Lösung entgegengeführt wird. Uebersetzen wir nun eben diese Gedankenfolge in die Sprache der Mathematik, so können wir sagen: Ein Porisma ist jeder unvollständige Satz, welcher Zusammenhänge zwischen nach bestimmten Gesetzen veränderlichen Dingen so ausspricht, dass eine nähere Erörterung und Auffindung sich noch daran knüpfen lässt. Ein schon von Proklus angegebenes Beispiel liefert etwa der Satz, dass wenn ein Kreis gegeben ist, der Mittelpunkt desselben immer gefunden werden kann; denn an ihn knüpft sich eben die Aufgabe, die Construction zu ermitteln, durch welche man in der That den Mittelpunkt des Kreises erhält. Oder um ein zweites Beispiel aus den den Griechen unbekannten algebraischen Capiteln der Mathematik anzugeben, so ist es ein Porisma, wenn man sagt, ein Gleichungspolynom von beliebig hohem Grade könne immer in einfachste reelle Factoren zerlegt werden; denn an diesen Satz knüpft sich unmittelbar die weitere Frage, von welchem Grade jene einfachsten Factoren sein werden, sowie auch die mit den heutigen Mitteln der Wissenschaft allerdings noch nicht lösbare Aufgabe, jene einfachsten Factoren in jedem einzelnen Falle selbst aufzufinden.

Wenn durch diese Auseinandersetzungen der Begriff des Porisma im älteren Sinne des Wortes zu einiger Klarheit gelangt sein dürfte, so können wir jetzt auch die spätere Bedeutung des Wortes ins Auge fassen. Nachdem man nämlich bemerkt hatte, dass die Veränderlichkeit mitunter in der Ortsveränderung von Punkten bestehe, so klammerte man sich an diesen Nebenumstand fest und setzte als Regel, dass das Veränderliche ausschliesslich von der Art sein solle, dass man es mit einem mangelhaften Ortstheoreme zu thun habe. Durch diesen Ausspruch sind wir allerdings nicht viel weiter, da es nun erforderlich sein wird, das griechische Ortstheorem zu

erläutern und dazu wieder einigermassen jenseits Euclid zurückzugreifen.

Man nennt in der Geometrie einen Ort die Aufeinanderfolge von Punkten, deren jeder eine vorgelegte Aufgabe löst oder deren jeder sich einer gewissen Eigenschaft erfreut, welche keinem anderen Punkte ausserhalb dieses Ortes zukommt. Die Alten theilen die geometrischen Oerter in verschiedene Klassen. Sie nennen ebene Oerter die grade Linie und die Kreislinie, weil sie in der Ebene erzeugt werden, körperliche Oerter die Kegelschnitte, weil man sich deren Entstehung auf einem Körper dachte, endlich lineäre Oerter alle Curven höherer Ordnung wie die Conchoide, Cissoide, Spirale und Quadratrix. Ebenso nannte man Ortstheorem ein solches, in welchem es sich um den Beweis handelt, dass eine Aufeinanderfolge von Punkten einer geraden oder krummen Linie den Bedingungen eines aufgestellten Satzes genüge; und ein Ortsproblem eine Aufgabe, in welcher gefordert wird, dass aus einer Aufeinanderfolge von Punkten jeder eine vorgegebene Bedingung erfüllt.[17])

Man sieht leicht, dass hiermit ein Gebiet betreten war, welches von der Geometrie der euclidischen und voreuclidischen Elemente weit verschieden war. Bei den Oertern, ihren Theoremen und Problemen war regelmässig ein Veränderliches vorhanden, nach dessen Aenderung bald der eine, bald der andere Punkt des Ortes der Betrachtung unterfiel. Bei den Sätzen der Elemente war von einer solchen Veränderlichkeit keine Rede. Damit ist auch einleuchtend, um es beiläufig anzudeuten, dass die Darstellung der Elemente bis auf den heutigen Tag nur geringe methodische Umformung erlitten hat, während die Oerter eine wesentlich verschiedene Behandlung erlitten, seit im 17. Jahrhunderte die Veränderlichkeit mathematischer Grössen den besonderen Gegenstand umfassender Untersuchungen zu bilden anfing. Darin ist es wohl auch begründet, dass man erst in allerneuester Zeit sich erfolgreich mit den Porismen des Euclid beschäftigen konnte, nachdem eine Schule moderner Mathematiker die Methoden des 17. Jahrhunderts wieder bei Seite setzend gerade die ältesten Methoden zu weiterer Ausbildung förderte, und H. Chasles, der Wiederhersteller der Porismen, ist gleichzeitig einer der Mitbegründer dieser neueren alten Geometrie, der höheren Geometrie, wie man sie meistens zu nennen pflegt.

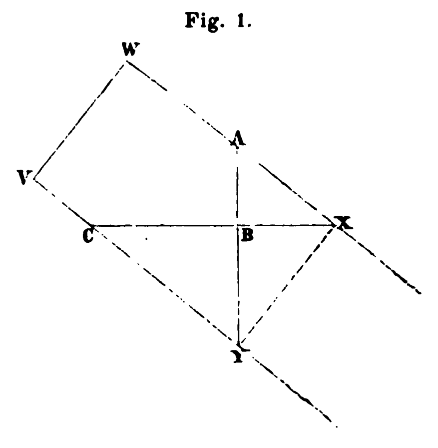
Die Erfindung der soeben näher definirten Oerter knüpft sich im Alterthume an zwei Aufgaben, von denen hier geredet werden muss, an die Aufgaben von der Verdoppelung des Würfels und von der Dreitheilung des Winkels.

Die erste, auch als delische Aufgabe bezeichnet, scheint die berühmtere gewesen zu sein.[18]) Wenigstens hielt man es für der Mühe werth, ihr einen sagenhaften Ursprung beizulegen. Eratosthenes, ein

Schriftsteller, welcher nicht lange nach Euclid lebte, so dass er in dieser Abhandlung uns noch beschäftigen wird, erzählt, König Minos von Kreta habe seinem Sohne Glaukos einen Grabstein in Gestalt eines Würfels errichten lassen, und als er die Baumeister nach der Grösse des Denkmals befragend erfuhr, es sei nach allen Ausdehnungen des Raumes 100 Fuss hoch, lang und breit, so habe er dieses Maass für ein Königsdenkmal zu klein gefunden und eine Verdoppelung des Denksteins verlangt, welcher dabei seine Würfelgestalt behalten solle. Das war nun allerdings schwierig. Denn wenn man die Aufgabe in die Sprache moderner Buchstabenrechnung umsetzt und die Seite des ursprünglichen Würfels a nennt, so bestand sie darin, einen Würfel von dem Rauminhalte $2\,a^3$ zu bilden, dessen Seite also $a\sqrt[3]{2}$ sein musste. Die Ausziehung der Cubikwurzel war aber damals auf dem Wege der Rechnung nicht zu erzielen [19]) und auch geometrisch konnte sie mit Hülfe des Kreises und der geraden Linie, also derjenigen ebenen Raumgebilde, mit deren Betrachtung die Elemente sich beschäftigten, nicht vollbracht werden. Der Erste, welcher wenigstens einen Schritt auf dem Wege der Auflösung zu machen wusste, war Hippokrates von Chios, den wir auch als den ersten Elementenschreiber um das Jahr 450 kennen gelernt haben. Er zeigte nämlich, dass die Aufgabe mit gleichem Rechte auch so ausgesprochen werden könne, dass man zwischen zwei gegebenen Grössen zwei mittlere geometrische Proportionalen suche. In der That setzt man $a : x = x : y = y : 2a$ und bildet daraus zwei Gleichungen, so folgt durch Elimination von y zwischen denselben $x^3 = 2\,a^3$, d. h. x ist die Seite des gesuchten Würfels. Man muss aber nicht vergessen, dass diese hier in wenige Zeichen gekleidete Betrachtung vor Erfindung allgemeiner Symbole eine sehr verwickelte war, und dass also Hippokrates, wenn gleich er, wie es scheint, nur die Umwandlung der Aufgabe als Ergebniss seiner Bemühungen erlangte, doch eben dadurch sich ein unstreitiges und nicht gering zu achtendes Verdienst um die Einzelaufgabe sowohl als um die Entwickelung der Geometrie erwarb. Auch nachdem Hippokrates diesen zum Ziele führenden Weg gezeigt hatte, blieb das Ziel selbst noch verhältnissmässig längere Zeit unerreicht, und die erneuten Versuche Plato's und seiner Schule, welche etwa ein halbes Jahrhundert später mit Erfolg gekrönt wurden, ist durch die Sage mit einer zweiten äusseren Aufmunterung, jene Aufgabe zu lösen, in Verbindung gesetzt. Auf Delos nämlich, so heisst es, sei damals eine schwere Seuche ausgebrochen, und das Orakel Apollos befragt, wie dem Elende abgeholfen werden könne, habe geantwortet: dadurch werde der Seuche ein Ziel gesetzt, wenn man den würfelförmigen Altar des Gottes verdoppele. Nun, wird weiter erzählt, habe man zu Plato gesandt, damit er den Orakelspruch erläutere und die Mittel lehre, ihm Genüge zu leisten, und er habe ihn

in Hinblick auf einen Ausspruch des Aegypters Chonuphis, dessen er sich erinnerte,[20]) dahin ausgelegt: der Gott wolle, die Griechen möchten, statt in blutigen Streitigkeiten sich aufzureiben, sich lieber den Wissenschaften, insbesondere der Mathematik zuwenden, dann würde auch die Seuche verschwinden. Es ist gleichgültig, wie viel oder wie wenig an dieser Erzählung wahr ist. Jedenfalls erhielt die Aufgabe nach ihr den Namen der delischen und nicht weniger sicher ist es, dass die sogenannte Akademie, das ist eben die Schule Plato's, es war, welche die Lösung der Aufgabe fand. Wem das Verdienst der ersten Auflösung gebührt, ob Plato selbst, ob Archytas von Tarent, ob Eudoxus von Knydos, ob Menächmus, darüber wissen wir Nichts bestimmteres, da diejenigen Quellenschriften, welche das meiste Vertrauen verdienen würden, nicht anders als in Fragmenten erhalten sind, und grade hier die Lückenhaftigkeit zu bedauern ist. Ich meine die historischen Werke des Theophrastus von Lesbos und des Eudemus von Rhodus, der berühmten Schüler des Aristoteles, von denen jeder eine Geschichte der Geometrie, eine Geschichte der Arithmetik und eine Geschichte der Astronomie verfasste, Schriften von ausserordentlicher Klarheit und Treue und das vollste Vertrauen in ihre Zuverlässigkeit erweckend, so weit wir wenigstens nach den heute bekannten Bruchstücken des Eudemus zu urtheilen im Stande sind. Genug, für die eben besprochene Partie der Geschichte finden wir bei Eudemus nur geringen Anhalt, und es erscheint sogar Manchen zweifelhaft — wir können, wie noch erörtert werden wird, die Zweifel nicht theilen — ob diejenigen Auflösungen, welche von späteren Schriftstellern den schon genannten alten Mathematikern zugeschrieben werden, als authentisch zu betrachten sind.

Fig. 1.



Eutokius von Askalon, ein Commentator verschiedener Werke am Anfange des 6. Jahrhunderts, giebt als Methode des Plato an, er habe sich eines Instrumentes bedient, welches wir am deutlichsten als Rechteck $VWXY$ mit drei festen und einer in paralleler Lage verschiebbaren Seite bezeichnen können. Alsdann solle man mit dessen Hülfe es dahin bringen, dass, während eine der drei festen Rechtecksseiten, z. B. WX, durch den gegebenen Punkt A gehe, die verschiebbare XY eine derartige Lage annehme, dass sie mit dem einen Endpunkte Y auf der Verlängerung der nach

Lage und Länge gegebenen AB aufstehe, mit dem anderen Endpunkte X auf der zu AB in B errichteten Senkrechten. Nennt man nun $AB = a$, $BX = k$, so muss, weil BX aus der Spitze eines rechten Winkels $\perp AY$ gezogen ist, $BY = \frac{k^2}{a}$ sein. Ferner ist BY aus der Spitze eines rechten Winkels $\perp CX$ gezogen, folglich ist $BC = \frac{k^3}{a^2}$ und BC und AB stehen in dem cubischen Verhältnisse $k^3 : a^3$. Weiss man es endlich gleichfalls mechanisch so einzurichten, dass $BC = 2AB$ wird, so ist $k^3 = 2a^3$ und $BX = k$ ist die gesuchte Seite des doppelten Würfels. Die Methode des Archytas überliefert uns derselbe Eutokius, aber nach Eudemus, eine sichere Bürgschaft für die richtige Angabe. Archytas verfuhr weit wissenschaftlicher als Plato, indem er nicht mit Handgriffen herumexperimentirte, sondern von dem sich mathematisch ergebenden Durchschnittspunkte eines Kegels mit einer Curve von doppelter Krümmung Gebrauch machte. In dieser Betrachtung lag ein ganz ausserordentlicher Fortschritt, der uns um so klarer wird, wenn wir bedenken, dass vorher auch von den krummen Linien, welche in einer Ebene gezeichnet werden können, nur der Kreis bei den Elementenschreibern angewandt wurde, jetzt aber eine Linie weit verwickelterer Art zur Untersuchung kam, welche nicht der Ebene angehörte, zu deren graphischer Versinnlichung auf dem Zeichentäfelchen eine Art von perspectivischer Darstellung erforderlich war, wiewohl hiermit nicht gesagt werden soll, dass Archytas deren fähig war und nicht vielmehr räumlicher Modelle sich bediente, deren Anfertigung aber gleichfalls Schwierigkeit machen musste. Weiter berichtet Eutokius von Menächmus, er habe zwei Methoden der Würfelverdoppelung erfunden. Auch dieser bediente sich dabei krummer Linien und zwar solcher, welche durch den Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen, also der noch heute sogenannten Kegelschnitte. Unklar ist nur, ob desshalb Menächmus für den Erfinder der Kegelschnitte zu halten ist, oder ob diese Ehre dem ungefähr gleichzeitigen Aristäus zukommt, welcher ein eigenes Werk in fünf Büchern über die Kegelschnitte schrieb. Eudoxus endlich, der früher erwähnte Erfinder des Satzes über das gegenseitige Verhältniss von Pyramide und Prisma, der als ein Bearbeiter der Aufgabe der Würfel-Verdoppelung genannt wird, soll zu diesem Zwecke gewisse krumme Linien eigens erfunden haben. Wir wissen indessen Nichts über deren Entstehungsweise, mithin selbstverständlich Nichts über seine Methoden.

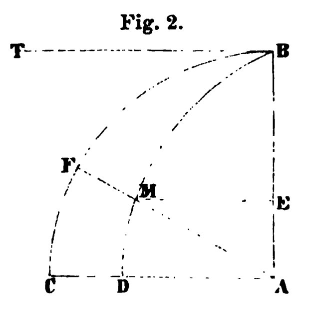
Was vorhin über die angezweifelte Authenticität dieser Lösungen bemerkt wurde, bezieht sich insbesondere auf Plato, dessen uns aufbewahrte mechanische Lösung von einzelnen Schriftstellern [21]) als apokryph betrachtet wird, theils weil sie von früheren Berichterstattern als *Eutokius, z. B.* von Eratosthenes, nicht erwähnt wird, theils weil nach

Plutarch's Aussage Plato gegen Eudoxus, gegen Archytas und Menächmus sich tadelnd aussprach und seinen Tadel darauf gründete, dass sie die Würfelverdoppelung in instrumentaler und mechanischer Weise erzielten.[22]) Ein solcher Vorwurf, meint man, sei zu widersinnig, wenn derjenige, welcher ihn sich erlaubt, selbst in den gerügten Fehler verfiel. Man hat bei dieser kritischen Bemerkung übersehen, dass die als wahrheitsgetreu angenommene Erzählung Plutarch's die drei streng geometrischen Methoden des Archytas, des Menächmus und des Eudoxus, welche uns überliefert sind, ganz ebenso in ihrer Echtheit verdächtigen würde, wie die experimentelle Methode des Plato. Jenen Methoden, wie wir sie durch Eutokius kennen, konnte der Vorwurf Plato's unter keiner Bedingung gemacht werden, und doch ist zum Mindesten die Methode des Archytas auf's Beste verbürgt. Wir sehen uns hiermit in die Nothwendigkeit versetzt, eine der Quellen zu verwerfen und glauben einen Anhaltspunkt dafür gewonnen zu haben, dass mit grösserer Wahrscheinlichkeit die Genauigkeit des Plutarch als die des Eutokius in Abrede zu stellen sein wird, ganz abgesehen von dem allgemeinen Gesichtspunkte, dass in mathematischen Dingen ein Mathematiker am Ende glaubwürdiger erscheint, als ein Schriftsteller, der über alle anderen Materien schrieb, nur nicht über Mathematik.

Die andere Aufgabe, welche von weit geringerer Tragweite und, wie es scheint, weniger häufig behandelt immerhin die Entwickelung der Geometrie förderte und in diesem Sinne oben erwähnt werden musste, ist die der Dreitheilung oder, wie der Kunstausdruck auch wohl heisst, der Trisection des Winkels. Diese Aufgabe führt gleichfalls zu einer Gleichung dritten Grades. Denn wenn man von der Spitze des zu theilenden Winkels aus mit der Längeneinheit als Halbmesser einen Kreis beschreibt und von dem durch den Durchschnitt mit dem Kreise bezeichneten Endpunkte des einen Winkelschenkels eine Senkrechte auf den anderen Schenkel fällt, welche auf diesem von der Spitze an gerechnet ein Stück a abschneidet; wenn man ferner ein Drittel des Winkels bildet durch jenen Schenkel, von welchem a abgeschnitten wurde, und einen neuen Halbmesser; wenn man von dem Endpunkte dieses Halbmessers wieder eine Senkrechte herabfällt, welche auf dem anderen Schenkel das Stück x abschneidet, so besteht bekanntlich zwischen a und x der Zusammenhang $a = 4x^3 - 3x$. Selbstverständlich war auch diese Formel den Griechen unbekannt, allein sie hatten wenigstens negativ das Bewusstsein, dass wieder eine Aufgabe vorliege, welche die Kräfte der Elementargeometrie übersteige, und besonders Dinostratus, der Bruder des bei der delischen Aufgabe genannten Menächmus, benutzte zur Auflösung jener Aufgabe eine Curve, welche desshalb in der Geschichte der Mathematik den Namen der Quadratrix des Dinostratus führt, wenn auch die eigentliche Erfindung derselben

vielleicht dem Hippias, einem Zeitgenossen des Sokrates zu verdanken ist.[23]) Die Quadratrix ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes M eines Halbmessers, der nach einander alle Lagen AF einnimmt, die er in einem Kreisquadranten ABC besitzen kann, und einer der Anfangslage AC des Halbmessers parallelen graden Linie EF, welche in derselben Bewegungszeit fortrückt, bis sie zur Berührungslinie BT an den Kreis geworden ist. Ist daher beispielsweise $AE = {}^1/_3\ AB$, so muss der durch M gezogene Halbmesser AF (unter Voraussetzung des Gegebenseins der Curve BMD) den rechten Winkel drittheilen, und in ähnlicher Weise kann auch der dritte Theil jedes spitzen Winkels durch Construction gefunden werden.

Fig. 2.



So sieht man, dass die Lehre von den geometrischen Oertern, angeregt jedenfalls seit 450 v. Chr. Geb., mindestens zur Zeit des Euclides, wahrscheinlich aber schon 50 Jahre früher, einen Grad von Vollkommenheit erreicht hatte, welcher über die Elemente weit hinausging, und welcher es begreiflich werden lässt, wenn man in besonderen Schriften mit dieser Lehre sich beschäftigte, wenn man an Ortstheoreme anknüpfend eine eigene Gattung von Sätzen aufstellte, welche mangelhafte Ortstheoreme oder Porismen in dem euclidischen Sinne des Worts waren. Ein solches Porisma, und wohl eines der berühmtesten, die überhaupt existirten, ist uns durch Pappus erhalten geblieben, welches in moderner Fassung etwa folgendermassen lauten würde:[24]) Schneiden die Linien eines vollständigen Vierseits sich in 6 Punkten, von denen 3 in einer Geraden liegende gegeben sind, und sind von den 3 übrigen Punkten 2 der Bedingung unterworfen, je auf einer gegebenen Geraden zu bleiben, so wird auch der letzte Punkt eine Gerade zum geometrischen Orte haben, welche aus den gegebenen Dingen näher bestimmt werden kann. Man sieht nun augenblicklich: 1) dass es sich hier um einen geometrischen Ort handelt; 2) dass in der Hypothese die Lage der von zwei Punkten beschriebenen Geraden nicht näher ausgedrückt ist, dass also an der Hypothese etwas fehlt; 3) dass demgemäss auch in der Folgerung keine vollständige Bestimmtheit existirt; 4) dass aber die Folgerung zu einer bestimmten ergänzt werden kann, indem man die Lage der dritten Geraden von den gegebenen Dingen abhängig macht, sie als eine darzustellende Function derselben betrachtet. Oder mit anderen Worten: Die Ortsveränderung eines Punktes ist in Abhängigkeit gebracht zu den Ortsveränderungen zweier Punkte, so dass sie der Art nach bestimmt ist, der Lage nach aber erst bestimmt wird, wenn jene Orts-

veränderungen der beiden anderen Punkte, sowie die drei festen Punkte wirklich gegeben sind.

Dieses vollständiger als die übrigen erhaltene Porisma wurde, wie wir gleichfalls aus Pappus wissen, in 10 einzelnen Fällen behandelt, wie es überhaupt zu den charakteristischen Merkmalen der alten Geometrie gehört, Einzelfälle zu unterscheiden; eine Nothwendigkeit, welche erst bei der Einführung allgemeiner Symbole, welche durch Verschiedenheit von Zeichen eine Verschiedenheit der Lage erkennen lassen, in Wegfall kam. Man erkennt daraus um so leichter, welche gewaltige Ausdehnung ein Porismenwerk gewinnen konnte, wenn die theils als Bedingungen, theils als Ergebniss im Porisma vorkommenden geometrischen Oerter von irgend einer Gestalt sein durften. Euclid scheint sich daher die freiwillige Beschränkung auferlegt zu haben, nur solche Oerter zu benutzen, deren Theorie aus seinen Elementen zur Genüge bekannt war, nämlich in den beiden ersten Büchern der Porismen die gerade Linie, im dritten Buche auch den Kreis. Auch so waren 171 Sätze in dem Werke enthalten, welche Pappus je nach den Ergebnissen (also von den Bedingungen abstrahirend) in 29 Gattungen abtheilt. Eine Gattung war es z. B., wenn sich ergab, dass ein Punkt auf einer der Lage nach bekannten Geraden liegen müsse; eine zweite, wenn man erfuhr, dass eine gewisse Gerade in allen ihren Lagen durch einen bestimmten Punkt gehen müsse; eine dritte, wenn wieder eine bewegliche Gerade auf zwei gegebenen Geraden Abschnitte von bestimmten Produkten bildete, während man davon zunächst absieht, welcherlei Bedingungen in jener ersten Gattung die Bewegung des Punktes, in den beiden anderen die Bewegung der Geraden regeln. So wenigstens ist die Auffassung von Chasles bei seiner Wiederherstellung des verlorenen Werkes, deren Verdienste schon früher hervorgehoben wurden, und auf welche für die genauere Kenntniss des Gegenstandes hiermit verwiesen werden mag.

Wenn nun die Porismen im Hinblick auf ihren Inhalt, auf die Lehre von der Veränderlichkeit, welche denselben mit zu Grunde lag, eine nahe Verwandtschaft zu den geometrischen Oertern an den Tag legen, so ist die Form derselben, und auch das hat Chasles gezeigt, näher mit einem dritten Werke Euclids verwandt, zu dessen Besprechung ich jetzt übergehe, mit den sogenannten Daten.[25]) Diese Schrift, welche vollständig bis auf uns gekommen ist, besteht aus 95 Sätzen, in welchen gezeigt wird, dass, wenn gewisse Dinge gegeben sind, auch andere Dinge gleichzeitig mitgegeben sind. Etwas deutlicher wird wohl dieser Ausspruch, wenn man sich mit den Definitionen bekannt macht, welche Euclid selbst an die Spitze gestellt hat und in denen es heisst: Der Grösse nach gegeben heissen Räume, Linien und Winkel, wenn man solche, die ihnen gleich sind, finden kann. Ein Verhältniss heisst ge-

geben, wenn man ein Verhältniss, welches mit jenem einerlei ist, finden kann. Der Lage nach gegeben heissen Punkte, Linien und Winkel, wenn sie immer an demselben Orte sind u. s. w. Von den Sätzen mögen gleichfalls zum besseren Verständniss einige auf's Gerathewohl herausgehoben werden. Satz 1. Gegebene Grössen haben zu einander ein gegebenes Verhältniss. Satz 3. Wenn gegebene Grössen, wie viel ihrer sein mögen, zusammengesetzt werden, so ist ihre Summe gegeben. Satz 25. Wenn zwei der Lage nach gegebene Linien einander schneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt gegeben. Satz 40. Wenn in einem Dreiecke jeder Winkel der Grösse nach gegeben ist, so ist das Dreieck der Art nach gegeben. Satz 41. Wenn in einem Dreiecke ein Winkel gegeben ist und die um diesen Winkel liegenden Seiten ein gegebenes Verhältniss zu einander haben, so ist das Dreieck der Art nach gegeben. Satz 54. Wenn zwei der Art nach gegebene Figuren ein gegebenes Verhältniss zu einander haben, so haben auch ihre Seiten zu einander ein gegebenes Verhältniss. Satz 89. Wenn in einem der Grösse nach gegebenen Kreise eine der Grösse nach gegebene gerade Linie gezogen ist, so begrenzt sie einen Abschnitt, welcher einen gegebenen Winkel fasst.

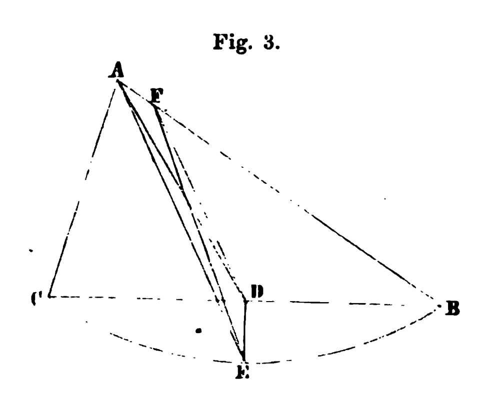
Die Vergleichung dieser Proben mit dem, was über Porismen gesagt wurde, lässt augenblicklich die grosse Formverwandtschaft erkennen. Auch hier schliesst das Theorem, in dessen Gewande die Sätze aufzutreten pflegen, ein künftiges Problem ein, und die Beweisführung erfolgt fast regelmässig so, dass jenes Problem gelöst wird. So ist in dem oben angeführten Satz 3 die Aufgabe mit eingeschlossen, die Summe der gegebenen Grössen auch wirklich zu finden, und in der That wird der Satz dadurch als richtig erwiesen, dass man zwar nicht die Summe selbst — denn dieses würde nicht in dem Charakter des Buches der Gegebenen liegen — aber eine der Summe gleiche Grösse darstellt. Aber auch dafür ist umgekehrt gesorgt, dass man nicht Daten und Porismen ganz verwechseln könne. Dagegen schützt der gewaltige Unterschied des Inhaltes, der sich kurz dahin bezeichnen lässt, dass bei den Daten die Bedingung der veränderlichen Grösse wegfällt, welche zum eigentlichen Wesen des Porismas gehört, und dessen wissenschaftliche Stellung nach modernen Begriffen zu einer weit höheren macht, als die der Daten, deren eigentliche Berechtigung uns fast zweifelhaft erscheint, weil in ihnen im Grunde Nichts steht, was nicht schon in anderer Form und anderer Reihenfolge in den Elementen stünde. Die Data, könnte man sagen, sind Uebungssätze zur Wiederauffrischung der Elemente, die Porismen sind Anwendungen derselben von selbstständigem Werthe. Dass demnach auch vor Euclid, und seit es überhaupt Elementenschriftsteller gegeben hatte, Material zu Daten und Porismen in der erläuterten Wortbedeutung vorhanden war, ist keinem Zweifel unterworfen, so wenig wir eine

Ahnung davon haben, ob wirklich derartige Werke verfasst wurden. Für den eigentlichen Zweck dieser Abhandlung bleibt sich dieses auch ganz gleich. Ich beabsichtige den mathematischen Charakter einer Zeit zu schildern, und diese gipfelte sich in Euclid. Er ist uns Repräsentant der bis zu seiner Blüthe vorhandenen Summe von Kenntnissen. Dass sein Name, seine Werke vor Allen erhalten sind, beweist die relative Meisterschaft, welche er unter seinen Zeitgenossen sich erwarb, stellt ihn uns aber keineswegs, ausser wo bestimmte Zeugnisse dafür auftreten, als den Deus ex Machina dar, dessen Schöpferwort das ganze Lehrgebäude der Mathematik aus dem Nichts hervorrief. Diese Auffassung ist zu wichtig und zu oft vernachlässigt worden, als dass man nicht immer und immer wieder darauf zurückkommen müsste.

Noch von einer dritten Aufgabensammlung des Euclid erzählt uns Proclus,[26]) von dem Buche über Theilung der Figuren.[27]) Bis in die zweite Hälfte des 16. Jahrhunderts war diese Schrift für den Occident verschollen, da fand John Dee um 1563 eine arabische Schrift gleichen Titels, welche er, wiewohl Mahomed Bagdadinus allein als Verfasser genannt war, für euclidisch hielt, und deren lateinische Uebersetzung dann auch später der sogenannten Oxforder Ausgabe des Euclid [28]) beigedruckt wurde. In neuerer Zeit hat Dee's Hypothese an Wahrscheinlichkeit gewonnen, seit Wöpcke in Paris ein zweites arabisches Fragment auffand, welches mit dem Dee'schen Manuscripte dem Wesen nach, aber nicht wörtlich übereinstimmend besonders auch noch Sätze über Theilung des Kreises enthält, die in jenem ersten Texte fehlen, während Proclus sie ausdrücklich erwähnt. Nimmt man hinzu, dass in Wöpckes Handschrift geradezu Euclid als Verfasser genannt ist, so wird dadurch gewiss der Vermuthung Raum gegeben, als sei hier mindestens die Spur der euclidischen Schrift vorhanden, wenn auch darin vorkommende und mehrfach seit Savilius [29]) hervorgehobene mathematische Unrichtigkeiten nicht gestatten in jenen Fragmenten das rein und vollständig erhaltene Buch von der Theilung wiederzuerkennen. Welcherlei Aufgaben übrigens in diesen anziehenden Bruchstücken enthalten sind, mag aus einigen Beispielen hervorgehen. So ist für das Dreieck und für das Viereck die Aufgabe gestellt, dieselben durch eine einer gegebenen Geraden parallele Linie nach gegebenem Verhältnisse zu theilen. Für das Fünfeck ist die Frage zwar nicht ganz so allgemein gestellt, aber immerhin wird die Theilung desselben nach gegebenem Verhältnisse verlangt, sei es von einem Punkte einer Fünfecksseite aus, sei es durch eine zu einer Fünfecksseite unter gewissen Voraussetzungen parallelen Gerade. Endlich schliesst die Wöpckesche Handschrift, wie schon bemerkt, die Aufgaben ein, eine von einem Kreisbogen und zwei einen Winkel bildenden Geraden eingeschlossene Figur in zwei gleiche Theile zu theilen und von einem gegebenen Kreise einen bestimmten

Theil abzuschneiden, Aufgaben, zu deren Lösung schon ein ziemlicher Grad geometrischer Gewandtheit erforderlich ist, wenn auch die Grundlage derselben durchaus elementarer Natur bleibt. Nebenstehende Figur zeigt z. B. die Halbirung des durch die Geraden AB, AC und den Kreisbogen BC eingeschlossenen Flächenraums. Man zieht die Sehne BC und von deren Mitte D aus die Senkrechte DE sowie die Verbindungslinie AD, so wird die gebrochene Linie ADE die Halbirung vollziehen, und dasselbe leistet die Gerade EF unter der Voraussetzung $DF \parallel AE$, weil alsdann $\triangle AFE = ADE$.

Fig. 3.



Konnten wir uns von den bisher genannten euclidischen Werken eine mehr oder weniger genaue Kenntniss verschaffen, so versagen dagegen unsere Hülfsmittel den Dienst bezüglich der 4 Bücher über die Kegelschnitte und der 2 Bücher über die Oerter auf der Oberfläche, von welchen uns kurz berichtet wird. Auf den Inhalt des ersteren euclidischen Werkes werden wir im weiteren Verlaufe dieser Untersuchung einige Rückschlüsse machen können, wenn wir von Apollonius reden, da nach Pappus einige Bücher dieses Mathematikers wesentlich auf den euclidischen Kegelschnitten beruhen [29]). Das zweite Werk dagegen hat ausser seinem Titel [30]) nur vier darauf bezügliche Lemmen bei Pappus als Spur hinterlassen. Die Meinung von Chasles ist daher nur mit grosser Vorsicht aufzufassen, wonach die Oerter auf der Oberfläche sogenannte Umdrehungsoberflächen des zweiten Grades behandelt haben sollen. Noch andere Schriften mechanischen, astronomischen und optischen Inhaltes, welche den Namen des Euclid zur Aufschrift tragen, wollen wir, da es uns nur um den Zustand der Mathematik zu thun ist, ganz übergehen, ohne auch nur auf die Controverse ihrer Aechtheit oder Unächtheit uns einzulassen. Wir wenden uns vielmehr zu den drei unmittelbaren grossen Nachfolgern des Euclid, zu Archimed, Eratosthenes, Apollonius.

Archimed [31]) war unstreitig der weitaus grösste Mathematiker des Alterthums, und als solchen erkannte ihn auch die Mitwelt und in höherem Grade noch die Nachwelt an. Er ist einer der wenigen Gelehrten, die einen eigenen Biographen fanden, indem Heraclides, ein Schriftsteller von unbestimmter Lebenszeit, der aber jedenfalls vor das 6. Jahrhundert zu setzen ist, da Eutokius von Askalon seiner Erwähnung *thut, ein* Leben des Archimedes schrieb. [32]) Diese wahrscheinlich wich-

tige Quellenschrift ist indessen verloren gegangen, und so ist man genöthigt dasjenige, was über des Archimedes Lebensverhältnisse zu sagen ist, aus verschiedenen Schriftstellern des Alterthums zu sammeln.[33]) Archimed wurde in Syrakus geboren, wahrscheinlich im Jahre 287. Nach einer Angabe war er dem Könige Hiero verwandt, nach einer anderen dagegen, welche mehr Glauben verdienen dürfte, war er von niederer Geburt.[34]) Sein nahes, fast freundschaftliches Verhältniss zu dem Könige steht jedenfalls ausser Zweifel. Wer die Lehrer des Archimed gewesen, ist nicht bekannt. So viel giebt Diodor an,[35]) und arabische Schriftsteller bestätigen es, dass er in Egypten war, dem Lande, in welchem seit den Ptolemäern die Mathematik in Blüthe stand, wenn wir auch die ganze Vorzeit als sagenhaft betrachten sollten. Auch von einem Aufenthalt des Archimed in Spanien wird erzählt. Als wissenschaftliche Freunde des Archimed, welchen er einzelne Abhandlungen zueignete, kennen wir Zeuxippus, König Gelon, Konon und besonders Dositheus, an den weitaus die meisten uns erhaltenen Schriften des Archimed gerichtet sind. Die Stellung des Archimedes in Syrakus, als er in diese seine Vaterstadt zurückgekehrt war, scheint eine mehr private als öffentliche gewesen zu sein. Wenigstens ist nirgends die Rede von Staatsgeschäften, denen er vorgestanden hätte. Nur in Verbindung mit einzelnen Dienstleistungen gegen König Hiero wird sein Name genannt. Darunter ist die Untersuchung des Gold- und Silbergehaltes von Hieros Krone vielleicht am bekanntesten. Die Methode der Untersuchung wird in doppelter Weise beschrieben, und wiewohl der Gegenstand eigentlich ausserhalb der mathematischen Betrachtungen liegt, so mag hier ausnahmsweise ein Bericht über diese Controverse gestattet sein.

Vitruvius, ein Schriftsteller des augusteischen Zeitalters, erzählt die Sache folgendermassen:[36]) Archimed sei mit dem Nachweise eines bei Anfertigung der Krone muthmasslich begangenen Betruges beauftragt gewesen; zufällig sei er in ein Badehaus getreten, und habe beim Einsteigen in eine mit Wasser ganz angefüllte Wanne bemerkt, dass ebensoviel Wasser auslief als sein Körper verdrängte. Diese Beobachtung, welche sicherlich schon mancher Andere vor ihm gemacht hatte, ohne jedoch die Nutzanwendung einzusehen, welcher die einfache Thatsache fähig war, genügte ihm um die entsprechenden Folgerungen zu ziehen. Die Menge des verdrängten Wassers, so schloss er, hängt nur von der Ausdehnung, nicht von dem Gewichte des eingetauchten Körpers ab, das Gewicht dagegen verändert sich bei gleicher Ausdehnung nach der Natur des Stoffes; andere Stoffe werden bei gleicher Ausdehnung verschiedenes Gewicht, bei gleichem Gewicht verschiedene Ausdehnung haben. Bildet man sonach eine reine Goldmasse und eine reine Silbermasse, beide von genau gleichem Gewichte mit der Krone, so wird das Silber am meisten

Flüssigkeit aus einem bis zum Rande gefüllten Gefässe verdrängen, nächstdem die aus beiden Metallen gemischte Krone, das Gold endlich am wenigsten. Diese Schlüsse, wenn auch wohl noch nicht in der hier ausgeführten Deutlichkeit, scheinen dem Geiste Archimeds sich plötzlich dargeboten zu haben; er sah ein, dass die verhältnissmässige Ausdehnung bei gleichem Gewichte, eine Grösse, deren Umgekehrtes die moderne Physik bekanntlich als specifisches Gewicht bezeichnet, zur hydrostatischen Bestimmung der Bestandtheile eines Metallgemenges hinreiche mittelst einer heute unter dem Namen der Gesellschaftsrechnung bekannten Betrachtung. In der Freude über diese Entdeckung sei Archimed unbekleidet in's Freie und nach seiner Wohnung zu gelaufen mit dem lauten Rufe *εὕρηκα, εὕρηκα*, ich habe es gefunden! Die zweite Auffassung findet sich in einem Lehrgedichte „über die Gewichte und Maasse", welches wahrscheinlich um das Jahr 500 verfasst sein dürfte. Dort ist nämlich die Auffindung des specifischen Gewichtes einer Substanz, und auf diese allein kommt es ja an, an eine doppelte Abwägung geknüpft. Wird die zu prüfende Substanz einmal im Freien und das zweite Mal in Wasser eingetaucht gewogen, so wird sie das zweite Mal so viel an ihrer Gewichtswirkung auf den Wagebalken, an welchem sie hängt, einbüssen, als die verdrängte Flüssigkeitsmenge beträgt, man wird folglich in dem Verhältnisse des ursprünglichen Gewichtes zu dem Gewichtsverlust das specifische Gewicht des Stoffes besitzen. Diese zweite Vorschrift ist allerdings der erstgegebenen vorzuziehen, weil wohl zu jeder Zeit Wägungen in genauerer Weise ausgeführt werden konnten, als die Abmessung der auslaufenden Flüssigkeit. Ferner ist nachweisbar, dass Archimed das hydrostatische Gesetz kannte, auf welchem die Methode der doppelten Abwägung beruht.[37]) Gleichwohl möchte ich dem älteren Berichte nur um so bestimmter Glauben schenken. Ist doch der Gedankengang der wahrscheinlichere, dass dem Archimed zuerst jene unmittelbare Messung vorschwebte, und dass er erst später die mittelbare Methode entdeckte, nachdem die praktische Schwierigkeit der ersteren eine solche wünschenswerth erscheinen liess.[38]) Aber gleichviel, jedenfalls war die Entdeckung eine grossartige und wurde als solche von den Zeitgenossen gewürdigt. An sie knüpft sich wahrscheinlich der von Proklus überlieferte Ausspruch des Königs Gelon, er werde hinfort Nichts bezweifeln, was Archimed behaupte.[39])

Vielleicht ist übrigens dieses geflügelte Wort auf Hiero zurückzuführen und knüpft sich an eine andere mechanische Erfindung des Archimed. Wie er nämlich mit der erzählten Entdeckung die Grundlage zur Hydrostatik gelegt hatte, so ist er auch als der Begründer der Statik und Mechanik fester Körper anzusehen, indem er den Satz bewies, dass ungleiche Gewichte an ungleichen Hebelarmen wirkend Gleichgewicht darstellen können, sofern die Produkte aus der Länge der

Hebelarme in die Gewichte einander gleich sind.[40]) Von diesem Satze aus construirte er Hebemaschinen, Flaschenzüge und ähnliche Apparate, mit deren Hülfe es möglich war, dass König Hiero einst allein ein schweres Schiff vom Stapel liess. Aus dem Bewusstsein der Richtigkeit dieses Satzes ging auch das weitere anekdotisch gewordene Wort des Archimedes selbst hervor, *δός μοί πού στῶ καὶ τὴν γῆν κινήσω*. Es waren weiter nur Anwendungen seiner mechanischen Lehren, wenn Archimed die Schraube als Wasserhebemaschine benutzte, wenn er eine weit berühmte Himmelskugel aus Glas verfertigte, die zur Darstellung der Bewegungen der Gestirne diente. Um wieder auf sein Verhältniss zu König Hiero zurückzukommen, so erbaute er für denselben ein grosses Schiff mit 20 Ruderbänken, welches für alle Zwecke der Ueppigkeit auf's Glänzendste hergerichtet war.[41]) Nennen wir noch eine Wasserorgel, welche Archimed erfunden haben soll, und das geometrische Spielwerk, bei welchem ein Quadrat in 14 Stücke von verschiedener vieleckiger Gestalt zerschnitten wird, aus denen dann alle möglichen Figuren zusammengesetzt werden, so ist damit die Summe der nicht streng geometrischen Dinge gegeben, mit welchen der Name Archimeds vor der letzten Periode seines Lebens in Verbindung gesetzt wird.

Diese letzte Periode war nämlich dem öffentlichen Dienste gewidmet. Seit 214 belagerten die Römer Syrakus, und des Archimed Erfindungen, seine Bemühungen allein waren es, welche fast zwei Jahre lang alle Angriffe des Feindes vereitelten. Neben mancherlei Hebemaschinen, mit deren Hülfe die feindlichen Schiffe in die Höhe gezogen, dann bei plötzlichem Falle zerschmettert wurden, neben Wurfgeschossen aller Art werden aus dieser Zeit besonders die Brennspiegel des Archimed genannt, mit deren Hülfe er nach den freilich vielfach bestrittenen Erzählungen von Zonaras und Tzetzes die Schiffe der Römer aus weiter Entfernung in Brand gesteckt haben soll. Erst 212 gelang es den Römern Syrakus von der Landseite aus durch Ueberrumpelung zu nehmen, und dabei verlor Archimed das Leben, indem er der Rohheit eines römischen Soldaten, welcher ihn nicht kannte, zum Opfer fiel. Auch seinen Tod erzählen die Schriftsteller in Verbindung mit einer bekannten Redensart. Archimed sei gerade mit geometrischen Untersuchungen beschäftigt gewesen und habe zu diesem Endzwecke Figuren in den Sand des Hofes gezeichnet; als nun der Feind heranstürmte, habe Archimed, nur für seine Figuren in Angst, ihn durch die Worte gereizt, er solle seine Kreise schonen.[42]) Marcellus, der römische Feldherr, empfand grosse Trauer über den Tod des berühmten Gegners und liess ihm ein Grabmal setzen mit einer mathematischen Figur als Inschrift, wie jener es einst selbst angeordnet hatte. Das Grabmal scheint indessen von Archimeds Landsleuten sehr vernachlässigt worden zu sein, da Cicero, der es bei seinem dortigen Aufenthalte als

Quästor von Sicilien aufsuchte, es nur mit Mühe unter dem überwuchernden Gestrüppe entdeckte und an der Inschrift erkannte. Er liess es darauf auf's Neue in Stand setzen.

Nach diesen biographischen Notizen müssen wir zur Besprechung der uns erhaltenen Schriften des Archimed übergehen, welche uns indessen auch Gelegenheit geben wird, den Verlust mindestens einer Abhandlung zu beklagen, welche, wenn nicht einzig in ihrer Art, doch sicherlich die älteste Abhandlung über den betreffenden Gegenstand ist, von der wir überhaupt Nachricht haben. Die Schriften des Archimed, auch dem Philologen dadurch wichtig, dass sie sämmtlich im dorischen Dialekte abgefasst sind, beschäftigen sich mit arithmetischen, mit geometrischen und mit mechanischen Untersuchungen, welche sämmtlich in einem gewissen Zusammenhange stehen.

Bekanntermassen können bei der Betrachtung der Zahlengrössen zwei Gattungen von Eigenschaften in's Auge gefasst werden: solche, die sich auf die Veränderung der Zahl beziehen, sofern sie mit einer anderen in Verbindung tritt um eine dritte zu bilden, und solche, die der Zahl selbst inne wohnen. Die erste Gruppe von Betrachtungen umfasst das Rechnen, die heute sogenannte Arithmetik; der Inhalt der zweiten Gruppe wird heute als Zahlentheorie benannt. Die Griechen unterschieden ebenso, nur dass sie den Namen Arithmetik für den zahlentheoretischen Theil benutzten, während der calculatorische Theil als Logistik bezeichnet wurde. Die Arithmetik gehörte zu der Lieblingsbeschäftigung der älteren wie der jüngeren pythagorischen Schule, auf deren Gründer sich wichtige Capitel derselben zurückführen lassen.[5]) Bei der Besprechung des Euclid war von dieser alten Arithmetik die Rede, und eine historisch-mathematische Untersuchung über die ersten Jahrhunderte nach Christi Geburt würde noch reichhaltigen Stoff hinzufügen. Die Logistik dagegen, die Lehre vom Rechnen, scheint nur wenig Autoren den Stoff zur schriftlichen Behandlung geliefert zu haben, und von den Abhandlungen, welche darüber existirten, ist auch nicht eine einzige vollständig erhalten. Negative Erscheinungen begründen zu wollen, ist immer misslich; wollte man aber hier den Versuch wagen, so könnte man darauf aufmerksam machen, dass das Rechnen überhaupt einen der schwierigsten Lehrgegenstände bildet. Will man einen geometrischen Satz etwa vom Dreiecke beweisen, und zeichnet zu diesem Zwecke eine Figur, so wird zwar das Aussehen der Figur je nach der Wahl der Längen und Richtungen ein sehr verschiedenes sein können, aber doch wird man rasch zur Ueberzeugung gelangen, dass die unendliche Willkür nicht mehr als eine geringe Zahl wesentlich verschieden aussehender Figuren hervorbringen kann, und mit dieser Ueberzeugung bildet sich gleichzeitig das Bewusstsein von der allgemeinen Gültigkeit der an einer Figur gelungenen Beweisführung für alle Figuren derselben

Gattung. Eine wichtige Beihülfe ist hierbei die Benennung einzelner Punkte der Figur durch Buchstaben, und wir dürfen wohl gelegentlich darauf hinweisen, dass auch hierin schon eine gewisse allgemeine Symbolik von uraltem Ursprunge zu erkennen ist. Für Zahlengrössen dauerte es lange, bis allgemeine Symbole eingeführt wurden, an denen die Operationen formell wenigstens ausgeführt werden können, und was das Alterthum in dieser Richtung bietet, ist nur sehr ungenügenden Inhaltes. Benutzte man aber bestimmte Einzelzahlen zu den Operationen, so war jetzt die Verschiedenheit von einem Beispiele zum anderen eine so gewaltige, dass nur häufige und vielseitig fortgesetzte Uebung die Abstraction befestigen konnte, wie man es jedesmal nur mit einem Beispiele zu thun habe, und wie man das eigentliche Rechnungsverfahren von den Zahlen, an welchen es gelehrt wurde, loszulösen habe. Diese Schwierigkeit wuchs in dem Grade, als Verbindungen von mehr und mehr ganz frei zu wählenden Zahlen herzustellen waren, war demnach bei der Logistik bedeutender als bei der Arithmetik im alten Sinne dieser Namen. Eine Erläuterung der Rechnungsverfahren während der Ausübung war schon nicht ganz leicht, eine schriftliche Auseinandersetzung war nur um so schwieriger.[43]) Dazu kommt noch, dass das Rechnen der Alten vielfach ein instrumentales war, und dass auch die Erklärung des dazu erforderlichen Rechenbrettes[44]) leichter mündlich bei Benutzung des Apparates selbst als schriftlich zu geben war. Hier genüge die Bemerkung, dass ein solches Rechenbrett, Abax, bei den Griechen in Uebung war, und dass die Einrichtung desselben dem dekadischen Zahlensystem angepasst war, auf welches ebendadurch die wissenschaftliche Betrachtung hingelenkt werden musste. Erläuterungen dieses Systemes nun und Vervollkommnung desselben, dadurch, dass man wieder unter den dekadischen Einheiten Einheiten höherer Ordnung unterschied, fanden sich in einem dem Zeuxippus gewidmeten Werke des Archimed, welches der uns erhaltenen Ueberschrift, die Grundzüge,[45]) nach die Anfänge der Rechenkunst überhaupt enthalten haben dürfte. Jedenfalls sind wir berechtigt, Archimed als einen für seine Zeit gewandten Rechner anzuerkennen. Schon die sogenannte Kronenrechnung, von welcher wir freilich keine unmittelbaren Spuren besitzen, aber deren nothwendiger Grundgedanke oben besprochen wurde, erfordert einige Uebung in dem Rechnungsverfahren, und noch mehr wird sich dieses bei der Kreismessung nachweisen lassen.

Die Erweiterung des dekadischen Zahlensystems, welche Archimed einführte, bestand in der Zusammenfassung von je 8 auf einander folgenden Rangordnungen in eine Octade und dann wieder der Octaden selbst zu Perioden.[46]) Die erste Octade geht also von der Einheit zur Zahl 10000 mal 10000 oder Myriade Myriaden, welche die Ein-

heit der zweiten Octade bildet und welche nach moderner Schreibart eine 1 mit 8 Nullen ist. Einheit der dritten Octade ist die Zahl, welche wir als 1 mit 2 mal 8 oder 16 Nullen schreiben; Einheit der 26. Octade etwa ist die 1 mit 25 mal 8 oder 200 Nullen. Diese Eintheilung bis zur 10000sten Myriade der 10000 mal 10000sten Octade durchgeführt bildet insgesammt die erste Periode und die zuletzt genannte Zahl selbst, welche also nach unserer modernen Schreibweise eine 1 mit 800 Millionen Nullen wäre, bildet die Einheit der ersten Octade der zweiten Periode.

Soll es gestattet sein hier bei der Erwähnung der verlorenen Grundzüge des Archimed die wenigen Namen anzuführen, welche ausserdem noch mit griechischer Logistik in Zusammenhang gebracht werden können, so ist vor Allen Apollonius zu nennen, dessen Multiplicationsmethode uns noch beschäftigen wird; dann ein gewisser Magnus, von dem wir allerdings Nichts weiter wissen, als dass er irgendeinmal vor Eutokius, der ihn rühmt,[47]) eine Logistik schrieb; weiter Theon von Alexandrien, gegen Ende des 4. Jahrhunderts, durch welchen wir griechische Divisionen und Ausziehung von Quadratwurzeln kennen;[48]) Pappus, der höchst wahrscheinlich an den Anfang seiner Sammlungen Logistisches zusammenstellte,[49]) wovon indessen nur ein Bruchstück auf uns gekommen ist, und Eutokius von Askalon, dessen Multiplicationsbeispiele erhalten sind.[50])

Wenn die Grundzüge des Archimed uns abhanden gekommen sind, und in ihnen sicherlich ein höchst werthvolles Werk, so ist doch die Sandrechnung[51]) desselben Verfassers vorhanden, welche mit der Aufgabe sich beschäftigt: eine Zahl anzugeben, welche grösser sei, als die Zahl der Sandkörner, die eine Kugel fassen würde, deren Halbmesser die Entfernung des Erdmittelpunktes von dem Fixsternhimmel wäre und dabei jene Zahlengruppirung aus den Grundzügen anwendet, über welche wir erst berichtet haben. Was ist nun die Bedeutung dieser eigenthümlichen Aufgabe? Man hat lange Zeit darüber in Zweifel gestanden. Man hat sogar versucht, die ganze Tendenz der Schrift in jenem Bruchstücke der Grundzüge zu finden; mit anderen Worten, man hat es als einzigen Zweck der Sandrechnung bezeichnet, ein Beispiel davon zu liefern, wie man die Aussprache der Zahlen von einer gewissen Höhe an vereinfachen und eine Einsicht in die Art ihres Wachsthums gewähren könne. Ich will nicht in Abrede stellen, dass ein derartiges Thema der Behandlung würdig gewesen wäre, allein ich möchte eher glauben, dass es einen Theil des Inhaltes jener Grundzüge bildete. Die Sandrechnung hatte sicherlich einen ganz anderen Zweck: sie sollte die arithmetische Ergänzung der geometrischen Exhaustionsmethode bilden. Wir haben bei Gelegenheit des 10. Buches der euclidischen Elemente gesehen, dass in der Exhaustionsmethode der

Gedanke zum Durchbruche kam, dass es keine so kleine Grösse gebe, welche nicht die Auffindung einer noch kleineren Grösse gestatte, und dieses Unendlichkleine wurde als Unterschied zweier Raumgebilde der Phantasie nahe gelegt. Den Gegensatz zum Unendlichkleinen bildet nun das Unendlichgrosse. Das heisst, wir können auch keine noch so bedeutende Grösse angeben, welche nicht die Auffindung einer noch grösseren gestattete. Will man aber der Phantasie zu Hülfe kommen, so ist das Unendlichkleine eher geometrisch zu versinnlichen, als der Unterschied zweier nahezu zusammenfallender Raumgebilde, so ist dagegen das Unendlichgrosse unmöglich an geometrischen Figuren zu begreifen, welche immer innerhalb des Raumes begrenzt erscheinen, während das Unendlichgrosse allen Raum überschreitet. Hier erleichtert man daher das Begreifen nicht durch die concrete, sondern durch die abstracte Grösse, das heisst durch die Zahl. Man wird zeigen, dass jede noch so grosse, aber gegebene Anzahl durch eine im Uebrigen nicht näher bestimmte Zahl überstiegen werde, und grade diese Aufgabe löst die archimedische Sandrechnung.

Man könnte vielleicht einwenden, mit dieser Erklärung, welche der Inhalt der Abhandlung zweifellos zulässt, schiebe man denn doch nachträglich dem Archimed eine Einsicht in das Wesen der Infinitesimalmathematik zu, welche er noch keineswegs besass. Allein dieser Einwand zerfällt, wenn wir zeigen, wie gerade Archimed die geometrische Exhaustionsmethode mehr anwandte und mit grösserem Erfolge als irgend ein anderer griechischer Mathematiker, eine Thatsache, welche überdies so allgemein anerkannt ist, dass Archimed sogar nicht selten als der Erfinder der Exhaustionsmethode bezeichnet wird, was er, wie wir wissen, nicht war. Ferner wird es zur Zerstörung der Skrupel wohl beitragen, wenn wir finden, dass Archimed neben der geometrischen Exhaustionsmethode auch eine rechnende Exhaustion besass, wenn wir diesen Namen auf jede Methode anwenden wollen, bei welcher ein nicht genau zu Findendes wenigstens zwischen zwei sehr benachbarte Grenzen eingeschlossen wird.

Von dieser rechnenden Methode macht Archimed in seiner Schrift über die Kreismessung Gebrauch. Er geht von der Seite des umschriebenen Sechseckes aus, deren Verhältniss zum Kreisdurchmesser in noch zu erörternder Weise als kleiner als 153 : 265 bewiesen wird. Dann folgt, dass die Seite des umschriebenen Zwölfecks kleiner als $\frac{153}{571}$ des Kreisdurchmessers sein muss, und, indem man weiter zum umschriebenen Vielecke von immer doppelter Seitenzahl übergeht, zeigt sich, dass die Seite des umschriebenen 96Ecks weniger als $\frac{153}{4673^1/_2}$ des Kreisdurchmessers misst. Der ganze Umfang des 96Eckes, und um so sicherer die

kleinere Kreisperipherie ist somit kleiner als $\frac{14688}{4673^1/_2}$, d. h. gewiss kleiner als $3^1/_7$ des Kreisdurchmessers. Jetzt wendet sich Archimed zu den eingeschriebenen Vielecken. Er zeigt, dass die Seite eines solchen Sechsecks die Hälfte des Durchmessers, die Seite eines solchen Zwölfecks mehr als $\frac{780}{3013^3/_4}$ des Durchmessers ist. So gelangt er wieder zur Seite des jetzt eingeschriebenen 96Ecks, welche grösser als $\frac{66}{2017^1/_4}$ des Durchmessers gefunden wird. Folglich ist der ganze Umfang dieses 96Eckes, und um so sicherer die grössere Kreisperipherie, grösser als $\frac{6336}{2017^1/_4}$, d. h. gewiss grösser als $3^{10}/_{71}$ des Kreisdurchmessers. Somit ist diejenige Zahl, welche das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser eines Kreises darstellen soll, allerdings nicht gefunden, aber sie ist doch zwischen zwei ziemlich nahe bei einander liegenden Grenzzahlen eingeschlossen, zwischen $3^1/_7$ und $3^{10}/_{71}$.

Ich habe noch von der Methode dieser Entwickelung zu reden. Wenn man das eingeschriebene und umschriebene Sechseck zu einem Kreise zeichnet und den Mittelpunkt des Kreises mit den Endpunkten dieser Sechsecke verbindet, so ergiebt sich leicht, dass die Hälfte der umschriebenen Sechseckseite die kleinere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen grössere Kathete der Halbmesser des Kreises und dessen Hypotenuse doppelt so gross als die kleinere Kathete. Das Quadrat des doppelten Halbmessers oder des Durchmessers muss daher 3mal so gross sein als das Quadrat jener verdoppelten kleineren Kathete oder der umschriebenen Sechsecksseite. Ob nun Archimed in einer Tafel der Quadrate ganzer Zahlen dasjenige Quadrat aussuchte, dessen Dreifaches nur unbedeutend grösser als ein anderes Quadrat war, und dadurch zu 265 und 153 kam, wissen wir freilich nicht.[52]) Genug, er geht von diesen beiden Zahlen aus und benutzt zur Auffindung von Verhältnisszahlen für die Seiten der Vielecke von jeweilig verdoppelter Seitenzahl theils den pythagoräischen Lehrsatz, theils jenen anderen gleichfalls bekannten Lehrsatz, dass die Halbirungslinie eines Winkels eines Dreiecks die gegenüberliegende Seite im Verhältnisse der anliegenden Seiten schneidet.[53]) Dieselben Hülfssätze wendet er auch in Bezug auf die eingeschriebenen Vielecke an und zeigt sich dabei als gewandten Rechner. Nicht nur mit Proportionen weiss er auf's Beste umzugehen, er muss auch irgend eine Methode besessen haben, die Quadratwurzeln näherungsweise auszuziehen. Ich sage eine Methode der Ausziehung von Quadratwurzeln, denn wenn auch in dem oben erwähnten Anfangsbeispiele ein blosses Experimentiren denkbar ist, so verlässt uns diese Möglichkeit, sobald gebrochene Werthe als Quadratwurzeln erscheinen; das Vorhandensein einer Liste der Quadrate aller zwischen zwei ganzen

Zahlen enthaltenen Bruchzahlen ist mehr als unwahrscheinlich. Leider giebt Archimed selbst in keiner Weise zu erkennen, worin sein Verfahren bestanden haben mag, und auch sein Commentator Eutokius belehrt uns nicht darüber. Er zeigt nur umgekehrt, dass die Multiplication der angegebenen Werthe mit sich selbst nahezu die archimedischen Ausgangszahlen wieder herstelle und macht uns so wenigstens mit dem Multiplicationsverfahren der Griechen, wie es zu seiner Zeit in Uebung war, bekannt. Dasselbe ging, wie wir heute sagen würden, von links nach rechts, also der modernen Art und Weise entgegengesetzt. So multiplicirte er, um 265^2 zu finden[54]) zuerst 200 mit 200, mit 60, mit 5; dann 60 mit denselben Factoren; endlich auch 5; und diese 9 Theilprodukte addirte er schliesslich zu 70225 zusammen.

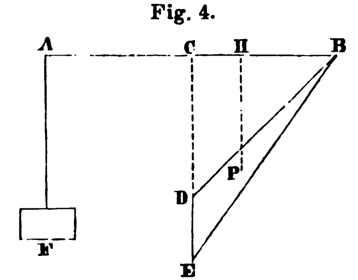
Ich gehe nun schliesslich zur Besprechung der geometrischen Schriften des Archimed über. An die Spitze derselben möchte ich wieder eine verloren gegangene Abhandlung stellen, welche die Ueberschrift: Ueber die Kegelschnitte führte. Dass er eine solche schrieb, glaubt man daraus folgern zu dürfen, dass an zwei verschiedenen Stellen von unzweifelhaft echten Schriften auf eine Abhandlung dieses Titels verwiesen ist, ohne dass der Name eines Verfassers angegeben wäre,[55]) und das unterlässt Archimed sonst nur, wenn er sich auf Eigenes beruft. Jedenfalls stehen auch die Einzeluntersuchungen des Archimed über bestimmte Kegelschnitte mit dieser Annahme nicht im Widerspruch, und wenn wir an dieser Stelle noch nicht darauf eingehen wollen, in welcher Art Archimed, seine Vorgänger und seine Nachfolger die Entstehung der Kegelschnitte auffassten und wie sie dieselben benannten, so dürfen wir wohl mit vorweggenommenem Namen bemerken, dass die Parabel diejenige unter diesen Curven war, mit welcher Archimed sich mit einer gewissen Vorliebe beschäftigte. Die Untersuchungen über die Quadratur der Parabel insbesondere, welche zwischen das erste und zweite Buch einer mechanischen Schrift über den Schwerpunkt und das Gleichgewicht von Ebenen eingeschoben sind, zeigen die vielgerühmte Gewandtheit des Archimed in Anwendung der Exhaustionsmethode im glänzendsten Lichte, so dass es lohnend sein dürfte, wenigstens im Allgemeinen den Gang des Hauptbeweises anzudeuten.[56])

Wird ein Parabelabschnitt durch eine in der Mitte der denselben bildenden Sehne der Axe parallel gezogene Gerade geschnitten, so ist die Berührungslinie an die Parabel in dem Schnittpunkte der Sehne parallel. Somit ist die Senkrechte aus diesem Schnittpunkte auf die Sehne die grösste Senkrechte, welche überhaupt aus einem Punkte innerhalb des gegebenen Parabelbogens auf die Sehne gefällt werden kann, oder dieser Punkt ist als höchster Punkt des Parabelabschnittes über seiner Sehne zu bezeichnen. Daraus folgt weiter, dass das Dreieck,

welches die Sehne zur Grundlinie, den genannten Höhepunkt als Spitze besitzt, und welches folglich von dem ersten Parabelabschnitte um zwei neue kleinere Abschnitte sich unterscheidet, grösser als die Hälfte des ersten Abschnittes ist. Dieser Abschnitt ist also umgekehrt grösser als einmal, kleiner als zweimal das betreffende Dreieck. In jedem der beiden neuen kleineren Abschnitte wird nach ähnlicher Regel wieder ein Dreieck beschrieben, deren jedes mehr als die Hälfte des ihn enthaltenden Abschnittes einnimmt, und genau den achten Theil des ersten Dreiecks als Flächeninhalt besitzt. Der Parabelabschnitt wird dadurch in zweiter Annäherung grösser als $1\frac{1}{4}$, kleiner als $1\frac{1}{2}$ des ursprünglichen Dreiecks. Nun werden in die neuen immer wieder kleineren Parabelabschnitte wieder neue Dreiecke beschrieben und den eben ausgesprochenen Sätzen Analoges von denselben behauptet. In modernen Zeichen würde die Reihenfolge der so zu gewinnenden Sätze als Summirung der unendlichen Reihe $1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 \ldots$ aufzufassen sein, wobei 1 dem Flächeninhalte des ersten Dreiecks, die gesuchte Summe dem Flächeninhalte des Parabelabschnittes als Maass zu dienen hat. Archimed summirt freilich zunächst nur die endliche Reihe, deren letztes Glied wir etwa als $(\frac{1}{4})^n$ bezeichnen wollen, und giebt an, dass die Summe derselben um den dritten Theil der kleinsten Zahl geringer als $\frac{4}{3}$, in Zeichen also $= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n$ sei. Dann kehrt er mit Hülfe indirecter Betrachtungen zu seinem eigentlichen Endziele zurück und weist nach, dass ein Parabelabschnitt weder grösser noch kleiner sein könne, als $\frac{4}{3}$ des Dreiecks, das mit dem Abschnitte einerlei Grundlinie und gleiche Höhe hat.

In noch höherem Grade originell erscheint der andere Beweis desselben Satzes, welchem das Buch der Quadratur der Parabel seine den Leser sicherlich überraschende Stellung inmitten von Untersuchungen über Gleichgewicht und Schwerpunktsconstructionen verdankt.[57]) Mit Rücksicht grade auf die Auffindung des Schwerpunktes einer Figur wird nämlich gezeigt, dass, während C der Stützpunkt eines gleicharmigen Hebels ACB ist, ein Dreieck BDE, welches in B und C an dem einen Wagebalken CB befestigt ist, der in A an dem anderen gleich langen Wagebalken CA aufgehängten Figur F das Gleichgewicht hält, sofern F der dritte Theil des Dreiecks BDE ist. Des Weiteren wird ein Paralleltrapez aufgehängt gedacht (Fig. 5), dessen nicht parallele Seiten sich verlängert in B schneiden, während die parallelen Seiten senkrecht gegen den Wagebalken sind. Für die diesem Trapeze $DEGH$ das Gleichgewicht bei A haltende Figur F wird bewiesen, dass sie zwischen

Fig. 4.



zwei Grenzen dem $\frac{CK}{CB}$- und dem $\frac{CL}{CB}$-fachen des Trapezes enthalten ist. Jetzt geht Archimed zur Aufhängung eines Parabelabschnittes über. Einige Eigenschaften dieser Curve hat er schon in dem Eingange des Buches erwähnt. Nun zeigt er (Fig. 6), dass, wenn die den Abschnitt bildende Sehne BD in beliebig viele gleiche Theile getheilt wird, wenn aus jedem Theilpunkt eine Parallele zu CE und aus den Schnittpunkten dieser Parallelen mit der Parabel Verbindungslinien nach B gezogen werden, welche man noch jenseits des Parabelpunktes bis zur nächsten Parallelen verlängert, der Parabelabschnitt alsdann als zwischen zwei Summen von trapezartigen Stücken enthalten sich kundgiebt. Durch Aufsuchung der in A gleich schweren Figuren zu den einzelnen Trapezen, sowie durch Verbindung der beiden genannten Gleichgewichtssätze für das Dreieck und das Trapez ergiebt sich endlich der Parabelabschnitt als Drittel des grossen Dreiecks BDE. Andererseits ist, unter der Voraussetzung, es sei SGT die der BD parallele Berührungslinie an die Parabel, G die Mitte von HR, H die Mitte von BD und R die Mitte von BE, folglich $HG = \frac{1}{4} DE$; daraus ergiebt sich, dass der Parabelabschnitt $\frac{1}{3}$ des kleinen Dreiecks BDG ist, wie erwiesen werden sollte.

Fig. 5.

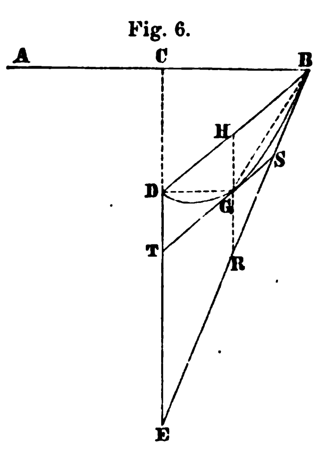


Fig. 6.

Ausführlicher möchte ich nicht bei diesem Gegenstande verweilen, um nicht der selbstgesteckten Beschränkung auf rein Mathematisches allzu untreu zu werden. Aus demselben Grunde sollen auch des Archimed zwei Bücher von den schwimmenden Körpern hier nur eben genannt werden, weil sich deren Interesse darauf beschränkt, die Eintauchungstiefe gewisser Körper zu finden, deren geometrische Eigenschaften in einer besonderen Schrift abgehandelt werden, in dem Buche von den Konoiden und Sphäroiden. Unter diesem Namen kennt Archimed diejenigen Körper, welche durch die Umdrehung einer Parabel, einer Ellipse, einer Hyperbel um ihre Axe gebildet werden und welche man heute als Rotationsparaboloide, Rotationsellipsoide, Rotationshyperboloide benennt. Archimed theilt solche Körper durch einander parallele gleich weit von einander entfernte ebene Schnittflächen und erhält so zwischen je zwei Schnittebenen ein Körperelement, das von einem Cylinder eingeschlossen, einen anderen Cylinder in sich ent-

hält. Die Summirung sämmtlicher grösseren Cylinder nebst den der sämmtlichen kleineren Cylinder wird sonach zwei Grenzen bilden, zwischen welchen der Körperinhalt des gegebenen Umdrehungskörpers enthalten ist, und welche bei Annäherung der Schnittflächen selbst beliebig wenig von einander unterschieden sind. Mit anderen Worten, Archimed findet die Cubatur der genannten Körper nach einer Methode, in welcher wir denselben Gedanken wiedererkennen, der ausgebildet die Lehre von den bestimmten Integralen begründet. Gelegentlich wird dabei auch die Quadratur der Ellipse abgeleitet,[58]) gelegentlich auch gezeigt, wie zu jeder Ellipse unendlich viele Kegel und Cylinder gefunden werden können, auf deren Mantel sie sich befindet, offenbar ein Analogon zu dem, was wir heute perspectivische und projectivische Eigenschaften der Curven zu nennen pflegen.[59])

Noch ein anderes stereometrisches Werk hat Archimed hinterlassen: Die zwei Bücher von der Kugel und dem Cylinder, deren ausgesprochener Zweck es ist,[60]) drei neue Sätze zu beweisen: 1) dass die Oberfläche einer Kugel dem Vierfachen ihres grössten Kreises gleich sei; 2) dass die Oberfläche eines Kugelabschnittes so gross sei, als ein Kreis, dessen Halbmesser einer geraden Linie vom Scheitel des Abschnittes bis an den Umfang des Grundkreises gleich sei; 3) dass der Cylinder, welcher zur Grundfläche einen grössten Kreis der Kugel habe, zur Höhe aber den Durchmesser der Kugel, mit anderen Worten, der der Kugel umschriebene Cylinder anderthalb mal so gross sei, als die Kugel, und dass auch seine Oberfläche das Anderthalbfache der Kugeloberfläche sei. Auf diese Sätze scheint Archimed selbst unter allen seinen Entdeckungen das grösste Gewicht gelegt zu haben; wenigstens war es die Kugel mit dem sie umgebenden Cylinder, welche er auf seinen Grabstein eingemeiselt wünschte, und woran, wie früher erwähnt, Cicero die Begräbnissstätte des grossen Mannes erkannte.

Zuletzt bleibt noch eine merkwürdige Schrift des Archimed zu erwähnen übrig: Das Buch von den Schneckenlinien.[61]) Nicht als ob es das Letzte gewesen wäre, was Archimed schrieb. Die chronologische Reihenfolge seiner Werke, wie sie aus den gegenseitigen häufigen Citaten ziemlich genau herzustellen ist, und auch in den Gesammtausgaben archimedischer Schriften, z. B. in der vortrefflichen deutschen Ausgabe von Nizze eingehalten ist, weist der Schrift über die Schneckenlinien den Platz an zwischen der Kreismessung und den Konoiden und Sphäroiden. Der Grund, warum ich ihrer jetzt erst gedenke, liegt darin, dass nach modernen Begriffen die Schneckenlinie (die archimedische Spirale, $\varrho = a\,\vartheta$) sich weiter von der elementaren Geometrie entfernt, als was wir bisher kennen gelernt haben. Sogar vom *antiken Gesichts*punkte aus, von welchem so Manches ganz anders

aussieht, lässt sich etwas Aehnliches behaupten. In der That ist die Schneckenlinie die erste, welche durch eine doppelte Gattung von Bewegungen und von bewegten Elementen zugleich erzeugt wird. Die Quadratrix des Dinostrates z. B. benutzt zu ihrer Entstehung eine drehende und eine geradlinige Bewegung, aber die bewegten Elemente sind doch zwei gerade Linien, deren Durchschnittspunkt die genannte Curve zum Orte hat. Hier dagegen bewegt sich das eine Mal eine grade Linie, das andere Mal ein Punkt, denn die Definition, welche Archimed giebt,[62] lautet so: Wenn eine gerade Linie in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte, welcher unbeweglich bleibt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt, bis sie wieder dahin gelangt, von wo die Bewegung ausging, und wenn zugleich in der bewegten Linie ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit von dem unbewegten Endpunkte anfangend sich bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Schnekenlinie in der Ebene. Man hat die Berechtigung des Namens archimedische Spirale in Abrede stellen wollen. Man hat behauptet, nicht Archimed, sondern dessen Freund Konon sei der Erfinder der Linie und der sich auf dieselben beziehenden Sätze gewesen. Nizze hat indessen zur Genüge gezeigt,[63] dass Letzteres wenigstens durchaus unrichtig und folglich Ersteres nicht hinlänglich begründet sei. Archimed war es, der jene Sätze an Konon zum Beweise schickte, wie es in der Sitte der damaligen Zeit gelegen zu haben scheint, und welcher nach dem Tode des Konon erst viele Jahre wartete, „ohne dass irgend Jemand mit einer dieser Aufgaben sich befasst hätte;“ alsdann erst setzte er die Beweise in der gegenwärtig besprochenen Schrift für den Dositheus auseinander. Gerade der moderne Leser, welcher gewöhnt ist, Curven von der Natur der Spirallinien nur mit Hülfe der Infinitesimalrechnung zu discutiren, während er noch in der Lehre von den Kegelschnitten z. B. häufiger von rein geometrischen Anschauungsbeweisen Gebrauch macht, grade dieser wird sich nicht genug über die Gewandtheit erstaunen können, welche Archimed in bewundrungswürdiger Anwendung ganz elementarer Mittel an den Tag legt. Einige wenige leicht abzuleitende Proportionen und Ungleichheiten — denn auf letztere kommt es begreiflich vielfach an bei Anwendung der Exhaustionsmethode — die Zerlegung des Raumes der Schneckenlinie in Ausschnitte, deren jeder kleiner als ein äusserer, grösser als ein innerer Kreisausschnitt ist, das ist der ganze wissenschaftliche Apparat, mittelst dessen die Quadratur der Schneckenlinie gefunden, die Berührungslinie an irgend einem Punkt derselben gezogen wird.

Ein Buch des Archimed kennen wir noch ausserdem. Es sind die Wahlsätze, wie die Ueberschrift der deutschen Uebersetzung lautet, welche nach der allein uns erhaltenen arabischen Bearbeitung angefertigt ist. Die Echtheit dieser Schrift kann nach den bestimmten

Aeusserungen des Arabers nicht wohl angezweifelt werden; keinenfalls begehen wir indessen ein Unrecht an Archimed, wenn wir über den höchst unbedeutenden Inhalt sofort hinweggehen. Wir möchten uns sonst den Eindruck der vorhergehenden Darstellung einigermassen verwischen, aus welcher sich uns Archimed, um mit einem in den letzten Jahren verstorbenen Fachgenossen zu reden,[64]) als das kundgiebt, was er in der Geschichte der Wissenschaften war: „das grösste mathematische Genie des Alterthums, der sich überall Bahn brach und als ein bauender König den Kärnern viel zu thun gab."

Soll damit die Würdigung des Archimed als Mathematiker abgeschlossen sein, so darf ich doch vielleicht noch einen Umstand erwähnen, der in doppelter Weise denkwürdig ist, theils zur Kennzeichnung der damaligen Gelehrtenwelt, theils zur Kenntniss einer gewissen Schalkhaftigkeit in dem Charakter des Archimed, welche aus dem, was wir früher über sein Leben berichteten, noch nicht hervorgeht. Ich bemerkte schon, dass es Sitte war, Sätze ohne ihren Beweis zu veröffentlichen, gewissermassen als Herausforderung für andere Mathematiker, den Beweis nachträglich zu finden. Nun scheint es auch damals nicht an Leuten gefehlt zu haben, welche Alles von Anderen Gefundene als willkommene Beute ansahen, ohne sich die Mühe zu geben, vielleicht ohne die Fähigkeit zu besitzen, die Richtigkeit zu bestätigen. Diesen Leuten gegenüber erlaubte sich Archimed nun einmal den Scherz, auch zwei falsche Sätze zu veröffentlichen, um, wie er geradezu sagt,[65]) wo er geraume Zeit später die Neckerei erzählt und die Falschheit jener Sätze selbst darthut, „um eben solche Leute, die da Alles zu finden behaupten und doch nie einen Beweis vorbringen, zu überführen, dass sie auch einmal etwas Unmögliches zu finden verheissen hätten."

Etwa 11 Jahre nach der Geburt des Archimed, im Jahre 276 oder 275 ward der zweite der drei grossen Zeitgenossen geboren: Eratosthenes,[66]) Sohn des Eglaos. Gebürtig von Kyrene, verbrachte er den grössten Theil seines Lebens in Alexandrien. Dort ward er erzogen von Kallimachos, dem gelehrten Vorsteher der grossen Bibliothek, sowie von einem anderen sonst unbekannten Philosophen Lysanias. Dann wandte er sich nach Athen, wo er der Schule der Platoniker sich näherte, so dass er selbst als Platoniker bezeichnet wird, und wo er wahrscheinlich auch zuerst tiefer in das Studium der Mathematik eindrang. Ptolemäus Euergetes (der dritte Ptolemäer, wie Suidas erzählt, welchem die Notizen für das Leben des Eratosthenes fast ausschliesslich zu verdanken sind), berief Eratosthenes wieder nach Alexandrien zurück als Nachfolger seines Lehrers Kallimachos in der Leitung der Bibliothek, und von da an scheint sein Verhältniss zu diesem Fürsten wie zur Fürstin Arsinoe ein besonders freundschaftliches geworden zu sein. Es ist folglich keinerlei Grund vorhanden anzu-

nehmen, Eratosthenes sei in späteren Jahren von der Bibliothek entfernt in's Elend gerathen, wenn auch andererseits die Nachrichten zu übereinstimmend sind um sie zu verwerfen, dass Eratosthenes augenleidend, vielleicht sogar erblindet, seinem Leben ungefähr 194 v. Chr. Geb. durch freiwilligen Hungertod ein Ende machte.

Die wissenschaftliche Bedeutung des Eratosthenes war eine mannigfaltige. Das Hauptgewicht scheint er selbst auf seine literarische und grammatische Thätigkeit gelegt zu haben, wenigstens gab er sich selbst den Beinamen des Philologen. Allein auch in den meisten anderen Disciplinen trat Eratosthenes als Schriftsteller auf, wie die erhaltenen Ueberschriften seiner Werke bezeugen, und sicherlich nicht mit Unrecht nannten ihn desshalb die Schüler des Museums Pentathlon, den Kämpfer in allen Fechtweisen, welche bei den Kampfspielen in Gebrauch waren. Um diese Vielseitigkeit zu kennzeichnen mag nur der Schrift „über das Gute und das Böse" neben der „Chronologie" und neben der „Erdmessung", in welcher zum ersten Male von einem Griechen der Versuch gemacht war, die Grösse der Erde zu bestimmen, des Werkes „über die Komödie" neben der „Geographie" gedacht werden, von welcher letzteren werthvolle Bruchstücke erhalten sind, aus denen ein so guter Gewährsmann in diesem Fache wie Alexander von Humboldt nachgewiesen hat,[67]) dass Eratosthenes nicht nur eine klare Beschreibung des Vorhandenen lieferte, sondern auch allgemeine Betrachtungen über das Werden und die Ursachen der Veränderungen mit Glück gewagt hat.

Hier muss diese kurze Andeutung genügen. Wir haben es mit Eratosthenes dem Mathematiker zu thun, und wollen, bevor wir diese Seite seiner Thätigkeit verfolgen, nur eines weiteren Beinamens noch gedenken, unter welchem Eratosthenes mitunter vorkommt. Man nannte ihn nämlich Beta. Die Bedeutung dieses Beinamens ist sehr zweifelhaft. Die Einen wollen, er habe ihn desshalb erhalten, weil er der zweite Vorsteher der grossen Bibliothek gewesen sei; allein dieses ist einestheils unrichtig, wenn, wie sonst angenommen wird, Zenodotus der erste, Kallimachos der zweite, Eratosthenes also erst der dritte Vorsteher war, anderntheils ist nirgends eine Spur davon zu finden, dass Zenodotus oder auch Kallimachos etwa Alpha, oder einer der Nachfolger des Eratosthenes Gamma oder Delta genannt worden wäre. Wahrscheinlicher ist die andere Ableitung, wonach das Wort Beta ihn als zweiten Plato charakterisiren sollte, oder allgemeiner als denjenigen, der überall den zweiten Rang wenigstens sich zu erobern wusste, wenn der erste Rang auch ehrfurchtsvoll den Altvordern eingeräumt werden muss. Endlich kommt noch in Betracht, dass Buchstaben als Beinamen, und zwar unter der seltsamsten Begründung auch anderweitig bei den Griechen um das Jahr 200 v. Chr. Geb. vorkommen. So wird ein Astronom Apollo-

nius, der zur Zeit des Königs Ptolemäus Philopator sich mit Untersuchungen über den Mond beschäftigte und dadurch sich weithin bekannt machte, als Epsilon bezeichnet; denn der Buchstabe Є, heist es, sehe der Gestalt des Mondes gleich.[68])

Von den mathematischen Schriften des Eratosthenes ist uns nur Weniges bekannt, das Wenige aber lässt um so mehr den Verlust der übrigen Theile bedauern. Er beschäftigte sich mit den beiden Richtungen mathematischer Forschung, welche vorhanden waren, mit Geometrie und Arithmetik. In ersterer Beziehung ist ein Brief des Eratosthenes an Ptolemäus Euergetes vorhanden, welchen Eutokius von Askalon in seinem Commentar zu den Büchern des Archimed über Kugel und Cylinder uns vollständig überliefert hat.[69]) In diesem Briefe ist die Entstehungssage der Aufgabe der Würfelverdoppelung des Breiteren erzählt, wie wir früher bei Gelegenheit dieser Aufgabe berichteten. Eratosthenes giebt aber auch eine ihm selbst eigenthümliche Auflösung mit Hülfe eines eigens dazu erfundenen Apparates. Das sogenannte Mesolabium, wie es um seines Zweckes willen hiess[70]) und welches einen grossen Ruf im Alterthume erlangte, bestand im Wesentlichen aus 3 einander gleichen rechtwinkligen Täfelchen von Holz, Elfenbein oder Metall, welche zwischen zwei mit je 3 Rinnen versehenen Linealen eingeklemmt in diesen Rinnen über einander verschoben werden konnten. War nun die Anfangslage $ABCD$, $CDEF$, $EFGH$, war AB die grössere, GM die kleinere Linie, zwischen welche die beiden mittleren Proportionalen einzuschalten waren, so musste man nur die Rechtecke in die verschobenen Lagen $ABCD$, $C_1 D_1 EF$, $E_1 F_1 GH$ bringen, welche die Stücke $D_1 K$, $E_1 L$ der in die Rechtecke eingezeichneten Diagonalen verdeckten und die so bestimmten Punkte K und L mit A und M in eine gerade Linie brachten; alsdann sind KC und LF die beiden gesuchten Proportionallinien.

Fig. 7.

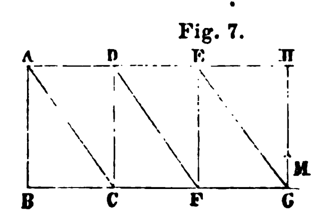
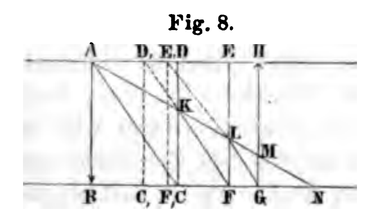


Fig. 8.



Eratosthenes schlug diese seine Erfindung so hoch an, dass er zum ewigen Gedächtnisse derselben ein Exemplar als Weihegeschenk in einem Tempel aufhängen liess und eine Inschrift in Versen darunter setzte, welche in gedrängtester Kürze die Gebrauchsanweisung enthielt.[71]) Die Inschrift selbst, ein aus 9 Distichen bestehendes Epigramm, ist auch durch manche Nebenbemerkung von Wichtigkeit, wie z. B. aus ihr entnommen wird, dass Menächmos den dreifachen Schnitt des Kegels

vollbrachte. Ob ein von Pappus an zwei Stellen [72]) erwähntes Werk des Eratosthenes „über Medietäten" sich gleichfalls auf die Würfelverdoppelung bezieht, ist ungewiss. Wäre dem so, so würde daselbst möglicherweise eine geometrische Lösung gelehrt worden sein, da Pappus das eine Mal bemerkt, diese Schrift stehe mit den linearen Oertern ihrer ganzen Voraussetzung nach im Zusammenhange.

Noch geringfügiger sind die Spuren eines weiteren Werkes des Eratosthenes, welche auf wenige unbedeutende Citate bei Theon von Smyrna sich beschränken.[73]) Wenn auch vielleicht der Schluss gerechtfertigt ist, in jenem Werke sei von den Proportionen und sonstigen arithmetischen Fragen die Rede gewesen, so schwebt doch die Behauptung ganz in der Luft, als habe sie den Titel Arithmetik geführt.

Vielleicht gehört eben dahin ein Bruchstück, welches bei Nikomachus von Gerasa und in dem Commentar des Jamblichus zu diesem Schriftsteller sich vorfindet; [74]) vielleicht aber auch ist dasselbe ein Theil einer besonderen Schrift, welche den Namen des Siebes führte. Das Sieb [75]) ist eine Methode um sämmtliche Primzahlen zu entdecken. Man schreibt, so lautet die Regel, alle ungraden Zahlen von der 3 an der Reihe nach auf. Man streicht nun jede dritte Zahl hinter der 3 durch, so sind die Vielfachen der 3 entfernt. Dann geht man zur nächsten Zahl 5 über und streicht jede fünfte Zahl hinter ihr durch, ohne Rücksicht darauf, ob sie schon durch einen früheren Strich vernichtet ist oder nicht; so sind die Vielfachen der 5 entfernt. Fährt man weiter so fort, indem man beim Abzählen und Durchstreichen die bereits durchstrichenen Zahlen den unberührten gleich achtet, und nur den Unterschied macht, dass man keine durchstrichene Zahl als Ausgangspunkt einer neuen Aussiebung benutzt, so bleiben schliesslich nur die Primzahlen übrig. Sämmtliche zusammengesetzte Zahlen dagegen sind vernichtet, und am Anfange fehlt auch noch die Primzahl 2, welche Jamblichus, weil sie grade sei, nicht unter die Primzahlen gerechnet wissen will, trotzdem Euclid sie fehlerhafter Weise dorthin verwiesen habe.[76])

Die Siebmethode des Eratosthenes ist grade keine Methode, zu deren Ersinnung ein übermässiger Scharfsinn gehörte. Trotz dessen glauben wir sie ihrer historischen Stellung wegen für einen ziemlich bedeutenden Fortschritt in der Zahlentheorie halten zu müssen. Man erwäge nur, wie die Sache der Zeitfolge nach liegt. Zuerst unterschied man Primzahlen von zusammengesetzten Zahlen und leitete wohl manche Eigenschaften der Letzteren aus den Ersteren ab. Der zweite Schritt war der, dass Euclid zeigte, wie die Anzahl der Primzahlen unendlich gross sei, wie es folglich nicht möglich sei, alle Primzahlen zu untersuchen. Jetzt erst gewinnt es als dritter Schritt Bedeutung, wenn Eratosthenes zeigt, wie man wenigstens im Stande sei, die Primzahlen,

so weit man in der Zahlenreihe gehen will, zu entdecken, und somit der Unausführbarkeit der Darstellung sämmtlicher Primzahlen eine von der Willkür des Rechners abhängende untere Grenze zu setzen. Ich meine an und für sich hätte die Entdeckung des Eratosthenes ebenso gut vor als nach Euclid gemacht werden können, aber vor Euclid wäre ihr wissenschaftlicher Werth geringfügiger gewesen. Damals hätte es können ein verunglückter Versuch sein, die genaue Anzahl der Primzahlen zu ermitteln. Jetzt dagegen, nach Euclid, konnte es nur eine Methode sein, bei deren Aussinnung man von Anfang an grade das beabsichtigte, was sie zu leisten im Stande ist. Darin liegt aber schon ein Zeugniss höherer Vollkommenheit, wenn Methoden zu bestimmten Zwecken gesucht und auch wirklich gefunden werden.

Der dritte schon genannte Mathematiker dieses Zeitalters, dessen Besprechung uns jetzt zu beschäftigen hat, war Apollonius von Pergä, wie er zur Unterscheidung von ausserordentlich vielen Gelehrten, die den Namen Apollonius führten, nach seinem Heimathsorte, einer Stadt in Pamphilien, bezeichnet zu werden pflegt.[77]) Ob er mit dem früher erwähnten Astronomen Apollonius, dem der Beiname Epsilon beigelegt wurde, identisch ist oder nicht, steht im Zweifel. Die Lebenszeit der Beiden ist allerdings übereinstimmend. Apollonius von Pergä wurde während der Regierung des Ptolemäus Euergetes (247—222) geboren und hatte seine Blüthezeit, wie jener Astronom, während der Regierung des Ptolemäus Philopator (222—205). Eine fernere Uebereinstimmung könnte man darin finden, dass auch von Apollonius von Pergä bekannt ist, dass er sich mit Astronomie beschäftigte. Wenigstens geht die Lesart der besten Ausgaben von dem Almageste des Ptolemäus dahin,[78]) dass Apollonius von Pergä über den Stillstand und die rückläufige Bewegung der Planeten schrieb und sie mit Hülfe der Epicyclen zu erklären suchte. Ein freilich nur negativer Gegengrund gegen die Identität läge darin, dass Ptolemäus von den Untersuchungen über den Mond Nichts sagt, welche doch gerade die vorzüglichste Leistung des Apollonius Epsilon gebildet haben müssen.

Von den Lebensverhältnissen des Apollonius von Pergä ist Nichts weiter bekannt, als dass er schon als Jüngling nach Alexandrien kam, wo er seine mathematische Bildung von den Nachfolgern des Euclides erhielt. Ein bestimmter Lehrer wird, so viel ich finden kann, bei den Alten nirgends genannt, so dass ich die vereinzelte Angabe eines modernen Schriftstellers,[79]) Apollonius sei Schüler des Archimed gewesen, als völlig willkürlich betrachten möchte. Gesichert ist dagegen ein zeitweiliger Aufenthalt in Pergamum, wo er einem gewissen Eudemus befreundet war, welchen er dann auch später mit Wachrufung der Erinnerung an jenes Zusammenleben sein Hauptwerk, die 8 Bücher *der Kegelschnitte* widmete.[80])

Es ist hier der Ort, die früher bei Seite geschobene Untersuchung über die Kenntnisse, welche die Alten von den Kegelschnitten besassen, einzuschalten. Erinnern wir uns, dass von zwei Mathematikern, Menächmus und Aristäus, den Zeitgenossen Plato's die Rede war, deren erster zur Würfelverdoppelung sich der Curven bediente, die beim Durchschnitte eines Kegels durch eine Ebene entstehen, während der zweite 5 Bücher über die Kegelschnitte schrieb; erinnern wir uns, dass wir Euclid und in höherem Grade Archimed als Schriftsteller über die Kegelschnitte kennen gelernt haben, so bildet das schon eine ganze Literatur des hochwichtigen Gegenstandes vor Apollonius von Pergä. Manche Geschichtsforscher sind sogar geneigt, ein noch höheres Alter dieser Untersuchungen anzunehmen. Um in dieser Beziehung einigermassen ins Klare zu kommen, ist es nothwendig, erstens die Entstehungsweise der drei verschiedenen Curven zu besprechen, welche man Kegelschnitte nennt, und zweitens die Haupteigenschaft sich zu vergegenwärtigen, welche in den Namen Parabel, Ellipse und Hyperbel angedeutet liegt.

Es sei ein grader Kegel gegeben, dessen Winkel, d. h. der Winkel an der Spitze des Axendreiecks $= \sigma$. Diesen Kegel schneide man durch eine zum Axendreiecke senkrechte Ebene, so wird die grade Linie, welche den Durchschnitt der beiden Ebenen bezeichnet, wenigstens mit der einen Seite des Axendreiecks einen Winkel δ bilden, welcher zu σ eine analoge Lage hat, wie die Wechselwinkel bei zwei durch eine Transversale geschnittenen Parallellinien. Nun kommt es auf die gegenseitige Grösse von σ und δ an. Ist $\delta > \sigma$, so entsteht auf der Kegeloberfläche eine Ellipse; ist $\delta = \sigma$, so entsteht eine Parabel; ist $\delta < \sigma$, so entsteht eine Hyperbel. So oft daher σ constant bleibt, kann durch Veränderung von δ auf jedem geraden Kegel jeder der drei Kegelschnitte gebildet werden. Man kann aber offenbar die Sache auch umdrehen. Man kann sagen δ solle constant bleiben, dann wird durch Veränderung von σ jeder beliebige Kegelschnitt erzeugt werden, jetzt natürlich auf der Oberfläche verschiedener Kegel. Zu einem derartig constanten Durchschnittswinkel δ war der rechte Winkel besonders geeignet, schon desshalb, weil alsdann auch die Grösse des Winkels σ leicht in Worten zu bestimmen war. War nämlich die Schnittebene senkrecht zur Seite des Axendreiecks, d. h. $\delta = 90^0$, so musste σ ein spitzer, ein rechter, endlich ein stumpfer Winkel sein, damit der Kegelschnitt eine Ellipse, eine Parabel, eine Hyperbel war, und daher rührten für diese drei Curven die älteren Namen derselben: Schnitt des spitzwinkligen, des rechtwinkligen, des stumpfwinkligen Kegels. Denn in der That lernte Aristäus die Kegelschnitte zuerst an verschiedenen Kegeln kennen, bis endlich Apollonius nachwies, dass sie sämmtlich auf jedem beliebigen geraden Kegel erzeugt werden können. Darüber kann nach der Angabe des Pappus[81]) nicht der mindeste Zweifel

sein. Waren aber mit der neuen Bildungsweise die alten Namen umgestossen, so musste Appollonius andere Namen dafür gebrauchen, und auch darüber kann nach derselben Stelle des Pappus kein Zweifel obwalten. Apollonius nämlich, heisst es dort dem Sinne nach, benannte die drei Curven nach Eigenschaften, die ihnen eigenthümlich bleiben, auch wenn sie sämmtlich auf der Oberfläche eines und desselben Kegels erzeugt sind. Die Namen sind die uns noch geläufigen der Ellipse, der Parabel, der Hyperbel, die Eigenschaften sind diejenigen, welche die algebraische Schreibweise durch die Symbole $y^2 < p\,x$, $y^2 = px$, $y^2 > p\,x$ darstellt.

Wenn wir nun zu keinerlei Misstrauen gegen die Wahrheit des von Pappus uns Mitgetheilten berechtigt sind, wenn wir also das bisher Gesagte als historisch gewiss betrachten, so ist eine ganz andere Frage die, ob man nicht vor Apollonius, ja vielleicht vor Aristäus jene Eigenschaften gekannt habe, auf welche grade die Namen Ellipse, Parabel, Hyperbel sich gründen? ob man nicht sogar die Curven schon kannte, ohne zu wissen, dass sie Kegelschnitte seien? Am leichtesten dürfte ein Chemiker in diese Möglichkeit sich hineindenken. In diesem Fache gehört es kaum mehr zu den Seltenheiten, dass Verbindungen durch ganz verschiedene chemische Processe aus verschiedenen Substanzen entstehen, dass sie desshalb mit verschiedenen Namen in die Wissenschaft eingeführt wurden, beispielsweise als Pimentöl und Zimmtblätteröl, und erst später als identisch anerkannt wurden. Aber auch der Mathematiker mag sich daran erinnern, dass man die sogenannte Cardiodide am Ende des 17. Jahrhunderts als Katakaustik kennen lernte, ihre epicycloidische Entstehung erst später entdeckte. Könnte es sich nicht ähnlich mit den Kegelschnitten als geometrische Oerter gewisser Punkte verhalten? Als wichtigstes Material zur Beantwortung dieser Frage hat man wohl eine grade dadurch berühmte Stelle des platonischen Dialogs Meno betrachtet. Allein die Auffassungen dieser Stelle gehen nach beiden Extremen auseinander. Die Einen entnehmen ihr unzweifelhaft,[82]) dass Plato die erwähnten Grundeigenschaften kannte, unterstützen aber leider diese Zweifellosigkeit keineswegs durch eine klare Uebersetzung, welche geeignet wäre, auch Andere zu überzeugen. Die Zweiten betrachten die Stelle als verderbt und unverständlich ohne Veränderung [83]) und schlagen desshalb gewisse Wortverbesserungen vor, welche vielleicht den Sprachforscher, aber sicherlich nicht den Mathematiker befriedigen können. Ein dritter Uebersetzer gewinnt endlich einen mathematisch ganz annehmbaren Sinn,[84]) jedoch wie es scheint mit einiger Kühnheit der sprachlichen Construction, und dürfte man sich auf seinen Wortlaut verlassen, so würde das Ergebniss grade die entgegengesetzte Meinung unterstützen, welcher das erste Extrem gegenüberstände, es würde alsdann durchaus

und unzweifelhaft nicht folgen, dass Plato jene Kenntniss besass. Bei solchem Widerstreit der Meinungen dürfte es gerathen sein, auf die Rede des Sokrates an Meno kein besonderes Gewicht zu legen und sich lieber nach anderweitigen Entscheidungsgründen für das zu fällende Urtheil umzusehen.

Dergleichen finden wir in einigen Sätzen des 6. und des 1. Buches der euclidischen Elemente. Der Inhalt von VI, 28 und 29 ist folgender. Es sei ein Flächenraum F gegeben, ferner eine grade Linie AB und ein Parallelogramm. Man verlangt nun ein dem gegebenen Parallelogramme gleichwinkliges Parallelogramm über der AB zu beschreiben, welches grösser oder kleiner als F wird sein können. Die weitere Bedingung, welche zur einschränkenden Bestimmung der jetzt noch auf unendlich viele Arten zu lösenden Aufgabe dient, besteht nun darin, dass im ersteren Falle der Ueberschuss über den Flächenraum F, im zweiten Falle die Ergänzung, deren das über AB construirte Parallelogramm bedarf, um so gross wie F zu werden, dem ursprünglich gegebenen Parallelogramme ähnlich sein soll, oder wie Euclid sich ausdrückt, dass im ersteren Falle der Flächeninhalt F an der Linie AB Etwas übrig lässt — *ἐλλείπει* — im zweiten Falle über AB hinausfällt — *ὑπερβάλλει*. Ferner ist I, 44 die Aufgabe gestellt: An eine gegebene Grade unter gegebenem Winkel ein Parallelogramm von gleichfalls gegebenem Flächeninhalte genau anzulegen — *παραβάλλειν*. Das Wichtige bei diesen Sätzen für die gegenwärtige Untersuchung ist offenbar die Anwendung der drei Zeitwörter, aus welchen die Namen Ellipse, Hyperbel, Parabel hervorgegangen sind, und zwar dürfen wir hinzufügen mit ganz analoger Bedeutung hervorgegangen sind. Verweilen wir darum noch einen Augenblick bei diesen bedeutsamen euclidischen Sätzen, um deren Gemeinschaft mit Kegelschnittseigenschaften uns zu vergegenwärtigen.[85]) Ich nehme dabei zur grösseren Einfachheit an, dass die Parallelogramme, von welchen die Rede ist, sämmtlich Rechtecke sein mögen; bei schiefwinkligen Parallelogrammen ist die Behandlung langwieriger, aber keineswegs wesentlich schwieriger.

Fig. 9.

Es sei $AB = p$ eine gegebene Länge senkrecht zu AQ aufgetragen; ist nun ferner AG gegeben, so giebt es immer einen einzigen Punkt C, so dass das Rechteck $ABDC$ einem bekannten Flächenraum, nämlich dem Quadrate über AG oder über CE gleich sei. Oder umgekehrt, wenn man auf der unendlichen Geraden AQ einen Punkt C wählt, mittelst dessen und der gegebenen $AB = p$ das Rechteck ABDC gebildet wird,

so existiren senkrecht über und unter C die beiden Punkte E, E^1, so dass das Quadrat über CE, beziehungsweise CE^1, jenem Rechtecke gleich ist. Werden verschiedene Punkte C gewählt, so nimmt auch E verschiedene Lagen an, bei welchen immer das an AB angelegte (παραβαλλόμενον) Rechteck dem Quadrate über CE genau gleich ist. Nennen wir $AC = x$, $CE = y$, so spricht sich die letzte Bemerkung symbolisch $y^2 = px$ aus, d. h. der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch das Wechseln der Lage von C erzeugt denken, ist eine Parabel.

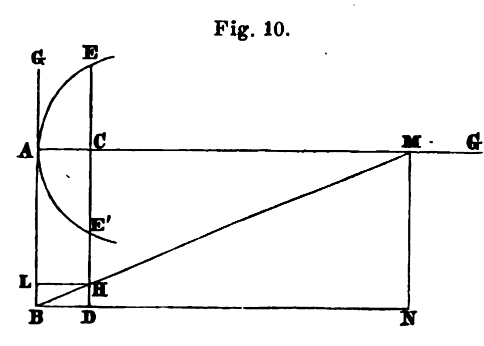


Fig. 10.

Ausser der $AB = p$ sei auf der dazu senkrechten AQ ein Stück $AM = a$ bekannt, so ist $AMNB$ ein durchaus gegebenes Rechteck, welchem jedes andere Rechteck ähnlich ist, dessen B gegenüberliegende Winkelspitze H auf der Diagonale BM des erstgenannten Rechteckes liegt. Ist nun wieder ein Flächenraum — das Quadrat über AG oder CE — gegeben, so wird es einen einzigen Punkt H der BM geben, mit dessen Hülfe das Rechteck $ACHL$ gleich jenem Flächenraume wird; oder mit andern Worten, welcher es möglich macht, dass das an AB angelegte Rechteck ausser dem Theile AL von AB, welchen es mit dem dem Quadrate von AG gleichen Flächenraume in Anspruch nimmt, noch ein Stückchen LB übriglässt (ἐλλείπει) über welchem das dem Rechtecke $AMNB$ ähnliche kleine Rechteck $LHDB$ steht. Denken wir uns auch hier die Aufgabe umgekehrt, so wird zu jedem Punkte C ein Punkt E senkrecht über ihm, ein Punkt E^1 senkrecht unter ihm gefunden werden können, so dass das Quadrat von CE dem jetzt bekannten Rechtecke $ACHL$, dessen Eckpunkt H auf der Diagonale BM des vollständig gegebenen Rechteckes $AMNB$ sich befindet, gleich ist. Auch hier ist der symbolische Ausdruck übersichtlicher. Ist nämlich $LB = \frac{p}{q}$, so muss $LH = \frac{a}{q}$ sein, und die Fläche $LHDB$ ist $= \frac{ap}{q^2}$; also mit Hülfe von $AC = x$, $CE = y$ werden wir schreiben: $y^2 = px - \frac{ap}{q^2}$, d. h. der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch das Wechseln der Lage von C erzeugt denken, ist eine Ellipse.

Entsprechen die grossen sowohl als die kleinen Buchstaben denen *der vorigen* Figur mit dem Unterschiede, dass $AM = a$ jetzt auf der

jenseitigen Verlängerung von AQ aufgetragen, im Uebrigen aber der Punkt H wieder so gewählt wird, dass er auf der verlängerten Diagonale des Rechteckes $ABNM$ aus den Seiten a und p liegt, dass also die Rechtecke $ABNM$ und $BDHL$ einander ähnlich sind und das Rechteck $ACHL$ denselben Flächenraum besitzt wie das Quadrat über AG oder CE, so ist dabei die Forderung erfüllt, dass das an AB angelegte Rechteck um den ihm zugewiesenen Flächenraum zu erlangen über AB hinausreicht (ὑπερβάλλει) und zwar mit einem dem gegebenen Rechtecke $ABNM$ ähnlichen Rechtecke.

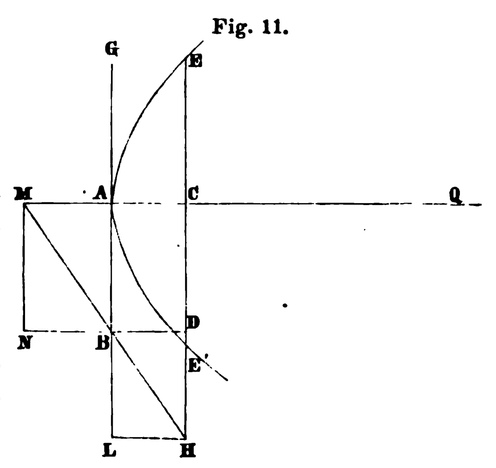


Fig. 11.

Es ist fast überflüssig, auf's Neue hervorzuheben, dass man auch diese Aufgabe so umzukehren im Stande ist, dass nicht mehr H, sondern E, beziehungsweise E^1, gesucht werden, und die Gleichung $y^2 = px + \frac{ap}{q^2}$ erfüllt wird. Der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch Wechseln der Lage von C erzeugt denken, ist eine Hyperbel.

Die Frage, um deren Beantwortung es sich handelt, hat sich durch diese Auseinandersetzung einigermassen verschoben. Sie geht jetzt dahin, ob Euclid, welcher in seinen Elementen nur die directen Aufgaben stellt und löst, auch von den umgekehrten Aufgaben, wie sie hier jedesmal in zweiter Linie ausgesprochen wurden und zu den Kegelschnitten führten, Kenntniss hatte? ob ferner die directen Aufgaben selbst euclidisch sind? wie viel etwa von diesem nunmehr näher präcisirten Gegenstande den älteren voreuclidischen Mathematikern bekannt war? Darüber giebt uns aber Proklus einigen Aufschluss.[86] In dem Commentar zu I, 44 der euclidischen Elemente bemerkt er, ganz ausdrücklich nach Schülern des Eudemus, die Construction von Parallelogrammen gegebener Art mit gegebenem Flächeninhalte an gegebenen Linien, sei es, dass sie genau angelegt werden sollen oder Etwas übrig lassen oder hinausreichen sollen, seien Erfindungen pythagorischer Muse. Erst die jüngeren Mathematiker, setzt er sogleich hinzu, haben die hier gebrauchten Wörter mit den Kegelschnitten in Verbindung gebracht, welche sie darnach benannten.

Aus dieser, wie mir scheint, historisch sehr wichtigen Stelle möchte ich die Folgerung ziehen, dass Eudemus und seine nächsten Schüler

von der Anwendung jener Wörter auf die Kegelschnitte Nichts wussten, dass diese erst bei den jüngeren Mathematikern vorkommt, welche daher ganz wohl in Uebereinstimmung mit Pappus [81]) die Mathematiker der alexandrinischen Schule, Apollonius und seine Zeitgenossen, sein können. Ich möchte ferner bezweifeln, ob die Alten, die pythagorische Muse, um mit Proklus zu reden, die Curven selbst kannten. Wären ihnen nämlich die drei Kegelschnitte als bei der Anlegung von Flächenräumen entstehende geometrische Oerter bekannt gewesen, so ist nicht zu vermuthen, dass Proklus die Erwähnung dieses interessanten Umstandes ganz und gar versäumt hätte. Er hätte alsdann wohl ungefähr gesagt: die jüngeren Mathematiker erkannten die Uebereinstimmung der hierbei auftretenden krummen Linien mit Kegelschnitten, und hätte sich nicht damit begnügt, nur zu erklären, dass die jüngeren Mathematiker die Wörter Parabel u. s. w. mit den Kegelschnitten in Verbindung brachten. Dazu kommt, dass die Alten und insbesondere Pythagoras, dem grade die Sätze über Anlegung von Flächenräumen zugeschrieben werden, diese Sätze so vortrefflich brauchen konnten, dass sie ihnen gar wohl als Endziel einer Untersuchung erscheinen konnten, nicht als Anfangspunkt einer solchen, wie man es doch auffassen müsste, wenn damals schon an jene elementaren Sätze die Betrachtung der aus deren Umkehrung folgenden geometrischen Oerter angeknüpft worden wäre. Es liegt nicht in meiner Absicht, die Streitfragen über die Persönlichkeit des Pythagoras hier so nebenbei zu erörtern; allein mag derselbe nun ein grosser Mann gewesen sein, dessen Lebensschicksale uns wahrheitsgetreu berichtet sind, mag er durchaus mythisch nur eine Zeitperiode darstellen, darüber ist doch Uebereinstimmung der gegnerischsten Schriftsteller, dass man um die Zeit des Alexanderzuges mit dem Namen des Pythagoras alle die Kenntnisse verknüpfte, welche von Aegypten und Kleinasien her eingeführt worden waren. Grade um jene Zeit schrieb aber Eudemus von Rhodus, und wenn uns also von diesem Gewährsmann ein Satz als pythagorisch genannt wird, so dürfen wir folgern, es sei eine von auswärts stammende Lehre, wir dürfen sie als aegyptisch bezeichnen, sofern ein geometrischer Satz in Frage steht, weil ja bei den Aegyptern nach griechischen Schriftstellern der Ursprung der Geometrie war. [87]) Sie wurde, so heisst es, dort erfunden, weil die jährliche Nilüberschwemmung immer neue Vermessungen, neue Vertheilung der Felder nöthig machte, deren Abgrenzungen verwischt und mit Schlamm bedeckt worden waren. Bei solchen Ländervermessungen und Abtheilungen von Grundstücken musste es offenbar damals wie jetzt nicht darauf allein ankommen, dass Jeder sein richtiges Maass zugetheilt erhielt, sondern auch darauf, dass eine gewisse Symmetrie herrschte, dass die Felder nicht in allen möglichen Polygonverschränkungen durcheinanderliefen, sondern regelmässig abgegrenzt waren, dass sie unter

einander Aehnlichkeit besassen, wenn auch der mathematische Begriff der Aehnlichkeit nicht genau zu erfüllen gewesen wäre. Nun lehren aber die drei Sätze, von denen hier die Rede ist, sogar jene mathematische Aehnlichkeit der Gestalt mit der Identität des Rauminhaltes zu verbinden, sei es, dass ein Feldstück an die Grenzlinie des Nachbarn genau sich anfügt, oder nur einen Theil derselben in Anspruch nimmt, oder darüber hinausfällt, und somit rechtfertigt sich meine obige Behauptung, dass für Pythagoras die drei Sätze in ihrer Verbindung gar wohl das Endziel einer geometrischen Untersuchung bilden konnten. Ein einziger Zweifel bleibt allenfalls noch daher stammend, dass in den euclidischen Elementen die drei Sätze nicht bei einander stehen, sondern der eine schon im ersten Buche, die beiden andern weit davon getrennt erst im sechsten Buche auftreten. Wir haben aber darin nur eine Folge der Systematisirung der Elementenschreiber, vielleicht Euclids, vielleicht schon seiner Vorgänger, zu erkennen. Sie brachten die Sätze, wie dieselben in ihr System passten und brauchten sich kein Gewissen daraus zu machen, wenn sie dabei auch den Zusammenhang zerrissen, in welchem die Sätze ursprünglich gefunden worden waren. Unsere drei Sätze gehören zu solchen gewaltsam getrennten; denn dass sie ursprünglich in engster Verbindung mit einander standen, beweist die Berufung auf die Schüler des Eudemus, welche oben aus Proklus angeführt worden ist.

Die Schlussfolgerung, zu welcher ich somit gelangt bin, geht dahin: Zweifellos kannten die Griechen seit Menächmus und Aristäus die Curven, welche auf dem Mantel eines graden Kegels bei der Durchschneidung desselben durch eine zur Kegelseite senkrechte Ebene gebildet werden, und welche je nach dem Winkel an der Spitze des Kegels drei verschiedenen Gattungen angehören. Nicht minder zweifellos kannten die Griechen zu derselben Zeit, auch wohl schon ein Jahrhundert früher, Sätze über Anlegung von Flächen, in deren Ausspruche die Stammzeitwörter von Parabel, Ellipse, Hyperbel vorkommen, und welche als Ausgangspunkt geometrischer Ortsuntersuchungen dienend zu den Kegelschnitten führen konnten. Sehr wenig wahrscheinlich ist es dagegen, dass jene Ortsuntersuchungen damals wirklich angestellt wurden und der erste Mathematiker, von dem wir mit Bestimmtheit wissen, dass er nicht bloss jene Untersuchung führte, sondern auch die Identität der entstehenden geometrischen Oerter mit den Kegelschnitten erwies, wobei jetzt unter Kegelschnitten die Schnitte eines und desselben Kegelmantels durch verschieden geneigte Ebenen zu verstehen sind, war Apollonius von Pergä.

Ich habe mich hier absichtlich sehr vorsichtig dahin ausgesprochen, Apollonius sei der erste Mathematiker, dem wir die Kenntniss dieses Zusammenhanges *mit Bestimmtheit* zusprechen dürfen. Es könnte

immerhin sein, dass Aehnliches auch schon im Besitze des Euclid gewesen wäre. Sagt uns doch Pappus,[88]) dass Apollonius in den 4 ersten Büchern der Kegelschnitte eigentlich nur eine verbesserte und vermehrte Ausgabe der euclidischen Kegelschnitte geliefert habe, und der Umstand, dass in den euclidischen Elementen keine Spuren solcher Untersuchungen auftreten, kann wohl nicht ernstlich entgegengehalten werden; in diesen steht auch Nichts von Allem, was den Gegenstand der Porismen und der Oerter auf der Oberfläche bildete. Aber einen Widerspruch glaube ich bei Pappus selbst zu finden, wenn er[3]) die anmassende Geringschätzung tadelt, mit welcher Apollonins sich in Bezug auf Euclid äussert, wenn er ihr die Liebenswürdigkeit des Euclid selbst gegenüberstellt, der seines Vorgängers Aristäus Anlage so genau als nur möglich einhielt, um die Verdienste dieses Mathematikers nicht zu verwischen. Denn wenn dieser Tadel gerecht war, dann konnte es mit der Anlehnung des Apollonius an Euclid nicht gar viel auf sich haben. Das hat auch das gesammte sonstige Alterthum mindestens dem Apollonius nicht zum Vorwurfe gemacht, den es durch den ehrenden Beinamen des grossen Mathematikers auszeichnete und zwar in Hinblick auf sein Werk über die Kegelschnitte, wie Eutokius uns nach einer Notiz des Geminus, eines Mathematikers, der um das Jahr 150 v. Chr. Geb. lebte, erzählt. Damit ist hinlänglich anerkannt, wie viel Apollonius zu den Entdeckungen des Euclid und zweier anderer Vorgänger, deren er selbst erwähnt, des Konon von Samos und des Nikoteles von Kirene hinzufügte. Machte Pappus dem Apollonius den Vorwurf zu getreuer Benutzung euclidischer Vorarbeiten, so sprach Heraclides, der früher erwähnte Biograph des Archimed, einen ähnlichen Tadel in Betreff seines Lieblingsschriftstellers aus; Apollonius, sagt er, habe nur den Archimed ausgeschrieben. Auch hierüber wissen wir natürlich Nichts Näheres, und nur die Thatsache ist zu erwähnen, dass Eutokius, welcher den Vorwurf des Heraclides uns aufbewahrt hat, denselben nicht als gerechtfertigt anerkennt. Andererseits ist aber auch nicht zu verschweigen, dass Archimed, der, wie wir schon früher sagten, ein Werk über Kegelschnitte schrieb und sich mehrfach auf dasselbe beruft, in diesen Berufungen Kenntniss von Sätzen an den Tag legt, welche auch in dem Werke des Apollonius vorkommen, in diesem also wahrscheinlich aus archimedischer Quelle stammen. Die Kenntniss der Namen Parabel und Ellipse dagegen, welche dem Archimed einigen Handschriften gemäss zukäme, ist wohl unbegründet.[89]) Der Name Parabel kommt ohnedies nur in der Ueberschrift der Abhandlung über die Quadratur der Parabel vor, und auch wo der Name Ellipse im fortlaufenden Texte der Abhandlung von den Konoiden und Sphäroiden 3 mal sich vorfindet, dürfte eine späte Einschiebung durch Abschreiber anzunehmen sein.

Wenn also jedenfalls die Selbstständigkeit des Apollonius in seinen

8 Büchern über Kegelschnitte bedeutend genug war, um ihm einen Ruhm zu sichern, wie er einem blossen Verbesserer niemals zugekommen wäre, so mag hier einiges über den Inhalt des Werkes folgen.[80]) Ich muss damit beginnen, eine frühere Bemerkung zu ergänzen. Ich habe angeführt, die Geometer vor Apollonius hätten die drei verschiedenen Kegelschnitte aus eben so vielen graden Kegeln sich verschafft, Apollonius dagegen sei es gelungen, die 3 Schnitte an demselben graden Kegel zu erhalten. Das ist nun allerdings wahr, allein was ich früher verschwieg, um nicht den schon hinlänglich complicirten Gedankengang noch weiter zu verwirren, Apollonius blieb nicht bei der Entstehungsweise aus einem graden Kegel. Er zeigte vielmehr, wie aus jedem Kegel überhaupt, d. h. aus einem Körper, dessen Oberfläche entsteht, indem eine grade Linie um eine Kreisperipherie gewälzt wird, während sie durch einen festen Drehungspunkt von beliebiger Lage geht, die 3 Kegelschnitte erhalten werden können unter der einzigen Voraussetzung, dass die Schnittebene des Kegels senkrecht zum Axendreieck sei. Er zeigt ferner, wie die Durchschnittslinie der Schnittebene mit dem Axendreieck ein Durchmesser des Kegelschnittes sei, d. h. alle Sehnen des Kegelschnittes halbire, welche unter sich parallel gezogen werden, und deren Lage durch diejenige Sehne bestimmt wird, die in dem Grundkreise des Kegels liegt. Der Punkt, in welchem der Durchmesser die Oberfläche des Kegels trifft, ist der Scheitel des Kegelschnittes. Durch diesen Scheitel wird nun senkrecht zum Axendreiecke, also in der Schnittebene und parallel zu dem durch den Durchmesser halbirten Sehnensysteme eine Gerade verzeichnet, deren Länge durch gewisse Methoden geometrisch bestimmt wird, und welche Linie $AB = p$ darstellt, an welche nach unserer früheren Auseinandersetzung ein gewisser Flächenraum in Gestalt eines Parallelogrammes angelegt werden soll. Diese Linie, welche man in moderner Sprache den Parameter des Kegelschnittes nennt, heisst bei Apollonius schlechtweg die Gerade — ὀρθή.[90]) Man sieht leicht ein, dass hiermit dieselben Linien gezogen waren, welche noch heute in den Methoden der analytischen Geometrie gezeichnet werden, wenn man den Kegelschnitt auf ein Coordinatensystem beziehen will, dessen Anfangspunkt auf dem Kegelschnitte selbst liegt, dessen Abscissenaxe ein Durchmesser des Kegelschnittes und dessen Ordinatenaxe die jenem Durchmesser conjugirte Berührungslinie im Coordinatenanfangspunkte ist. In der That operirt nun Apollonius mit diesen gegebenen Elementen in einer Weise, die sich nur dadurch von der Coordinatengeometrie unterscheidet, dass keine eigentliche Rechnung mit Formeln stattfindet, sondern eine Schlussweise, bei welcher Verknüpfungen von Proportionen und Vergleichungen von Flächenräumen eine Hauptrolle spielen, wie denn überhaupt darin das Ersatzmittel der Alten unserer modernen Algebra gegenüber bestand. Bei den Schnitten, welche nicht

der Seite des Kegels parallel laufen, wird ausser dem einen Schenkel des Axendreiecks auch der zweite entweder selbst oder in seiner Verlängerung durch den Schnitt getroffen, und so entsteht ein zweiter Scheitel der Curve bei der Ellipse, ein Scheitel der Gegencurve bei der Hyperbel. Die Entfernung der beiden Scheitel begrenzt die Länge des Durchmessers, in der Mitte zwischen beiden ist der Mittelpunkt der Curve, d. h. ein Punkt, in welchem alle durch ihn gezogenen Sehnen halbirt sind. Mit dem Mittelpunkte tritt auch der Begriff des dem ersten Durchmesser conjugirten Durchmessers auf, der eine gleichfalls begrenzte Länge besitzt, wenn auch bei der Hyperbel die Begrenzung nicht äusserlich sichtbar ist. Zwei zu einander senkrechte conjugirte Durchmesser werden Axen genannt. Apollonius knüpft daran ferner Betrachtungen über die Berührungslinie an irgend einem Punkt eines Kegelschnittes, und über die Vielheit von Paaren conjugirter Durchmesser, welche möglich sind.

In dem 2. Buche sind zunächst Eigenschaften der Asymptoten der Hyperbel auseinandergesetzt, d. h. der Linien, welche den Hyperbelarmen sich mehr und mehr nähern, ohne mit denselben zusammenzutreffen. Die geometrische Definition ist folgende: Man ziehe an einen Hyperbelpunkt eine Berührungslinie, trage auf derselben die Länge des ihr parallelen Durchmessers auf und verbinde den so gefundenen Punkt mit dem Mittelpunkte der Hyperbel gradlinig. Diese Gerade wird eine Asymptote sein. Aus den übrigen Sätzen des 2. Buches mag noch hervorgehoben werden, dass die Gerade, welche den Durchschnittspunkt zweier Berührungslinien mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, ein Durchmesser des Kegelschnittes ist, sowie der andere, dass in jedem Kegelschnitte nur ein einziges senkrechtes Axenpaar existirt.

In dem 3. Buche bilden zunächst die ersten 44 Sätze einen besonderen Abschnitt, dessen Charakter schon in dem ersten Satze sich dahin ausweist, dass hier Verhältnisse von Producten aus Tangenten und Secanten der Kegelschnitte auftreten. Jener erste Satz heisst etwa folgendermassen: Es seien M_1 und M_2 zwei Punkte eines Kegelschnittes, dessen Mittelpunkt in O liegt (bei der Parabel wäre O unendlich entfernt und somit die OM_1 mit OM_2 und mit der Axe der Parabel parallel); die Berührungslinien in beiden Punkten seien $M_1 T_1$ und $M_2 T_2$, indem T_1 den Durchschnitt der Berührungslinie an M_1 mit der OM_2 bezeichnet und eine ähnliche Definition für T_2 gilt; die $M_1 T_1$ und die $M_2 T_2$ schneiden einander in R. Alsdann sind die Dreiecke $M_1 T_2 R$ und $M_2 T_1 R$ an Fläche gleich. Die folgenden Sätze stützen sich auf diesen ersten, und lassen sich, in so vielfältiger Theilung sie auch im Originale ausgesprochen sind, in 2 Hauptsätze zusammenfassen. Der eine Satz, dass, wenn von einem Punkte 2 Secanten gezogen werden, das Product der Entfernungen des Ausgangspunktes nach den beiden

Schnittpunkten der einen Secante dividirt durch dasselbe Produkt in Bezug auf die zweite Secante einen Quotienten giebt, der sich nicht verändert, wenn man von irgend einem anderen Ausgangspunkte aus ein den ersten Secanten paralleles Secantenpaar construirt. Der zweite Satz, dass eine Secante, aus deren einem Punkte man zwei Berührungslinien zieht, durch diesen Ausgangspunkt, den Durchschnitt mit der Berührungssehne und die beiden Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitte eine harmonische Theilung darbietet.[91]) Noch einige auf Flächen bezügliche Wahrheiten schliessen sich ziemlich naturgemäss an, wie z. B. dass die Dreiecke, welche durch die Asymptoten und irgend eine Berührungslinie der Hyperbel gebildet werden, einen constanten Flächeninhalt haben, da derselbe Satz, anders ausgesprochen, dahin gehen würde, dass jede Berührungslinie der Hyperbel auf den Asymptoten Stücke von constantem Producte abschneide. Alsdann kommt der Verfasser in dem 45. Satze zu den Punkten, welche er σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς nennt, eine Bezeichnung, welche schwierig zu verdeutschen ist, da Punkte, die bei der Anlegung entstehen, kaum den Anspruch erheben können, einen deutlichen Begriff davon zu gewähren, welche Punkte gemeint sind; es sind aber die Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel, während der Brennpunkt der Parabel in dieser Zeitperiode noch nicht vorkommt. Die Definition der Brennpunkte bei Apollonius und die Eigenschaften, welche er besonders hervorhebt, sind folgende: ein Brennpunkt ist ein Punkt, der die grosse Axe in zwei Theile theilt, deren Rechtek $^1/_4$ der Figur gleich ist; unter Figur aber ist das Rechteck des Parameters mit der grossen Axe zu verstehen oder, was dem Werthe nach gleichbedeutend ist, das Quadrat der kleinen Axe. Wenn man das Stück einer Berührungslinie, welches zwischen den beiden Senkrechten zur grossen Axe in den Endpunkten derselben abgegrenzt ist, zum Durchmesser eines Kreises nimmt, so schneidet dieser Kreis die grosse Axe in den Brennpunkten. Die 4 Punkte, welche der Art bestimmt sind, nämlich 2 Brennpunkte und 2 Punkte einer Berührungslinie werden paarweise verbunden, je ein Punkt der Berührungslinie, mit dem einen, der andere mit dem anderen Brennpunkte. Diese Verbindungslinien nennt man conjugirte Linien. Sie schneiden einander auf der Normallinie, d. h. auf der Senkrechten, welche zur Berührungslinie im Berührungspunkte errichtet ist. Nun folgt der Satz über Winkelgleichheit, aus welchem die physikalische Eigenschaft hervorgeht, um derentwegen Keppler den Brennpunkten diesen ihren Namen gab; ferner der Satz, dass die Fusspunkte der Senkrechten von den Brennpunkten auf Berührungslinien sämmtlich in einer um die grosse Axe als Durchmesser beschriebenen Kreisperipherie liegen; endlich der Satz von der constanten Summe, beziehungsweise Differenz der Leitstrahlen. Alle diese Wahrheiten ent-

wickelt Apollonius der Reihe nach in dem 3. Buche, welches dadurch fast für sich allein den Charakter einer elementaren Kegelschnittslehre heutiger Zeit gewinnt.

Waren die drei ersten Bücher dem Eudemus gewidmet, so beginnt das 4. Buch mit einem Sendschreiben an Attalus, in welchem der Tod jenes Freundes beklagt, nebenbei aber auch der Inhalt des beigefügten Buches kurz dahin bezeichnet wird, es beschäftige sich mit der Frage, wie viele Punkte Kegelschnitte mit Kreisperipherien und mit andern Kegelschnitten gemein haben können ohne ganz und gar zusammenzufallen. Apollonius weiss dabei sehr wohl eine Berührung von einer Durchschneidung zu unterscheiden. Er hebt z. B. hervor, dass 2 Kegelschnitte 4 Durchschnittspunkte haben können, oder 2 Durchschnittspunkte und 1 Berührungspunkt, oder 2 Berührungspunkte; ferner, dass 2 Parabeln nur 1 Berührungspunkt haben können, ebenso Parabel und Hyperbel, wenn die Parabel die äussere Curve ist, ebenso Parabel und Ellipse, wenn die Ellipse die äussere Curve ist u. s. w. Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf aufmerksam zu machen, dass die Sätze dieses Buches für die Alten eine viel höhere Bedeutung hatten als für die neuere Mathematik. Waren es doch grade die Durchschnittspunkte der Curven, deren zum Zwecke der Würfelverdoppelung nothwendige Ermittelung die Curven selbst hatten untersuchen, theilweise sogar erfinden lassen. Die Methode, nach welcher Apollonius die Punkte bestimmt, welche zwei Raumgebilden gemeinsam sind, kommt auf eine apagogische Beweisführung hinaus, die sich grossentheils auf das Lemma des 3. Buches bezüglich der harmonischen Theilung stützt. So musste das 4. Buch der Form und dem ganzen Inhalt nach gleichmässige Verbreitung mit den 3 ersten Büchern gewinnen, deren Abschluss es gewissermassen für solche Mathematikstudirende bildete, welche von der damaligen höheren Mathematik grade das in sich aufnehmen wollten, was bis zur Lösung der delischen Aufgabe, diese mit inbegriffen, nothwendig war. Ja diese innere Zusammengehörigkeit engerer Art der 4 ersten Bücher bewährte sich geschichtlich auch dadurch, dass nur sie im griechischen Texte sich erhielten, während das 5., 6. und 7. Buch erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts aus einer arabischen Uebersetzung bekannt wurden, das 8. Buch sogar als ganz verloren wird betrachtet werden müssen.

Das 5. Buch lässt alle übrigen weit hinter sich. Es behandelt einen Gegenstand, mit welchem, wie es scheint, kein einziger griechischer Schriftsteller ausser Apollonius sich beschäftigte: die geometrische Lehre vom Grössten und Kleinsten.[92]) Es ist selbstverständlich, dass diese Lehre bei einem griechischen Mathematiker nicht das Methodische besitzen wird, welches sie bei ihrem erneuten Auftreten im *17. Jahrhundert* erhielt, dass sie auch nicht erschöpfend auftreten wird,

sondern dass nur eine bestimmte Gattung von Aufgaben zur Behandlung kommen wird; aber grade um so bewundernswürdiger ist es, wie Apollonius Einzelfälle unterscheidet, und durch Zusammenfassung dieser Einzelfälle das Gesammtgebiet seiner Untersuchung sich unterwirft; wie er die verschlungensten Beweise aufzufinden im Stande ist, Beweise so wenig natürlich, dass man kaum der Versuchung widerstehen kann, zu glauben, Apollonius müsse irgend eine andere Methode besessen haben, welche ihn die Sätze kennen lehrte, für die er nur nachträglich Beweise in der allgemein gebräuchlichen Form aufsuchte, wie es etwa zwei Jahrtausende später von Newton bekannt ist. Was Apollonius aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten kennt, das sind insbesondere die längsten und kürzesten Linien, welche aus irgend einem Punkte der Ebene nach einem Kegelschnitte gezogen werden können, Linien, welche Apollonius zuerst für die Fälle bestimmt, in denen der gegebene Punkt auf der Axe liegt und die Construction durch Abschnitte erfolgen kann, die selbst auf der Axe des Kegelschnittes auftreten. Dann folgt eine Reihe von Sätzen, die etwa mit dem modernen Begriffe der Subnormalen sich beschäftigen. Später weist Apollonius nach, dass diese selben grössten und kleinsten Linien Normallinien zum Kegelschnitte sind, dass also auch die Aufgabe im Früheren zur Lösung vorbereitet ist: von irgend einem Punkte einer Ebene Normalen zu einem in der Ebene befindlichen Kegelschnitte zu zeichnen. Er geht an die Aufgabe selbst heran und findet eine Construction, bei welcher von Durchschnitten mit Hyperbeln Gebrauch gemacht ist. Indem er nun sich bewusst wird, dass in der Zahl der Senkrechten, welche von einem Punkte aus nach einem Kegelschnitte gezogen werden können, keine Willkür herrscht, dass dieselbe vielmehr einestheils von der Art des Kegelschnittes, anderntheils von der Lage des gegebenen Ausgangspunktes abhängt, findet er, dass in dieser Beziehung gewisse Punkte eine Ausnahmestellung einnehmen. Diese Punkte, aus welchen man nach dem gegenüberliegenden Theile des Kegelschnittes nur eine Normale ziehen kann, sind die Krümmungsmittelpunkte, welche in ihrer stetigen Aufeinanderfolge die Evolute des Kegelschnittes bilden. Man darf daher sagen, Apollonius habe die Existenz dieser Curve geahnt, wenn es auch entschieden zu weit gegangen wäre, ihm die Bekanntschaft mit der Lehre von der Evolution zuzuschreiben.

Das 6. Buch handelt von gleichen und ähnlichen Kegelschnitten, sofern dieselben auf graden einander ähnlichen Kegeln auftreten; am Schlusse wird sogar die Aufgabe behandelt, durch einen gegebenen Kegel eine Schnittfläche zu legen, welche eine gleichfalls gegebene Ellipse erzeugen soll.

Zwischen dem 7. und dem 8. Buche scheint wieder ein engerer Zusammenhang stattgefunden zu haben, wie uns Apollonius selbst ver-

sichert. In seiner Zuschrift sagt er, das 7. Buch beschäftige sich mit Sätzen, welche zu Bestimmungen führen, das 8. Buch enthalte wirklich bestimmte Aufgaben über Kegelschnitte. Auch aus Pappus lässt eine solche Zusammengehörigkeit der beiden Bücher sich folgern. Derselbe theilt nämlich eine ziemlich beträchtliche Zahl von Lemmen zu den Kegelschnitten des Apollonius mit. Die Lemmen zu allen übrigen Büchern sind nach den Büchern gesondert; nur die Lemmen zum 7. und 8. Buche sind vereinigt.[93]) Auf diese Grundlage hin hat Halley eine Wiederherstellung des verlorenen 8. Buches versucht, welche indessen doch zu unsicher scheint, um näher besprochen zu werden. Wir begnügen uns mit der Bezeichnung einiger interessanten Theorien aus dem erhaltenen 7. Buche. In ihm finden sich die Sätze über complementäre Sehnen, welche conjugirten Durchmessern parallel laufen, in ihm die Sätze über die constante Summe der Quadrate conjugirter Durchmesser, in ihm die Entwicklung des Flächenraums jener Parallelogramme, deren zwei an einanderstossende Seiten die Hälften zweier conjugirter Durchmesser sind. Auch diese Sätze, welche gegenwärtig rechnend hergeleitet werden, erfordern bei Apollonius die Unterscheidung einer grossen Anzahl von Einzelfällen, bei welcher er wiederholt die Gewandtheit entwickelt, welche man schon in den frühern Büchern bewunderte. Dieses in Kürze der Inhalt des merkwürdigen Werkes, welcher wohl geeignet erscheint unsere Neugier anzuregen, inwieweit derselbe Mathematiker seinen erfinderischen Geist auch noch anderen Gebieten unserer Wissenschaft zuwandte.

Von solchen anderen Arbeiten wissen wir leider nur eben genug, um die Vielseitigkeit des Apollonius zu ahnen, aber bei Weitem nicht so viel, um den Werth der Untersuchungen abschätzen zu können, deren Titel nur uns überblieben sind und die Vermuthung zu einer wahrscheinlichen machen, dass Anwendungen der Kegelschnitte auf bestimmte geometrische Aufgaben in denselben behandelt wurden.[94]) Diese Vermuthung wird noch unterstützt durch die 2 Bücher vom Verhältnissschnitt,[95]) welche arabisch erhalten blieben. Edm. Bernard fand die freilich ziemlich verderbte Handschrift am Ende des 17. Jahrhunderts und begann dieselbe in's Lateinische zu übersetzen. Allein kaum hatte er den zehnten Theil der Aufgabe bewältigt, so stand er von dem Unternehmen ab, um es nicht wieder aufzunehmen. Halley fühlte sich gereizt an den Bernardschen Anfang anzuknüpfen, und so entstand die weitere lateinische Uebersetzung, ein um so merkwürdigeres Zeugniss von der Leistungsfähigkeit Halleys, als derselbe des Arabischen durchaus unkundig war, und das von Bernard hinterlassene Bruchstück ihm als Grammatik und Wörterbuch dienen musste. Diese Bücher vom Verhältnissschnitt, deren Autorschaft dem Apollonius mit aller Bestimmtheit zukommt, wenn auch vielleicht durch die mehrfache Ueberarbeitung in verschiedenen Sprachen Veränderungen

in Einzelheiten verschuldet worden sein mögen, zeigen nun ganz den erwähnten Charakter. Die in ihnen behandelte Aufgabe lautet folgendermassen: Es sind zwei unbegrenzte gerade Linien in derselben Ebene der Lage nach gegeben, welche entweder gegenseitig parallel sind oder einander schneiden, und in jeder derselben ist ein Punkt gegeben, auch ist ein Verhältniss und überdies ein Punkt ausserhalb der Linien gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, welche von den der Lage nach gegebenen Linien Stücke abschneidet, deren Verhältniss dem gegebenen gleich ist. Man erkennt leicht, dass diese Aufgabe durch einen grossen Reichthum an Fällen sich auszeichnet, je nach der Lage des Punktes ausserhalb der beiden Linien zu diesen Linien selbst und zu der durch die beiden auf den Linien gegebenen Punkten gezogenen Transversalen, und ferner je nach der Richtung, in welcher jene in Verhältniss tretende Stücke von den gegebenen Punkten aus liegen sollen. Das liegt wieder so recht in dem geometrischen Charakter des Apollonius! Er löst die Aufgabe mit Hülfe von Kegelschnitten.

Eine weitere Abhandlung des Apollonius wird von Eutokius erwähnt. In dem mehrfach benutzten Commentare zur Kreismessung des Archimed[96]) äussert sich derselbe: „So viel in meinen Kräften stand, habe ich nun die von Archimedes angegebenen Zahlen einigermassen erläutert. Wissenswerth ist aber noch, dass auch Apollonius von Pergä in seinem Okytoboon dasselbe durch andere Zahlen bewiesen hat, wodurch er sich der Sache noch mehr näherte.“ Schon das Wort ὠκυτόβοος ist philologisch durchaus räthselhaft, und der Inhalt der Schrift ist es kaum weniger. Dass mit Hülfe der in jener Abhandlung ausgesprochenen Lehren eine ziemlich genaue Kreismessung vollzogen werden konnte, jedenfalls eine genauere als sie in dem archimedischen Verhältnisse $\frac{22}{7}$ enthalten war, das freilich entnehmen wir dem Eutokius. Aber wie erfolgte diese Rechnung? Wir sind dafür ohne jeden Anhaltspunkt, es sei denn, dass man einen solchen in einer von Wöpcke herausgegebenen arabischen Handschrift zu finden berechtigt wäre.[97])

Diese Handschrift besteht in einer Uebersetzung eines griechischen Commentars zum 10. Buche der euclidischen Elemente, also zu jenem Buche, welches die Lehre von den Irrationalgrössen behandelt. Wer der Verfasser des Commentars ist, kann nicht mit voller Bestimmtheit angegeben werden, wenn gleich die Gründe bedeutend in's Gewicht fallen, die Wöpcke dafür beibringt, dass man es hier mit dem überliefertermassen wie diese Uebersetzung aus 2 Büchern bestehenden Commentare zum 10. Buch der Elemente von Vettius Valens, einem byzantinischen Astronomen aus dem 2. Jahrhunderte nach Chr. Geb. zu thun habe. Dieser Commentator spricht nun ausdrücklich von Arbeiten des Apollonius

über die Irrationalgrössen und legt ihnen einen hohen Werth bei. Die Irrationalgrössen, so sagt er etwa, fanden ihren Ursprung in der Schule des Pythagoras. Theätet vervollkommnete die Lehre, nach den Mittheilungen des Eudemus, indem er Irrationalgrössen unterschied, die durch Multiplication, durch Addition und durch Subtraction unter einander verbunden eine verwickeltere Form besassen. Euclid brachte vollends Ordnung in den Gegenstand durch genaue Bestimmung und Scheidung der verschiedenen Gattungen von Irrationalitäten. Apollonius aber war es, welcher neben den geordneten (*τεταγμένος* des Proklus) Irrationalgrössen die Existenz der ungeordneten (*ἄτακτος*) nachwies und durch genaue Methoden eine grosse Anzahl derselben herstellte. Nun folgt der eigentliche Commentar, aus welchem Wöpcke mit grossem Scharfsinn wiederherzustellen versucht hat, welches eigentlich jene bedeutende Erweiterung gewesen sein kann, die dem Apollonius zugeschrieben wird, mit anderen Worten, was man unter ungeordneten Irrationalgrössen zu verstehen habe.

Die Sache scheint sich etwa so zu gestalten. Die Irrationalzahlen sind unterschieden je nach dem Wurzelexponenten, der in ihnen vorkommt, und Euclid beschränkte sich wie die meisten Alten auf die Betrachtung der Quadratwurzeln, also auf Irrationalitäten mit dem Wurzelexponenten 2. Die einfache Quadratwurzel galt, wie früher bemerkt wurde, nicht als irrational; sie war eben die Seite eines rationalen Quadrates, und als solche wenigstens in der Potenz rational, wie man sich ausdrückte. Nahm man nun 2 Zahlen, von denen zum Mindesten eine nur in der Potenz rational war, so konnte man aus denselben Medialen, Binomialen und Apotomen bilden, welche alsdann als wirkliche Irrationalgrössen angesehen werden. Die Mediale wird nur als eine einzige betrachtet. Sie entsteht, indem man die beiden gegebenen Zahlen multiplicirt und aus ihrem Producte die Wurzel zieht, z. B. $\sqrt{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$. Die Binomialen entstehen durch Addition. Bei ihnen sind 6 Arten zu unterscheiden. Berücksichtigt man, dass von den beiden Theilen der Binomialen der eine grösser sein wird, als der andere, so sondern sich leicht 3 Arten ab, je nachdem die Irrationalität des ganzen Ausdruckes dadurch erzeugt wird, dass nur der grössere Theil in der Potenz rational ist, oder nur der kleinere, oder beide. Jeder dieser 3 Fälle kann nun wieder in 2 neue Fälle getrennt werden, je nach den Eigenschaften der Differenz der Quadrate der beiden die Binomiale bildenden Theile, ob dieselbe eine Quadratzahl ist oder nicht. So erhält man in modernen Zeichen folgende 6 Binomialen: $\sqrt{a^2+d^2}+a$ und $\sqrt{a^2+d}+a$, $a+\sqrt{a^2-d^2}$ und $a+\sqrt{a^2-d}$, endlich $\sqrt{a}+\sqrt{a-d^2}$ und $\sqrt{a}+\sqrt{a-d}$, wo voraussichtlich keine der angedeuteten Quadratwurzeln ausgezogen werden kann und auch d keine

Quadratzahl ist. Andere Fälle sind nicht aufzufinden, so lange kein neuer Eintheilungsgrund benutzt wird. Wie die Binomiale durch Addition, so entsteht die Apotome durch Subtraction. Wenn daher nur das Pluszeichen zwischen den beiden Theilen durch das Minuszeichen ersetzt wird, so erscheinen augenblicklich die 6 Arten von Apotomen, von denen Euclid handelt. Darnach dürfte der Sinn der oben angeführten historischen Bemerkung des alten Commentators folgender sein: Die unmittelbare Schule des Pythagoras lehrte den Begriff der Irrationalität überhaupt kennen;[5]) Theätet zeigte, dass es Medialen, Binomialen und Apotomen gebe; Euclid ging wieder einen Schritt weiter: er machte die eben auseinandergesetzte Unterscheidung, d. h. er ordnete die Irrationalgrössen und fand bei der Ordnung 13 Gattungen, nämlich eine Mediale, 6 Binomialen, 6 Apotomen. Ungeordnet dagegen verbleiben erstens sämmtliche Irrationalgrössen, welche aus mehr als 2 Theilen zusammengesetzt waren und zweitens alle diejenigen, ohne Rücksicht auf die Anzahl der Theile, welche einen höheren Wurzelexponenten als die 2 besassen.

Nach beiden Richtungen war somit dem Apollonius eine Erweiterung möglich. Schon die Erweiterung von $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ etwa in $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots$ muss man als keine so unbedeutende Sache ansehen. In moderner Schreibweise freilich bietet sich dieselbe von selbst dar. Nicht so für die griechischen Schriftsteller, welche, wie man nie ausser Augen lassen darf, nicht von Quadratwurzeln sprachen, sondern von der Seite eines Quadrates von gegebenem Flächeninhalte und rückwärts von der Fläche des Quadrates, welches eine gegebene Linie über sich erzeugt, oder um den griechischen Ausdruck wörtlicher wiederzugeben: von der Fläche, welche eine Linie kann. Nun kann $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots$ als Fläche das Quadrat eines Polynomiums, dessen Auffindung schon eine höhere Aufgabe ist, als die Quadrirung eines nur zweitheiligen Ausdruckes. Noch unverhältnissmässig verwickelter erscheint von solchem Gesichtspunkte die Betrachtung von Irrationalgrössen mit höherem Wurzelexponente. Sie musste bis auf die Cubikwurzel und noch eine bestimmte Gattung von Irrationalgrössen, deren alsbald gedacht werden soll, nahezu als der griechischen Auffassung unzugänglich bezeichnet werden. Die Cubikwurzel, d. h. die Seite eines Würfels von gegebenem Körperinhalte, welcher zu irgend einem anderen in gegebenem Verhältnisse steht, das war, wenn auch über die Elemente hinausgehend, noch immer ein geometrisch Fassliches; das bildete, wie wir sahen, den Kern der delischen Aufgabe. Und erinnern wir uns nun an die Art zurück, wie Hippokrates von Chios jenes Problem auffasste, nämlich als Aufgabe zwischen zwei gegebenen Grössen zwei mittlere geometrische Proportionalen zu suchen, so werden wir auch um die anderen Irrationalgrössen nicht lange verlegen sein, welche geometrisch

[illegible] werden. Wir müssen nur die [illegible] Aufgabe [illegible] werden lassen, dass man zwischen zwei gegebenen Grössen k_1, k_2 nicht mehr nur eine, sondern [illegible] 2 mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten habe. [illegible] wir wieder moderne Zeichen um [illegible] zu Kürze zu kommen. Nennen wir die zwischen die beiden Grössen k_1, k_2 [illegible] mittleren geometrischen Proportionalen $l_1, l_2, \ldots l_n$ eingeschaltet, so sei also $k_1 : l_1 = l_1 : l_2 = \ldots = l_n : k_2$. Nun ist zunächst $l_1^2 = k_1 \cdot l_2$; ferner $l_2^2 = l_1 \cdot l_3$, also $l_2^4 = l_1^2 \cdot l_3^2 = k_1 \cdot l_2 \cdot l_3^2$ und $l_2^3 = k_1 \cdot l_3^2$, ebenso folgt weiter $l_3^4 = k_1 \cdot l_4^3$ und allgemein:

$$1)\ l_\alpha^{\alpha+1} = k_1 \cdot l_{\alpha+1}^{\alpha}$$

Andererseits ist $l_n^2 = k_2 \cdot l_{n-1}$; ferner $l_{n-1}^2 = l_n \cdot l_{n-2}$, also $l_{n-1}^4 = l_n^2 \cdot l_{n-2}^2 = k_2 \cdot l_{n-1} \cdot l_{n-2}^2$ und $l_{n-1}^3 = k_2 \cdot l_{n-2}^2$. Weiter $l_{n-2}^4 = k_2 \cdot l_{n-3}^3$ und allgemein:

$$2)\ l_{\alpha+1}^{n-\alpha+1} = k_2\, l_\alpha^{n-\alpha}$$

Die Elimination von $l_{\alpha+1}$ zwischen den Gleichungen 1 und 2 liefert aber das Resultat $l_\alpha = \sqrt[n+1]{k_1^{n+1-\alpha} \cdot k_2^{\alpha}}$, also in der That eine Grösse von höherer Irrationalität, wenn man so sagen darf, als die ihr zur Grundlage dienende einfache Mediale. Wöpcke vermuthet nun, Apollonius möge sich auch mit diesen Irrationalgrössen beschäftigt haben. Näheres wissen wir indessen nicht darüber und ebensowenig ob, was allerdings nicht zu den Unmöglichkeiten gehört, Apollonius zur Untersuchung der Irrationalgrössen dadurch gelangte, dass er das Verhältniss des Kreises zum Durchmesser zu ermitteln beabsichtigte. Unter dieser Voraussetzung stände freilich die Untersuchung der ungeordneten Irrationalgrössen mit dem früher genannten Okytoboon in Verbindung, möchte vielleicht sogar einen Theil desselben ausmachen.

Die negative Thatsache lässt sich dagegen mit aller Bestimmtheit aussprechen, dass wir keinen Theil des Okytoboon in einem anderen Fragmente zu erkennen haben, welches Pappus aufbewahrt hat, und welches der englische Mathematiker Wallis am Ende des 17. Jahrhunderts in griechischer Sprache veröffentlichte.[98]) Der im Früheren schon von uns angekündigte Inhalt dieses Bruchstückes ist eine eigenthümliche Multiplicationsmethode, mittelst derer sämmtliche Zahlen mit einander vervielfacht werden, welche durch die Buchstaben zweier Verse dargestellt werden, indem bekanntlich jeder Buchstabe des griechischen Alphabets neben seiner Buchstabenbedeutung auch zifferartig verwerthet wurde und je eine bestimmte Zahl bezeichnete. Dem Bruchstücke voraus muss die Beschreibung einer anderen wahrscheinlich umständlicheren aber landläufigeren Multiplicationsmethode gegangen sein. [illegible]mann hat diese Folgerung mit Recht daraus gezogen, dass Pappus [illegible]lusse der Multiplication der Buchstaben des ersten Verses aus-

drücklich sagt, das Gesammtresultat sei übereinstimmend mit der Angabe des Apollonius nach der am Anfange des Buches vorgeschriebenen Methode. Ein eigenthümlicher Zufall hat es somit veranlasst, dass, während die Grundzüge des Archimed ganz verloren gingen, auch von einem ähnlichen Werke des Apollonius nur der Theil erhalten ist, der sich auf damals weniger gewöhnliche Rechenmethoden bezieht.

Aus dem Vorhandenen können wir erstens entnehmen, dass Apollonius in ähnlicher Weise wie Archimed die Zahlen in Gruppen zu theilen wusste, welche eine leichtere Aussprache und zugleich eine grössere Uebersichtlichkeit gewährten, als sie ohne Gruppirung zu erreichen gewesen wäre. Es ist derselbe Gedanke, der beiden Schriftstellern gleichmässig vorschwebte, ja es ist eigentlich dieselbe Gruppirung, welche wir von beiden gelehrt finden. Denn wenn auch Archimed, wie früher gesagt wurde, Octaden bildete, während Apollonius sich mit Tetraden begnügte, so ist doch die Gleichheit des Princips dadurch hergestellt, dass zwei Tetraden des Apollonius neben einander geschrieben nach moderner Bezeichnung der Zahlen einer Octade des Archimed gleichkommen, dass Archimed also nur eine noch höhere Einheit annahm als Apollonius, aber eine Einheit, welche aus der des Apollonius sich unmittelbar entnehmen liess, ebenso wie der entgegengesetzte Weg denkbar ist, ebenso wie beide Gruppirungen selbstständig aus dem Sprachgebrauche hervorgehen konnten, welcher Myrias, d. h. 10000 als letztes unzusammengesetzes Zahlwort kennt. Dies mag ausdrücklich betont werden, damit nicht die Meinung entstehe, als ob fast nothwendigerweise einer der beiden grossen Mathematiker seine Gruppirung in Abhängigkeit von dem anderen erfunden haben müsse. Die Namen, welche Apollonius für seine Tetraden benutzt, sind für die erste Tetrade, welche also von 1 bis 9999 sich erstreckt, der Name der Einheiten; dann folgt die Tetrade der Myriaden; auf diese die der doppelten Myriaden, der dreifachen, vierfachen u. s. w. Myriaden.

Neben und nach diesem ersten Inhaltstheile umfasst das Bruchstück bei Pappus zweitens die Vorschrift, dass die Multiplication von irgend welchen Zahlen auf die Multiplication ihrer Pythmenes zurückzuführen sei, ein Wort, welches etwa als Wurzelzahl übersetzt werden kann. Eine genauere Darstellung eines der Beispiele mag zeigen, wie die Zurückführung gemeint ist. Seien etwa die Zahlen 50, 50, 50, 40, 40, 30 zu multipliciren, so sind deren Wurzelzahlen 5, 5, 5, 4, 4, 3, aus welchen als Product 6000 Einheiten entstehen. Da nun die Menge der Zehner 6 ist, und diese Zahl durch die 4 getheilt 2 zum Rest lässt, so ist das Product der Zehner für sich 100 einfache Myriaden. Nun erhält man das Product der von Anfang gegebenen Zahlen durch Multiplication des Products der Zehner in das Product der Wurzelzahlen. Jene 100 Myriaden mal 6000 Einheiten machen 60 zweifache

Myriaden, und so ist das Product von 50.50.50.40.40.30 gleich 60 zweifachen Myriaden. Hier sind freilich nur Multiplicationen von Zehnern in Zehner, wie wir nach heutigem Sprachgebrauche sagen, vorhanden. Allein es findet sich auch ein weiteres Beispiel von Vervielfachung von Zehnern in Hunderte, und so ist nicht abzusehen, warum dieselbe Methode nicht auch allgemein von Apollonius sollte angewandt worden sein. Ueber die Tragweite der Methode aber kann man nur dann eine richtige Anschauung gewinnen, wenn man vergisst, wie leicht es der modernen Ziffernschrift ist, 3 etwa als die Wurzelzahl von 300 zu erkennen, wenn man vielmehr erwägt, dass schon ein gewisses Nachdenken erforderlich ist um von τ, dem Buchstaben mit dem Werthe 300, zu γ, dem Buchstaben mit dem Werthe 3, zu gelangen, um zugleich in Erinnerung zu behalten, dass dabei die Zahl um 2 Ordnungen erniedrigt worden ist. Bei dieser Erwägung erst lernt man die Bedeutung der Abkürzungsmethode des Apollonius schätzen, begreift man, wie sie vielleicht Schuleigenthum einzelner Mathematiker geworden ist, aber nicht in das allgemeine Volksbewusstsein einzudringen sich im Stande erwies. Dass aber Letzteres sich in der That so verhält, geht theils daraus hervor, dass Pappus die Methode offenbar in der Weise darstellt, wie man Etwas wenig Bekanntes, aber den Männern der Wissenschaft Empfehlenswerthes auseinandersetzt, theils auch daraus, dass, wie schon früher erwähnt wurde, Eutokius von Askalon im 6. Jahrhunderte sich einer ganz andern Methode bedient zu haben scheint, bei welcher von einer Zurückführung grösserer Zahlen auf kleinere nicht die Rede war.

Und somit hätte ich die Darstellung der Fortschritte beendigt, welche, so weit die Spuren zu uns gelangt sind, die Zeit vom Jahre 300 etwa bis 200 vor Chr. Geb. den mathematischen Wissenschaften hinzufügte. Der Leser wird nicht viel durchaus Neues entdecken, was nicht auch anderwärts schon geboten wäre: das bringt der Gegenstand selbst mit sich. Allein Nichts desto weniger hielt ich die Veröffentlichung einer solchen Skizze eines ein Jahrhundert umfassenden Culturbildes für gerechtfertigt, nachdem seit den letzten zusammenhängenden Darstellungen mathematischer Geschichtsschreiber so manche neue Thatsache entdeckt worden, welche hier und dort zerstreut mitgetheilt ist, ohne zu allgemeiner Kenntniss zu gelangen. Je bedeutender aber die Männer, je interessanter eine Zeit, um so wichtiger ist es für gerechte Würdigung derselben, dass ihre Leistungen uns übersichtlich vor Augen liegen, und gerade dieses habe ich in vorliegender Abhandlung angestrebt.

Anmerkungen.

1. Vergl. Fabricius, Bibliotheca Graeca edit. Harles. Hamburg 1795. Vol. IV, pag. 44—82 De Euclide.

2. Valerius Maximus VIII, 12: Platonis quoque eruditissimum pectus haec cogitatio attigit: qui conductores sacrae arcis de modo et forma ejus secum sermonem conferre conatos ad Euclidem Geometram ire jussit scientiae ejus cedens, imo professioni.

3. Pappus, Mathematicae Collectiones ed. Commandinus. Bononiae 1660, lib. VII, prooemium pag. 251: Euclides secutus Aristaeum scriptorem luculentum in iis, quae Conicis tradiderat, neque antevertens neque volens eorum tractationem destruere, cum mitissimus esset et benignus erga omnes, praesertim eos, qui mathematicas disciplinas aliqua ex parte augere et amplificare possent, ut par est, et nullo modo infensus, sed accuratus, non arrogans etc. [Andere Ausgaben des Pappus, welche ich aber nicht zur Hand habe, sind Pisauri 1588 und ebenda 1602 erschienen. In letzteren soll die citirte Stelle auf fol. 164 verso sich befinden.]

4. Die Elemente des Euclid sind in allen Sprachen so vielfach herausgegeben, dass es überflüssig erscheint, eine besondere Ausgabe hervorzuheben. Wohl jedem Leser dürfte irgend eine Uebersetzung zu Gebote stehen.

5. Den zahlentheoretischen Ursprung des pythagoräischen Lehrsatzes und die daraus folgende Lehre von den Irrationalgrössen habe ich in meinen Mathematischen Beiträgen zum Kulturleben der Völker, Halle 1863, S. 105 flgg. nachzuweisen versucht, eine Darstellung, welche seitdem noch von keiner Seite Widerspruch erfahren hat.

6. Nesselmann, die Algebra der Griechen. S. 183.

7. Vergl. meine Mathem. Beiträge z. Kulturl. S. 108 und ebenda Anmerk. 204.

8. Archimedes von Syrakus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet von Ernst Nizze. Stralsund 1824. S. 42—43. (Einleitung zu den Büchern von der Kugel und dem Cylinder).

9. Proclus Diadochus in primum Euclidis elementorum librum Commentaria (ed. Barocius Patavii 1560) Lib. II, c. VII, p. 42. Elementa igitur nominantur illa quidem quorum consideratio ad aliorum pertransit scientiam et ex quibus dubiorum, quae in ipsis contingunt, succurrit nobis solutio.

10. Proclus, Lib. II, c. IV, p. 38. Vergl. auch meine Mathem. Beiträge z. Kulturl. S. 85.

11. Wiewohl es unmöglich scheint die Stelle Proclus, Lib. II, c. IV, p. 39 in Widerspruch mit dem im Texte enthaltenen Ausspruche zu deuten, möge sie dem unparteiischen Urtheile des Lesers hier unterworfen werden: Non multo autem his iunior Euclides est, qui elementa collegit et multa quidem construxit eorum, quae ab Eudoxo, multa vero perfecit eorum, quae a Theaeteto reperta fuerant. Ea praeterea, quae a prioribus molliore brachio ostensa fuerant ad eas redegit demonstrationes, quae nec coargui, nec convinci possunt.

12. Von modernen Schriftstellern, welche sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben, nenne ich L. F. Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik. Ulm 1860 (18 S. in 4°) und Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement. Paris 1865—66 (Vergl. besonders T. I, Chap. 10: De l'analyse et de la synthèse chez les anciens.)

13. Ehrenfr. Walther v. Tschirnhaus, der bekannte Zeitgenosse Leibnitzens, war auffallender Weise entgegengesetzter Meinung. In seiner unter dem Titel

Medicina mentis et corporis [illegible] editio nova. Lipsiae 1695 pag. 60: [illegible] minimum [illegible] aliquem.

14. Petrus Ramus, Scholae mathematicae (edit. Francof. 1627) pag. 197: Neque enim natura initio [illegible] Itaque [illegible] Euclides definitionem trianguli, triangulorum, multanguli, multangulorum [illegible]

15. Les trois livres de Porismes d'Euclide rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions par M. Chasles. Paris 1860 (324 pag.).

16. Bei dieser Auseinandersetzung benutzte ich theilweise eigene frühere Veröffentlichungen über denselben Gegenstand: den Aufsatz „Ueber die Porismen des Euclid und deren Divinatoren" Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. II. 17—27 und die Besprechung der Chasles'schen Restitution (Zeitschr. f. Math. u. Phys. VI. Literaturzeitung S. 3—7).

17. Der ganze Absatz „Man nennt in der Geometrie . . . . Bedingung erfüllt" ist wörtlich aus Chasles, Geschichte der Geometrie (deutsch von Sohncke) S. 2 Anmerkung 2 entnommen, da ich keine Möglichkeit sah, die Sache klarer auszudrücken. Der Darstellung von Chasles liegt übrigens selbst Montucla, Histoire des mathématiques (2. édition) I, 171 zu Grunde.

18. Ueber die delische Aufgabe vergl. Reimer, Historia problematis de cubi duplicatione. Göttingen 1798. Biering, Historia problematis cubi duplicandi. Hauniae 1844. Blass, De Platone mathematico. Bonn 1861 pag. 23 seqq.

19. Reimer in seiner Uebersetzung von Bossut, Histoire générale des mathématiques (Hamburg 1804) sagt zwar in den Zusätzen zum ersten Kapitel (Bd. I S. 52), nachdem er die Ausziehung der Quadratwurzel nach Theon von Alexandrien gelehrt: „Ein analoges methodisches Verfahren bei Ausziehung der Cubikwurzel war ohne Zweifel ebenfalls den Alten bekannt." Indessen entbehrt dieser Ausspruch wie jeder Begründung, so auch wirklich jeglichen Anhaltes. Darnach ist die auf Reimer sich stützende Behauptung Biering's (l. c. pag. 4) zu beurtheilen: Ad radicem quadratam extrahendam veteres methodum quandam cum ea, qua utuntur recentiores, fere cosentaneam adhibebant; et videtur similis ratio radicis cubicae extrahendae iis non incognita fuisse; sed eam ob difficultatem calculi in usu non fuisse videmus.

20. Vergl. Biering l. c. pag. 10.

21. Vergl. Reimer l. c. pag. 45, ferner Blass l. c. pag. 29.

22. *Εἰς ὀργανικὰς καὶ μηχανικὰς κατασκευὰς τὸν τοῦ στερεοῦ διπλασιασμὸν ἀπάγειν ἐπιχειροῦντας* (Plutarch, Quaest. Conv. VIII, 2).

23. Vergl. Proclus, Lib. III ad Euclidis propos. 9, pag. 155, wo der Erfinder Hippias genannt ist und Pappus, Lib. IV, propos. 25 flgg., pag. 88, wo die Anwendung der Quadratrix des Dinostratus zur Quadrirung der Kreisfläche gelehrt wird. Dass im Texte nur die einschlagenden Arbeiten vor Euclid berücksichtigt wurden, die spätere Conchoide des Nikomedes dagegen etc. unerwähnt blieb, bedarf wohl keiner Entschuldigung.

24. Pappus, Lib. VII prooemium, pag. 245. Vergl. auch die Uebersetzung der

in der lateinischen Uebertragung des Commandinus überaus verderbten Stelle bei Chasles l. c. (Anmerkung 15) pag. 16: Étant données quatre droites se coupant deux à deux, si trois des points d'intersection situés sur l'une d'elles, ou deux seulement dans le cas du parallélisme sont donnés et que des trois autres deux soient assujettis à rester chacun sur une droite donnée, le dernier sera situé aussi sur une droite donnée de position. Der griechische Urtext ist unter Anderen abgedruckt in einer Abhandlung über die Porismen von Breton (de Champ(Journ. Mathém. XX, 209—299.

25. Ich benutzte für die *Δεδόμενα* die deutsche Uebersetzung derselben: Euclid's Data nach dem Griechischen mit Robert Simson's Zusätzen herausgegeben von Julius Friedrich Wurm, Diakonus zu Lauffen am Neckar. Berlin 1825.

26. Proclus, Lib. II, c. V, pag. 40: Itemque de divisionibus liber und Lib. II ad definitionem 14, pag. 82: Circulus namque et rectilineorum quodlibet in ratione dissimiles dividi potest figuras. Quod et ipse Euclides in Divisionibus pertractat aliam quidem figurarum in similes datas figuras, aliam vero in dissimilès dividens. Der griechische Name des Werkes heisst: *περὶ διαιρέσεων βίβλιον*.

27. Ueber diesen Gegenstand vergl. Woepcke im Journ. Asiatique 1851, Sept. & Octob. und ganz besonders Ofterdinger, Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklides über die Theilung der Figuren. Ulm 1853 (18 S. in 4⁰). In dieser letzteren Monographie wird nach Gartz (De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis schedisma historicum. Halae 1823, pag. 5) darauf aufmerksam gemacht, dass im Escurial eine vollständige arabische Uebersetzung der Schrift des Euclides über die Theilung der Figuren vorhanden zu sein scheine. Der als Uebersetzer genannte Tapet dürfte wohl der neuerdings bekannter gewordene Thabit ben Korra sein sollen?

28. Besorgt durch D. Gregory 1703.

29. Savilius, Praelectiones tres decim in principium Elem. Euclidis. Oxonii 1621. pag. 17.

30. Der griechische Name lautet *τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν*. Die Lemmen des Pappus finden sich am Schlusse des 7. Buches pag. 438—446. Die Bemerkungen von Chasles in der deutschen Uebersetzung seiner Geschichte der Geometrie als „Note II, Ueber Euclid's Oerter auf der Oberfläche" S. 272. Vergleiche ausserdem dessen auch in Liouville's Journ. Mathém. Bd. XII abgedruckte Séance d'ouverture du cours de géométrie supérieure le 22 Decembre 1846 pag. 7: Cependant on n'est pas fixé sur le sujet du livre des Lieux à la surface d'Euclide. L'auteur y considérait des courbes tracées sur des surfaces courbes; mais quelle était la nature de ces surfaces? les courbes, qu'on y traçait étaient-elles necessairement planes? La brièveté de Pappus nous laisse dans l'incertitude. Je dirai toutefois, que quelques indices peuvent porter à croire, que dans le livre des Lieux à la surface Euclide traitait des Conoïdes, appelés aujourd'hui surfaces du second degré de révolution, et des sections faites par des plans dans ces surfaces, comme dans le cône.

31. Für die Schriften des Archimedes benutzte ich die in Anmerkung 8 bezeichnete Uebersetzung von Nizze; ferner: die Kreis-Messung des Archimedes von Syrakus nebst dem dazu gehörigen Commentare des Eutokius von Askalon aus dem Griechischen übersetzt, mit Anmerkungen begleitet und einer Einleitung, welche sich vorzüglich über die Zahlenbezeichnungsarten und das Zahlensystem der Griechen ausbreitet, versehen von Joseph Gutenäcker. Würzburg 1825. Beide Schriften citire ich kurzweg als Nizze und Gutenäcker.

32. Die Stelle des Eutokius: *Ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὥς φησιν Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον* ist abgedruckt

bei Gutenäcker S. 77. Einen Heraclides nennt Archimed selbst in der Einleitung zu seiner Schrift über Schneckenlinien. Ob aber dieser Zeitgenosse der Verfasser seiner Biographie gewesen, darüber fehlt jeder Anhaltspunkt. Wenn Meursius im Thesaurus Graec. antiqu. ed. Gronovius Vol. X pag. 609 in Heraclides Ponticus Major, dem Schüler des Aristoteles, den Biographen des Archimed vermuthet, so ist das chronologisch unmöglich, und wenn Gutenäcker S. 123, Note 7 sich auf diese Stelle bezieht, um als Autor Heraclides Ponticus, auch Lembus genannt, anzugeben, so ist das ein grober Irrthum. Allerdings gab es einen Ἡρακλείδης Λέμβος, allein dieser führt den Heimathsnamen Καλλατιανὸς ἢ Ἀλεξανδρεὺς und nicht Ποντικός. Ueber diesen Heraklides Lembus vergl. Diogenes Laertius V, 6, 8, wo aber nur gesagt ist, er habe ein διαδοχή (über die Folge der Philosophen?) geschrieben; von einer Biographie des Archimedes oder eines anderen Mathematikers ist dort keine Rede. Dass der Biograph Heraclides, wer er auch sein möge, durch einen alten Druckfehler sich einmal in einen Heraclius verwandelte, und als solcher bis in neueste Werke überging, sei nur im Vorübergehen bemerkt.

33. Notizen zur Lebensgeschichte des Archimedes finden sich bei Plutarch (vit. Marcell. vergl. non posse suav. viv. 11), Livius (XXV), Cicero (Tuscul. und Verrin.), Diodor, Silius Italicus, Valerius Maximus u. A. Eine Anzahl von neueren Zusammenstellungen habe ich in dem Artikel „Archimedes" in Pauly's Real-Encyclopädie der classischen Alterthumswissenschaft (2. Ausgabe) Bd. I, S. 1419—1452 genannt.

34. Cicero nennt den Archimed humilem homunculum (Tuscul. lib. V, cap. 23, § 64), freilich im Gegensatze zu dem Tyrannen Dionys, von welchem unmittelbar vorher die Rede ist. Aehnlicher Weise drückt sich Silius Italicus (De bello Punico XIV, 342) über Archimed aus: Nudus opem, sed cui coelum terraeque paterent.

35. Diodorus Siculus lib. V, p. 217.

36. Vitruvius, De architectura libri decem IX, 3 in der ed. J. G. Schneider, Lipsiae 1807. Bd. I, S. 238. Die Anmerkungen zu dieser Stelle (Bd. III, S. 165) enthalten die Stelle aus dem Gedichte De ponderibus et mensuris, welches von dem Herausgeber dem Rhemnius Fannius zugeschrieben wird. Andere nennen bekanntlich als Verfasser den Priscianus.

37. In der Schrift von den schwimmenden Körpern, περὶ ὀχουμένων, heisst es Buch I, Satz 7 (Nizze S. 228): Feste Körper, welche schwerer als eine Flüssigkeit, in diese eingetaucht werden, sinken, so lange sie noch tiefer kommen können, und werden in der Flüssigkeit um so leichter, als das Gewicht einer Masse Flüssigkeit von der Gröse der eingetauchten Körper beträgt.

38. Montucla I, 229 ist der entgegengesetzten Meinung.

39. Proclus Lib. II, cap. 3 (pag. 37): Quale sane Hieron quoque Syracusius de Archimede dixisse fertur, quum navem trinis instructam velis fabricasset, quam Ptolemaeo Aegyptiorum regi mittere praeparabat. Quum nam omnes una Syracusii navem illam protrahere minime possent, Archimedes Hieronem solum ipsam subduxisse fecit. Stupefactus autem ille, ab hac (inquit) die de quocunque dixerit Archimedes, illi credendum est. Idem autem Gelonem etiam aiunt dixisse, quum corona, quam fabricatus est, non soluta singulum commistarum materiarum pondus comperisset.

40. Vergleiche die Schrift vom Gleichgewichte der Ebenen, ἰσοῤῥόπικα, Buch I, Satz 6 und 7 (Nizze S. 3 und 4).

41. Athen. V, 40 pag. 207.

42. So lautet wenigstens die lateinische Lesart: noli turbare circulos meos;

griechische Autoren haben die Worte etwas anders aufbewahrt: τὰν κεφαλὰν καὶ μὴ τὰν γραμμάν.

43. Ein Schriftsteller des 10. Jahrhunderts, Odo von Clüny, hat diese Schwierigkeit mit naiver Ehrlichkeit hervorgehoben, indem er sagt: Quae omnia magis unicae vocis alloquio quam scripta advertuntur. Vergl. meine Mathem. Beiträge z. Kulturl. S. 299.

44. Ausführliche Beschreibungen solcher Rechenbretter verschiedener Völker und Zeiten vergl. in meinen Mathem. Beiträgen z. Kulturl. Kap. IX und X, S. 128—154.

45. Vergl. Nizze S. 206 und 212; der griechische Name ist ἀρχαί.

46. Die einzelnen eine Gruppe einleitenden Zahlen werden ὅροι, Grenzzahlen genannt, ein Name, welcher sich auch allgemein von den Gliedern einer geometrischen Reihe bei den Griechen gebraucht findet, und dessen lateinische Uebersetzung bald terminus heisst und alsdann für Reihenglieder überhaupt gebraucht wird, bald als limes eine Rolle bei dem decadischen Rechnen der Römer spielt.

47. Vergl. Gutenäcker S. 116: οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν τὸν μὴ διὰ τῶν Μάγνου Λογιστικῶν ἠγμένον, d. h. welchen nicht leicht einer folgen kann, ohne in der Logistik des Magnus geübt zu sein.

48. Einen ausführlichen Bericht über die hierher gehörigen Stellen vergl. bei Nesselmann, die Algebra der Griechen S. 141—147.

49. Mehr als Wahrscheinlichkeit haben wir nicht hierfür, wenn auch Ideler in seinem trefflichen Aufsatze „Ueber die Trigonometrie der Alten“ (Juliusheft 1812 von Zach's Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde Bd. XXVI, S. 7, Anmerkung) ganz bestimmt von den „beiden Büchern der Collectio Mathematica, die das praktische Rechnen betrafen“ redet.

50. Vergl. Gutenäcker S. 84, 88, 91, 94, 100, 103, 106, 111, 113 oder Nizze S. 278—280.

51. Vergl. Nizze S. 209—223, wo die Ueberschrift „Sandeszahl“ heisst. Der griechische Name ist ψαμμίτης, der lateinische arenarius.

52. Klügel ist geneigt diese Schlussart anzunehmen; vergl. dessen Mathematisches Wörterbuch s. v. Arithmetik. Bd. I, S. 184, und ich möchte ihm um so eher beistimmen, als ich auch sonst das arithmetische und sogar das geometrische Experiment bei den Griechen nachgewiesen habe. Vergl. meine Beiträge z. Kulturl. S. 92 flg. und 105 flg. Was die Zahlen selbst betrifft, so ist $153^2 = 23409$, das 3fache davon 70227, während $265^2 = 70225$.

53. Dieser Satz findet sich in Euclids Elementen VI, 3.

54. Gutenäcker S. 84, Nizze S. 278. Die Bezeichnung der griechischen Zahlen durch die Buchstaben des Alphabets, sowie die vertausendfachenden kleinen Kommata, die verzehntausendfachenden *M* u. s. w. setze ich als bekannt voraus. Wer sich darüber näher unterrichten will, findet das Material verschiedentlich gesammelt, so z. B. bei Nesselmann, die Algebra der Griehen S. 78 flg.

55. Quadratur der Parabel, Satz 3 (Nizze S. 13) und von den Konoiden und Sphäroiden, Satz 4 (Nizze S. 158).

56. Quadratur der Parabel Satz 18 bis zum Schlusse der Abhandlung, Nizze S. 22—25.

57. Quadratur der Parabel bis Satz 17, Nizze S. 12—22.

58. Von den Konoiden und Sphäroiden Satz 6, Nizze S. 161.

59. Von den Konoiden und Sphäroiden Satz 8—10, Nizze S. 162—168.

60. Von der Kugel und dem Cylinder, Vorrede des ersten Buches, Nizze S. 42. Unter den Annahmen dieses Buches findet sich auch beiläufig bemerkt die so-

genannte archimedische Definition: Von den Linien, welche einerlei Endpunkte haben, ist am kürzesten die gerade Linie (Nizze S. 44).

61. Von den Schneckenlinien, *περὶ ἑλίκων*, Nizze S. 116—150. Vergl. auch die wissenschaftliche Beilage zu dem Freiburger Lyceumsprogramme von 1862: Die Archimedische Spirale mit Rücksicht auf ihre Geschichte von Fr. X. Lehmann.

62. Vergl. Nizze S. 118. Lehmann l. c. S. 12.

63. Vergl. Nizze in den kritischen Anmerkungen zu den Schneckenlinien. S. 281. Die im Texte citirten Worte des Archimed vergl. Nizze S. 116.

64. Die citirten Worte gehören zu den Schlusssätzen der inhaltsreichen kleinen Schrift: Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker von J. H. T. Müller. Leipzig 1860.

65. Von den Schneckenlinien, Widmungsschreiben an Dositheus, Nizze S. 116.

66. In Bezug auf Eratosthenes wurden benutzt: Fabricius, Bibliotheca Graeca (ed. Harless) IV, pag. 120—127. Eratosthenes geographicorum fragmenta edidit Seidel, Göttingen 1789. Godofr. Bernhardy, Eratosthenica, Berlin 1822 und desselben Verfassers Artikel Eratosthenes in Ersch und Gruber's Encyclopädie, Section I, Bd. 36, S. 221—233. Just. Heinr. Dresler: Eratosthenes von der Verdoppelung des Würfels, wissenschaftliche Beilage zum Programme der herzogl. nassauischen Pädagogien zu Dillenburg, Hadamar und Wiesbaden im Frühjahr 1828.

67. Alex. v. Humboldt, Kosmos Bd. II, S. 208 und die zugehörige Anmerkung S. 435.

68. Ptolemaeus Hephaestio bei Photius, cod. CXC.

69. Ein Abdruck des Briefes findet sich auch in der Schrift von Bernhardy, S. 176—180, die deutsche Uebersetzung eines Theiles desselben in der Dreslerschen Programmbeilage.

70. Den Namen des Mesolabiums kennen wir aus Vitruvius IX, 3 und Pappus Lib. III, propos. 4, pag. 7; die Beschreibung dagegen und die Gebrauchsanweisung findet sich sowohl in dem eratosthenischen Briefe als bei Pappus Lib. III, propos. 5, pag. 8.

71. Die betreffenden Verse lauten

τῇδ' ἀναμετρήσαιο, μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
συνδρομάδας δίσσων ἐντὸς ἕλῃς κανόνων,

welche Dresler nicht allzuglücklich folgendermassen überträgt:

.... Inhalt fändest Du so, wofern Du zur äussersten Schranke
Laufende Mittlere zögst zwischen dem regelnden Paar.

72. Pappus Lib. VII Procemium, pag. 241 und 247: De medietatibus.

73. Die betreffenden Stellen sind bei Bernhardy S. 170 gesammelt. Vergl. Theo Smyrnaeus pag. 129, 168, 173. Fabricius IV, 121 giebt der eratosthenischen Schrift den durch Nichts gerechtfertigten Namen *ἀριθμητική*.

74. *Νικομάχου εἰσαγωγὴ ἀριθμητική* ed. Ast (Leipzig 1817) pag. 83 flg. Jamblichus Chalcidensis in Nicomachi Geraseni arithmeticam introductionem ed. Tennulius (Arnheim 1668) pag. 41, 42.

75. *τὸ κόσκινον*, cribrum Eratosthenis.

76. *Κἀνταῦθα δὲ ὁ Εὐκλείδης προδηλότατον ἁμάρτημα παρέχει, τὴν δυάδα τῶν πρώτων καὶ ἀσυνθέτων οἰόμενος εἶναι, ἐπεὶ μονάδι μόνῃ μέτρῳ χρῆται ἐκλελησμένος ὅτι ἡ μὲν τοῦ ἀρτίου εἴδους ἐστίν.* Jamblichus l. c. pag. 42.

77. Fabricius, Bibliotheca Graeca (ed. Harless) IV, pag. 192—203. Terquem, Notice bibliographique sur Apollonius N. ann. math. 1844, III. pag. 350—352 und 474—488.

78. Almagestum Ptolemai XII, 1.

79. Nouvelle Biographie universelle T. II, pag. 903. Paris 1852.

80. Leider standen mir die *κωνικά* des Apollonius nicht zur Verfügung, so dass ich mich in Bezug auf dieses Werk mit den Angaben anderer Historiker: Montucla, Chasles, Arneth begnügen musste. Ganz vortreffliche Dienste leistete mir auch die Zusammenstellung von Housel, Les coniques d'Apollonius. Journ. Mathém. 1858, XXIII, 153—192.

81. Pappus, pag. 250. Wenn Müller in seiner in Anmerkung 64 citirten Schrift S. 27 flg. sagt: „Die von Archimedes für die 3 Kegelschnitte gebrauchten Namen *ἡ τοῦ ὀξυγωνίου, τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομή* könnte zu dem Glauben verleiten, es sei ihm unbekannt gewesen, dass sich aus irgend einer graden konischen Fläche alle drei Curvenarten ableiten lassen. Dies ist keineswegs der Fall," so möchte ich mich dieser so unbedingt ausgesprochenen Behauptung nicht anschliessen.

82. Arneth, Geschichte der Mathematik. Stuttgart 1852. S. 91.

83. Platonis opera ed. Stallbaum, Gotha & Erfurt 1836. Vol. VI, Sect. 2, pag. 81 seq. Ferner Blass pag. 19 der in Anmerkung 18 citirten Dissertation: Mihi quidem persuasum est verba accurata constructionis via declarari non posse et id tantum adparere: Platonem exemplum dare voluisse problematis definiendi, quando solvi possit et quomodo neque tamen quo id assequeretur feliciter duo junxisse problemata, alterum de inscriptione figurarum in circulum, alterum de adplicatione spatiorum ad datam lineam.

84. Plato übersetzt von Hieron. Müller. Leipzig 1851. Bd. II, S. 150 und 180.

85. Die hier folgende Darstellung der drei Sätze lehnt sich wesentlich an Arneth, Geschichte der Mathematik S. 92—93 an, dessen Folgerungen ich zwar nicht theile, aber dem es an dieser Stelle ausgezeichnet gelungen ist, die antike Behandlungsweise zu modernisiren.

86. Proclus lib. IV, cap. 18 ad propos. 44, pag. 264: Antiqua quidem sunt haec, ajunt Eudemi familiares, Pythagoricaeque Musae inventa, applicatio utique spatiorum et excessus atque defectus. Ab his autem et Juniores quum nomina suscepissent, transtulerunt ipsa in eas etiam lineas, quae Conicae aprellantur, quippe qui unam quidem harum Parabolen, alteram autem Hyperbolen, tertiam vero Ellipsim vocarunt.

87. Vergl. meine Beiträge z. Kulturl. Kap. VI, S. 83 flgg.

88. Pappus, lib. VII, Einleitung de Conicis Apollonii, pag. 249: Euclidis libros quatuor conicorum quum Apollonius explevisset et quatuor alios adjunxisset, octo conicorum libros confecit.

89. Nizze hat es wenigstens sehr plausibel gemacht, dass diese Wörter nacharchimedisch seien, vgl. Nizze S. 285. Chasles dagegen (Geschichte der Geometrie S. 15 in der Note) schreibt dem Archimed die Kenntniss der beiden Namen zu.

90. Daraus wurde in der Uebersetzung das latus rectum (vielleicht auch verketzert aus latus erectum, die Senkrechte), ein Name, der bis in das 18. Jahrhundert hinein in Gebrauch war.

91. Apollonius benutzt dabei allerdings noch nicht das Wort: harmonische Theilung, sondern schreibt den Satz als Proportion.

92. Ein arithmetischer Satz aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten, dass nämlich das Maximalproduct zweier Theile einer gegebenen Summe erzielt werde, wenn die Theile einander gleich sind, findet sich in dem Commentare des Eutokius zu Archimed's Kugel und Cylinder II, 9. Der Beweis ist mit Hülfe von Euclid's Elementen II, 5 geführt. Wenn ich Ramus, Scholae mathematicae pag. 135 richtig verstehe, so weist Eutokius die Erfindung dieses Satzes dem Nikomachus auf dessen eigene Angabe hin zu. Näheres kann ich leider nicht angeben, da mir der Commentar des Eutokius nicht zur Verfügung ist.

93. Pappus, pag. 427—429.

94. Die Titel der verlorenen geometrischen Schriften des Apollonius sind: περὶ ἐπαφῶν de tactionibus, ἐπίπεδοι τόποι loci plani, περὶ νεύσεων de inclinationibus, περὶ χωρίου ἀποτομῆς sectio spatii, περὶ διωρισμένης τομῆς sectio determinata. Hypsikles führt ausserdem noch eine Schrift über die in dieselbe Kugel eingeschriebenen Dodekaeder und Ikosaeder an, Proklus eine περὶ τοῦ κοχλίου von gänzlich unbekanntem Inhalte.

95. Die Schrift περὶ λόγου ἀποτομῆς de sectione rationis, lateinisch bearbeitet von Halley 1706, deutsch von Aug. Richter (Elbing 1836).

96. Vergl. Gutenäcker S. 155.

97. Woepcke, Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'après les indications tirées d'un manuscrit arabe (Mémoires présentés à l'académie des sciences. T. XIV, pag. 658—720. Paris 1856.) Vergl. auch den Bericht von Chasles über diese Abhandlung in den Compt. Rend. XXXVII. 553—559 (17. October 1853).

98. Vergl. Nesselmann, die Algebra der Griechen S. 132 und meine Mathem. Beiträge z. Kulturl. S. 148 und 151.

II.

Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte.

(Raumcurven dritter Ordnung.)

Von

Dr. C. A. von Drach,

Privatdocent an der Universität Marburg.

Die Untersuchung von krummen Linien im Raum hat sich lange Zeit hindurch auf nur wenige für die practischen Anwendungen wichtige Fälle beschränkt und obschon dadurch, dass die durch die Differentialrechnung für das Studium der ebenen Curven gewonnenen Hilfsmittel auch auf die analogen räumlichen Gebilde angewandt wurden, die allgemeine Theorie der Raumcurven nach manchen Richtungen hin zu einem gewissen Abschluss gelangte, blieben dennoch andere Theile derselben verhältnissmässig sehr vernachlässigt, wovon eine der Hauptursachen in der umständlichen Art der Untersuchung, aus den Projectionen der Curve, zu suchen ist. Es wurde namentlich kein Versuch gemacht, die algebraischen Raumcurven, welche als Durchschnitte von algebraischen Flächen entstehen müssen, nach Ordnungen zu classificiren und die allgemeinen Eigenschaften der einzelnen Ordnungen aufzufinden.

Erst im Jahr 1827 hat Möbius [1]) die Principien zur rein analytischen Behandlung der Raumcurven mit der Darstellung derselben durch eine Gleichung gegeben und beispielsweise mehrere Fundamentaleigenschaften der Linien dritter Ordnung ermittelt. Ein Jahrzehent später wurden dann von Chasles [2]) dieselben Curven 3. Ordnung von einem andern Gesichtspunkt aus betrachtet und eine Menge ihrer wichtigsten Eigenschaften mitgetheilt, namentlich die Analogie zwischen ihnen als räumlichen Ge-

---

1) Der barycentrische Calcul etc. Lpzg. 1827. 1. Absch. Cap. VII, p. 114—124.

2) Geschichte der Geometrie. Deutsch von Sohncke. Halle 1839. Note XXXIII, p. 441.

bilden und den ebenen Curven zweiten Grades bemerkt, welche durch die von Seydewitz[1]) gegebene Erzeugung derselben vermittelst zweier von den in der synthetischen Geometrie als Grundgebilde zweiter Stufe bezeichneten Elementencomplexen vollständig dargethan wurde. Hierauf wurden von Chasles[2]) die früheren Resultate wesentlich vervollständigt und von Schröter[3]) nochmals die Analogie der Raumcurven 3. Ordnung mit den Kegelschnitten, besonders in Bezug auf die durch die Grundgebilde bedingten dualen Verhältnisse ausführlich erörtert. Diese synthetischen Untersuchungen ergänzte dann Cremona[4]), welcher mit Benutzung der seither in die analytische Geometrie eingeführten neuen Methoden dieselben bestätigte und von beiden Standpunkten aus die Untersuchung beherrschend manches bisher noch nicht genügend Beachtete weiter verfolgte und erschöpfte.

Mit Rücksicht darauf, dass einerseits synthetische Betrachtungen nicht Jedermann angenehm sind und andererseits die analytische Behandlung Cremona's ausserhalb seines Vaterlandes weniger bekannt sein mag, dürfte vielleicht nachfolgende Zusammenstellung der hauptsächlichsten Eigenthümlichkeiten der Raumcurven 3. Ordnung, welche zugleich einen Beitrag liefert zu der immer innigeren Verschmelzung der neuern analytischen und synthetischen Gemetrie, sowie zu einer Theorie der algebraischen Raumcurven überhaupt, nicht unerwünscht sein und die Aufmerksamkeit in etwas höherm Grade auf jene Curven hinlenken, deren Bedeutung für die Mechanik schon von Möbius[5]) und Chasles[6]) erkannt wurde und denen möglicher Weise für die weitere Entwickelung mancher mechanischer und physikalischer Untersuchungen eine nicht unbedeutendere Rolle zugetheilt sein mag als den ebenen Curven und den Oberflächen 2. Ordnung.

Erstes Capitel.

Eine continuirliche Folge von Punkten heisst krumme Linie oder Curve, wenn einem jeden Punkt derselben im Allgemeinen nur zwei unmittelbar benachbart sind und irgend drei beliebig gewählte Punkte der Reihe nicht in einer Geraden liegen; es kann dieselbe aufgefasst

1) Grunert's Archiv f. d. Math. u. Phys. X. p. 203.

2) Liouville, journal d. math. 2e Sie, II, p. 397.

3) Crelle's Journal f. M. LVI. p. 27.

4) Tortolini, annali di math. I. p. 164, 278. II. p. 19, 201. V. p. 227. Crelle's Journ. f. M. LVIII. p. 138. LX. p. 188. LXIII. p. 141.

5) Crelle's Journ. f. M. X. p. 317.

6) *Comptes rendus (juin 1843).*

werden als Bahn eines sich nach einem bestimmten Gesetz bewegenden Punkts. Als für alle krummen Linien gemeinsames charakteristisches Merkmal stellt sich bei dieser Auffassung heraus, dass die Bewegungsrichtung des Punkts, der die Curve beschreibt, sich fortwährend ändert; das Gesetz der Aenderung ist für jede specielle Curve ein anderes, und lassen sich die Curven mit Rücksicht auf dasselbe in gewisse Gruppen bringen. Man unterscheidet ebene und unebene Curven, je nachdem die Bewegung des beschreibenden Punkts in einer Ebene erfolgt oder nicht; von den letztern liegen 4 darauf willkürlich angenommene Punkte nicht in einer Ebene; sie heissen auch Raumcurven oder gewundene Linien oder Curven doppelter Krümmung.

Um den analytischen Ausdruck von krummen Linien in einem Coordinatensystem zu finden, muss das Gesetz bekannt sein, nach welchem die einzelnen Punkte derselben sich construiren lassen; man gelangt dann, indem man die durch jenes Gesetz bestimmte Eigenthümlichkeit einer Curve als Function der Coordinaten darstellt, bei den ebenen Curven zu einer Gleichung zwischen den Coordinaten als analytischem Aequivalent der Curve, und hat dieselben nach der Natur jener Gleichung in gewisse Kategorien gebracht, z. B. algebraische Curven, transcendente Curven, Curven n^{ter} Ordnung u. s. w. Complicirter verhält sich die Sache bei den unebenen Curven; zum analytischen Ausdruck derselben sind 2 Gleichungen erforderlich, deren jede eine die Curve enthaltende Fläche, im günstigsten Fall eine die Curve auf eine von den Coordinatenebenen projicirende Cylinderfläche repräsentirt, und wird insbesondere eine über die Trennung der algebraischen von den transcendenten hinausgehende Classification der Raumcurven, also etwa der algebraischen nach Ordnungen etc., wie sich gleich zeigen wird, kaum durchzuführen sein. Ueberhaupt bietet, wie leicht zu erkennen, das Studium der Raumcurven aus ihren Projectionen, je nach der Natur der Curve und dem Gegenstand der Untersuchung, bald mehr, bald weniger Unannehmlichkeiten.

Beschränken wir uns nun auf die algebraischen Raumcurven, so kann man sie in Ordnungen theilen nach Analogie mit den ebenen algebraischen Curven, wenn man definirt:

> „Die Raumcurve n^{ter} Ordnung kann mit einer beliebigen Ebene höchstens n Punkte gemein haben; oder die Raumcurve n^{ter} Ordnung wird von jeder Ebene in n (reellen oder imaginären) Punkten getroffen, von welchen auch beliebig viele oder alle zusammenfallen können."

Zwei algebraische Flächen, deren eine von der r^{ten}, die andere von der p^{ten} Ordnung ist, schneiden sich in einer Curve von der rp^{ten} Ordnung, denn die beiden Flächen werden von einer beliebigen Ebene in Curven von der r^{ten}, resp. p^{ten} Ordnung getroffen und diese beiden

Curven haben dann, wie in der analytischen Planimetrie mit Hülfe eines bekannten Satzes über die Elimination bewiesen wird, rp gemeinsame Punkte, welche eben die Schnittpunkte der jenen Flächen gemeinsamen Curve mit der betrachteten Ebene sind. Es scheint hiernach, als wenn manche Raumcurven, z. B. die von der 3. oder 5. Ordnung gar nicht existirten, weil sie wenigstens auf die angegebene Weise als Schnitt von Flächen nicht dargestellt werden können, oder dass die Curven von den betreffenden Ordnungen ebene Curven seien, indem die eine der sie bestimmenden Flächen eine Ebene, die andere eine Fläche vom 3. oder 5. Grad wäre. Die erwähnten Curven existiren jedoch wirklich, nur können sie nicht als vollständiger Schnitt von 2 algebraischen Flächen vorkommen; sie enthaltende Flächensysteme schneiden sich ausserdem noch in andern Curven; es erscheint z. B., wie wir später sehen werden, die Raumcurve 3. Ordnung als Schnittcurve von 2 Flächen 2. Ordnung, welche eine Gerade gemein haben, so dass, wie es nach dem Obigen sein muss, der vollständige Schnitt jener beiden Flächen aus der Curve 3. Ordnung und der Geraden, also einem einer Curve 4. Ordnung aequivalenten System besteht. Es genügen nämlich überhaupt der obigen Definition der Raumcurve n^{ter} Ordnung gewisse Systeme, die aus Geraden, ebenen und unebenen Curven geringerer Ordnung bestehen können; so kann z. B. die Curve 4. Ordnung, welche zwei Flächen zweiten Grades gemeinsam ist, auch in 2 ebene Kegelschnitte zerfallen u. s. w.

Nach der aus den geometrischen Grundgebilden sich ergebenden und daher die gesammte Geometrie beherrschenden Dualität, zu deren Nachweis für bestimmte Raumfiguren in dem sogenannten Gesetz der Reciprocität eine bequeme und sichere Handhabe gegeben ist, entsprechen den Curven im Raume abwickelbare Oberflächen, d. h. Regelflächen von der Beschaffenheit, dass sie ohne Deformation, allein durch successive Drehung in eine Ebene ausgebreitet werden können, was bekanntlich immer möglich ist, wenn jede erzeugende Gerade mit ihrer nächstfolgenden einen Punkt gemein hat.

Die angegebene Beziehung zwischen Raumcurven und developpablen Flächen ergibt sich durch folgende Betrachtung. Nimmt man auf der Curve eine Reihe von einander folgenden Punkten $a, b, c, d \ldots$ an, so bestimmen dieselben ein System einander folgender Sehnen $ab, bc, cd \ldots$, die, wenn die betreffenden Punkte unendlich nahe sind, in Tangenten der Curve übergehen. Diese Tangenten bilden in ihrer Gesammtheit eine abwickelbare Fläche, weil jede von ihnen die nächstfolgende schneidet; die durch je 2 aufeinanderfolgende von ihnen gehenden Ebenen $abc, bcd \ldots$ sind Berührungsebenen jener Tangentenfläche der gegebenen Curve und zugleich Osculations- oder Schmiegungsebenen der letzteren, weil jede von ihnen 3 unendlich nahe Punkte derselben enthält. Nach dem Gesetz

der Reciprocität entsprechen nun den Punkten a, b, c, d ... der Curve Ebenen A, B, C, D ...; je zwei aufeinanderfolgende dieser Ebenen schneiden sich in einer Geraden AB, BC, CD ..., die von der nächstfolgenden geschnitten wird, so dass also durch die Gesammtheit dieser letzteren gleichfalls eine abwickelbare Regelfläche erzeugt wird, welche die Ebenen A, B, C, D ... zu Tangentenebenen hat. Die dreien aufeinanderfolgenden Tangentenebenen oder zwei folgenden Tangenten gemeinsamen Punkte ABC, BCD ... bilden endlich eine jener Fläche angehörige Raumcurve, ihre sogenannte Wendecurve oder Gratlinie. [1]) Betrachtet man, wie vorher, eine gegebene Curve als Schnitt von zwei Flächen, also erzeugt durch die jenen Flächen gemeinsamen Punkte, so ist die ihr reciproke abwickelbare Fläche das Erzeugniss von sämmtlichen Tangentenebenen, welche die jenen beiden Flächen reciprok entsprechenden Flächen zugleich berühren; geht insbesondere die Raumcurve in eine ebene Curve über, so ist ihre Reciprokalfläche eine Kegelfläche.

Verfolgt man die angegebenen Beziehungen weiter, so findet sich, dass die Ordnung der Raumcurve gleich ist der Classe der ihr reciproken developpablen Fläche, d. h. der Anzahl der Tangentenebenen, die von einem Punkte aus an sie gelegt werden können; ferner, dass die Ordnung dieser Oberfläche, d. h. die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden gleich ist dem Rang der Curve, d. h. der Anzahl der Tangenten, die von Punkten einer Geraden aus an sie möglich sind. Man erkennt ferner, dass dem Kegel, den man erhält, wenn ein beliebiger Punkt des Raumes mit den einzelnen Curvenpunkten verbunden wird, die Schnittcurve jener developpablen Oberfläche mit einer Ebene entspricht, und was dergleichen Beziehungen noch mehr sind, die wir bei Untersuchung der Raumcurven 3. Ordnung ausführlich zu erörtern haben werden.

Eine weitere den Raumcurven eigenthümliche Art dualistischer Verhältnisse, die zwar im Wesentlichen in der angegebenen schon enthalten ist, besteht in Folgendem: wie in der Ebene eine Curve angesehen werden kann als Enveloppe ihrer Tangenten, oder eine Fläche im Raum als solche ihrer Berührungsebenen, so kann die Raumcurve aufgefasst werden, als Erzeugniss ihrer Osculationsebenen, und es stehen sich dann bei derselben entgegen die Ordnung der Curve in der obigen Bedeutung und ihre Classe, d. h. die Anzahl der von einem Punkt an die Curve möglichen Osculationsebenen.

---

1) Der Zusammenhang, in welchem eine abwickelbare Fläche mit ihrer Wendecurve steht, wird am leichtesten erkannt, wenn man umgekehrt von dieser gegebenen Curve ausgehend die Tangentenfläche derselben bildet, indem man, wie oben, die Curve zunächst durch ein unebenes Polygon ersetzt, und jene Fläche demnach durch eine gewisse polyedrische Figur, deren Kanten von den verlängerten Seiten des Polygons gebildet werden.

Wenn nun oben zwei Gleichungen zwischen Punktcoordinaten eine Curve darstellen als Schnitt von 2 Flächen, so repräsentiren nach dem eben Entwickelten 2 Gleichungen in Ebenencoordinaten eine abwickelbare Fläche und auch eine Curve; alle Ebenen nämlich, deren Coordinaten den beiden Gleichungen genügen, sind Tangentenebenen jener Oberfläche und zugleich Osculationsebenen jener Curve, so dass also die letztere Wendecurve der Fläche ist. Bevor wir uns nun zur Untersuchung der Raumcurven 3. Ordnung im Besondern wenden, ist es unsere nächste Aufgabe, eine Methode ausfindig zu machen zur analytischen Darstellung der Curven doppelter Krümmung, die von den angedeuteten, mit der vorhergegebenen Darstellung dieser Curven verbundenen Inconvenienzen frei ist; dieselbe beruht auf den folgenden Principien.

Es seien in einem rechtwinkligen Coordinatensystem im Raum

$$\begin{aligned} A_0 &\equiv a_0\, u + b_0\, v + c_0\, w + d_0 = 0, \\ A_1 &\equiv a_1\, u + b_1\, v + c_1\, w + d_1 = 0, \\ &\vdots \\ A_n &\equiv a_n\, u + b_n\, v + c_n\, w + d_n = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen einer Anzahl von Punkten, 0, 1, . . . n, d. h. lineare Gleichungen zwischen den variablen Ebenencoordinaten u, v, w, dann stellt bekanntlich die Gleichung

$$A_0 + \lambda\, A_1 = 0,$$

worin λ eine willkürliche Constante bezeichnet, einen Punkt auf der Verbindungslinie von 0 und 1 dar, und zwar kann durch schickliche Wahl von λ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ jeder dieser Geraden angehörende Punkt durch eine Gleichung von der angegebenen Form repräsentirt werden. Durch die Gleichung

$$A_0 + \lambda\, A_1 + \mu\, A_2 = 0,$$

in welche 2 willkürliche Constante λ und μ eingehen, werden alle in der Ebene der Punkte 0 1 2 gelegenen Punkte dargestellt und endlich durch die folgende

$$A_0 + \lambda\, A_1 + \mu\, A_2 + \nu\, A_3 = 0,$$

die mit den 3 willkürlichen Constanten λ, μ, ν behaftet ist, ein jeder beliebige Punkt des Raumes. Ueberhaupt wird jede in ähnlicher Weise aus irgend welchen der gegebenen n Punktgleichungen zusammengesetzte Gleichung wieder die Gleichung eines Punkts sein und zwar kann man, sobald die Anzahl der in eine solche Gleichung eingeführten willkürlichen Constanten λ, μ . . . nicht kleiner als 3 ist, dieselben immer so bestimmen, dass die Gleichung einen bestimmten Punkt im Raume darstellt; es wird sogar, sobald die Anzahl dieser Constanten grösser als 3 ist, der betreffende Punkt auf unendlich viele Arten durch eine Gleichung von der angegebenen Form repräsentirt werden können. Nimmt man jedoch an, es beständen zwischen den $n - 1$ in die allgemeinste derartige Gleichung

$$A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 + \ldots + \nu A_n = 0$$

eingehenden Constanten $\lambda, \mu \ldots \nu$ eine genügende Anzahl von Relationen, um $n - 3$ derselben als Functionen der beiden übrigen auszudrücken, so werden, wie man auch diese beiden letzteren variiren lässt, nicht mehr alle Punkte des Raumes in Form der obigen Gleichung gegeben werden können, sondern nur die einem gewissen geometrischen Ort angehörenden. Sind insbesondere $n - 2$ der Constanten etwa $\mu \ldots \nu$ ganze Potenzen von der noch übrigen λ (die, wovon wir indess hier absehen wollen, noch mit beliebigen aber constanten Factoren versehen sein dürfen), so besitzt der durch die Gleichung

$$\text{I.} \qquad A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \ldots + \lambda^n A_n = 0$$

dargestellte Ort eine Eigenschaft, die wir als Kriterium der Raumcurve n^{ter} Ordnung bezeichnet haben, nämlich dass er mit jeder Ebene des Raumes n Punkte gemein hat. Es geht dies daraus hervor, dass, wenn man in die Gleichung I. beliebige einer bestimmten Ebene angehörige Coordinaten U, V, W einsetzt und dann nach λ auflöst, sich n (reelle oder imaginäre) Werthe für λ ergeben, welche die Gleichung befriedigen; mit andern Worten die Gleichungen von n (reellen oder imaginären) Punkten gefunden werden, die dem fraglichen Ort und der durch die Coordinaten U, V, W bestimmten Ebene gemeinsam sind. Um die Identität dieses geometrischen Orts mit einer Curve n^{ter} Ordnung nachzuweisen, hat man nur noch zu zeigen, dass die ihm angehörenden Punkte eine zusammenhängende Reihe bilden, d. h. dass die Coordinaten derselben stetig in einander übergeführt werden können. Zu diesem Zwecke bilden wir aus der gegebenen Gleichung irgend eines dem zu untersuchenden Ort angehörigen Punkts, der also durch die obige Gleichung I. für irgend welche Annahme von λ dargestellt wird, seine rechtwinkligen Coordinaten: [1])

$$\text{II.} \quad \begin{cases} x = \dfrac{a_0 + \lambda a_1 + \ldots + \lambda^n a_n}{d_0 + \lambda d_1 + \ldots + \lambda^n d_n}, \\[2ex] y = \dfrac{b_0 + \lambda b_1 + \ldots + \lambda^n b_n}{d_0 + \lambda d_1 + \ldots + \lambda^n d_n}, \\[2ex] z = \dfrac{c_0 + \lambda c_1 + \ldots + \lambda^n c_n}{d_0 + \lambda d_1 + \ldots + \lambda^n d_n} \end{cases}$$

und ersehen sofort, da dieselben rationale Functionen von λ sind, dass einer unendlich kleinen Aenderung von λ auch nur eine unendlich kleine Aenderung der Coordinatenwerthe entsprechen kann, dieselben also bei continuirlicher Variation von λ continuirlich in einander übergehen müssen. Die Gleichung

1) Vergl. Hesse, analyt. Geometrie des Raumes, p. 48.

$$A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \ldots + \lambda^n A_n = 0,$$

worin A_0, $A_1, \ldots A_n$ die linken Seiten von Punktgleichungen und λ eine willkürliche Constante bezeichnet, repräsentirt also eine Raumcurve n^{ter} Ordnung, indem aus ihr, wenn λ alle Werthe der reellen und der imaginären Zahlenreihen durchläuft, successive die Gleichungen aller der Curve angehörigen Punkte hervorgehen. Die Grösse λ, von welcher, wenn die Gleichung I. der Curve gegeben ist, die Lage eines jeden Curvenpunktes einzig und allein abhängt und die im Allgemeinen für jeden dieser Punkte verschieden ist, nennt man den Parameter des betreffenden Punkts. Die rechtwinkligen Coordinaten lassen sich dann mit Hülfe der Gleichung II. für jeden Parameter leicht ermitteln.

Die für die algebraischen Raumcurven im Vorhergehenden entwickelte allgemeine Gleichung lässt ohne weiteres ersehen, dass keine unebenen Curven erster und zweiter Ordnung existiren; denn die Raumcurve erster Ordnung gibt sich durch die Form ihrer Gleichung

$$A_0 + \lambda A_1 = 0$$

sogleich als Gerade zu erkennen, während aus der Gleichung

$$A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 = 0$$

der Raumcurve zweiter Ordnung sogleich hervorgeht, dass die Curve ganz in der Ebene der 3 Punkte $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ enthalten ist und daher mit einer ebenen Curve 2. Ordnung, also einem sogenannten Kegelschnitt identisch ist. Die unebenen oder gewundenen Curven beginnen daher erst mit den Raumcurven 3. Ordnung; diese werden dargestellt durch die Gleichung

$$(1) \quad A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 = 0$$

und für die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte hat man die Ausdrücke:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3}{d_0 + \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 + \lambda^3 d_3}, \\ y &= \frac{b_0 + \lambda b_1 + \lambda^2 b_2 + \lambda^3 b_3}{d_0 + \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 + \lambda^3 d_3}, \\ z &= \frac{c_0 + \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 + \lambda^3 c_3}{d_0 + \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 + \lambda^3 d_3}. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen drei zwischen den Coordinaten eines Curvenpunkts und dem Parameter des Punkts stattfindenden Relationen leitet man durch Auflösung nach λ, λ^2, λ^3 andere für die Untersuchung der Curven brauchbarere ab, nämlich

$$\begin{aligned} \lambda^3 &= \frac{M_0 x + N_0 y + P_0 z + Q_0}{M_3 x + N_3 y + P_3 z + Q_3}, \\ \lambda^2 &= \frac{M_1 x + N_1 y + P_1 z + Q_1}{M_3 x + N_3 y + P_3 z + Q_3}, \\ \lambda &= \frac{M_2 x + N_2 y + P_2 z + Q_2}{M_3 x + N_3 y + P_3 z + Q_3}, \end{aligned}$$

worin

$$
\begin{aligned}
M_0 &= b_0(d_1c_2 - d_2c_1) + c_0(b_1d_2 - b_2d_1) + d_0(c_1b_2 - b_1c_2),\\
N_0 &= a_0(c_1d_2 - c_2d_1) + c_0(d_1a_2 - d_2a_1) + d_0(a_1c_2 - a_2c_1),\\
P_0 &= a_0(d_1b_2 - d_2b_1) + b_0(a_1d_2 - a_2d_1) + d_0(b_1a_2 - b_2a_1),\\
Q_0 &= a_0(b_1c_2 - b_2c_1) + b_0(c_1a_2 - c_2a_1) + c_0(a_1b_2 - a_2b_1),\\
M_1 &= b_0(c_1d_3 - c_3d_1) + c_0(d_1b_3 - d_3b_1) + d_0(b_1c_3 - c_1b_3),\\
N_1 &= a_0(d_1c_3 - d_3c_1) + c_0(a_1d_3 - a_3d_1) + d_0(c_1a_3 - c_3a_1),\\
P_1 &= a_0(b_1d_3 - b_3d_1) + b_0(d_1a_3 - d_3a_1) + d_0(a_1b_3 - a_3b_1),\\
Q_1 &= a_0(c_1b_3 - c_3b_1) + b_0(a_1c_3 - a_3c_1) + c_0(b_1a_3 - b_3a_1),\\
M_2 &= b_0(d_2c_3 - d_3c_2) + c_0(b_2d_3 - b_3d_2) + d_0(c_2b_3 - c_3b_2),\\
N_2 &= a_0(c_2d_3 - c_3d_2) + c_0(d_2a_3 - d_3a_2) + d_0(a_2c_3 - a_3c_2),\\
P_2 &= a_0(d_2b_3 - d_3b_2) + b_0(a_2d_3 - a_3d_2) + d_0(b_2a_3 - b_3a_2),\\
Q_2 &= a_0(b_2c_3 - b_3c_2) + b_0(c_2a_3 - c_3a_2) + c_0(a_2b_3 - a_3b_2),\\
M_3 &= b_1(c_2d_3 - c_3d_2) + c_1(d_2b_3 - d_3b_2) + d_1(b_2c_3 - c_3a_2),\\
N_3 &= a_1(d_2c_3 - d_3c_2) + c_1(a_2d_3 - a_3d_2) + d_1(c_2a_2 - c_3a_2),\\
P_3 &= a_1(b_2d_3 - b_3d_2) + b_1(d_2a_3 - d_3a_2) + d_1(a_2b_3 - a_3b_2),\\
Q_3 &= a_1(b_3c_2 - b_2c_3) + b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_3b_2 - a_2b_3)
\end{aligned}
$$

zu setzen sind. Man zieht aus der Form obiger Ausdrücke, da die rechts vorkommenden Summen in Bezug auf x, y, z linear sind, den Schluss, dass, wenn umgekehrt zwischen 4 beliebigen in x, y, z linearen Ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
U_0 &= a_0x + b_0y + c_0z + d_0,\\
U_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1,\\
U_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2,\\
U_3 &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3
\end{aligned}
$$

die Relationen:

$$(3) \qquad \frac{U_0}{U_3} = \lambda^3; \quad \frac{U_1}{U_3} = \lambda^2; \quad \frac{U_2}{U_3} = \lambda$$

angenommen werden, die Coordinaten x, y, z, welche den Gleichungen (3) zugleich genügen, je nach der Wahl von λ irgend einem Punkt einer bestimmten Raumcurve 3. Ordnung angehören; ein Schluss, dessen Richtigkeit auch noch dadurch ausser Zweifel gestellt wird, dass man durch Auflösung der Gleichungen (3) nach x, y, z dafür Ausdrücke von der Form (2) erhält.

Wir können daher bei Untersuchung der unebenen Curven 3. Ordnung von den Gleichungen (3), die compendiöser, wie folgt, geschrieben werden

$$(3^*) \qquad U_0 : U_1 : U_2 : U_2 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1,$$

ausgehen und leiten zunächst aus ihnen durch Division drei andere, zur Bildung der Gleichungen von den bei Untersuchung der Raumcurven in Betracht kommenden Geraden und Ebenen besonders geeignete, her, nämlich

$$(4)\quad U_0 - \lambda U_1 = 0;\quad U_1 - \lambda U_2 = 0;\quad U_2 - \lambda U_3 = 0,$$

welches letztere System drei Ebenen repräsentirt, deren Durchschnittspunkt ein Punkt unserer Raumcurve dritter Ordnung ist. Für einen Werth λ_1 des Parameters, erhält man aus (4) die Gleichungen

$$U_0 - \lambda_1 U_1 = 0;\quad U_1 - \lambda_1 U_2 = 0;\quad U_2 - \lambda_1 U_3 = 0,$$

von 3 andern Ebenen, deren Durchschnittspunkt ein zweiter Punkt der Curve ist. Die Gleichungen der Verbindungslinie beider Punkte werden leicht gefunden als Durchschnitt von zwei Ebenen, deren jede die beiden Punkte enthält. Nun hat die Gleichung einer jeden durch den Punkt λ gehenden Ebene die Form

$$l\,(U_0 - \lambda U_1) + m\,(U_1 - \lambda U_2) + n\,(U_2 - \lambda U_3) = 0,$$

worin l, m, n unbestimmte Constanten bedeuten; soll dieselbe durch den Punkt λ_1 gehen, so hat man nur entweder $l = 1,\ m = -\lambda_1,\ n = 0$ oder $l = 0,\ m = 1,\ n = -\lambda_1$ zu setzen und erhält die Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} U_0 - (\lambda + \lambda_1)\, U_1 + \lambda\lambda_1\, U_2 = 0; \\ U_1 - (\lambda + \lambda_1)\, U_2 + \lambda\lambda_1\, U_3 = 0 \end{cases}$$

der die Punkte λ und λ_1 verbindenden Geraden, als Gleichungen von zwei Ebenen, die auch durch den Punkt λ_1 gehen, weil sie aus der Gleichung

$$r\,(U_0 - \lambda_1 U_1) + s\,(U_1 - \lambda_1 U_2) + t\,(U_2 - \lambda_1 U_3) = 0$$

einer durch den Punkt λ_1 gehenden Ebene für die Werthe $r = 1$, $s = -\lambda$, $t = 0$ und $r = 0$, $s = 1$, $t = -\lambda$ erhalten werden.

Lässt man den Punkt λ mit λ_1 zusammenfallen, so geht jene Secante in eine Tangente über und man erhält als Gleichungen derselben aus (5) folgende:

$$(6)\quad \begin{cases} U_0 - 2\lambda U_1 + \lambda^2 U_2 = 0; \\ U_1 - 2\lambda U_2 + \lambda^2 U_3 = 0, \end{cases}$$

vermittelst deren man die Gleichung einer jeden durch diese Tangente gehenden und daher die Curve gleichfalls berührenden Ebene, d. h. einer Tangentenebene der Curve unter der Form

$$(7)\quad (U_0 - 2\lambda U_1 + \lambda^2 U_2) + m\,(U_1 - 2\lambda U_2 + \lambda^2 U_3) = 0$$

darstellen kann. Eliminirt man aus den Gleichungen (6) der Tangente den Parameter λ, so erhält man

$$(8)\quad \begin{vmatrix} U_0, & 0, & U_1, & 0 \\ U_1, & U_0, & U_2, & U_1 \\ U_2, & U_1, & U_3, & U_2 \\ 0, & U_2, & 0, & U_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$(8^*)\quad (U_0 U_3 - U_1 U_2)^2 - 4\,(U_1 U_3 - U_2^2)\,(U_0 U_2 - U_1^2) = 0$$

als Gleichung der von den Tangenten unserer Raumcurve 3. Ordnung

gebildeten Oberfläche, welche, da U_0, U_1, U_2, U_3 in x, y, z lineare Ausdrücke sind, vom 4. Grad ist. Auf ganz ähnliche Weise, wie die Gleichungen einer Secante gefunden wurden, lässt sich noch die Gleichung der Ebene ermitteln, welche durch die Curvenpunkte λ, λ_1, λ_2 bestimmt ist, nämlich indem man eine durch die Sehne $\lambda\,\lambda_1$ gehende, mithin durch die Gleichung

$$U_0 - (\lambda + \lambda_1)\,U_1 + \lambda\,\lambda_1\,U_2 + m\,[U_1 - (\lambda + \lambda_1)\,U_2 + \lambda\lambda_1\,U_3] = 0$$

repräsentirte Ebene, auch durch die Secante $\lambda\,\lambda_2$ gehen lässt. Es ist dies der Fall für $m = -\lambda_2$ und man erhält

$$(9) \quad U_0 - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2)\,U_1 + (\lambda\,\lambda_1 + \lambda\,\lambda_2 + \lambda_1\,\lambda_2)\,U_2 - \lambda\,\lambda_1\lambda_2\,U_3 = 0$$

als Gleichung der gesuchten die Punkte λ, λ_1, λ_2 enthaltenden Ebene, aus welcher, indem $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ angenommen wird, die Gleichung

$$(10) \quad U_0 - 3\,\lambda\,U_1 + 3\,\lambda^2\,U_2 - \lambda^3\,U_3 = 0$$

der die Curve im Punkte λ dreipunktig berührenden Ebene, der sogenannten Schmiegungs- oder Osculationsebene hervorgeht. Die beiden Secanten $\lambda\,\lambda_1$ und $\lambda\,\lambda_2$, durch welche die Ebene (9) bestimmt wurde, gehen hierbei in Tangenten über, woraus man erkennt, dass die Osculationsebene, wie schon früher angegeben, auch definirt werden kann als die Ebene, welche zwei unendlich nahe Tangenten der Curve enthält.

Es fällt sogleich in die Augen, dass diese letztere Gleichung (10) ganz ähnlich aus den in Punktcoordinaten linearen Ausdrücken U_0, U_1, U_2, U_3 und dem Parameter λ zusammengesetzt ist, wie die Gleichung (1) unserer Curve aus den in Ebenencoordinaten linearen Ausdrücken A_0, A_1, A_2, A_3 und wir erhalten daher, da der Umstand, dass in der Gleichung (10) zwei Glieder mit dem constanten Factor 3 behaftet sind, in Gemässheit der obigen Bemerkung über die allgemeinste Form der Gleichung einer Curve, für die geometrische Bedeutung der Gleichung von keinem Belang ist, durch die vorhergehenden Betrachtungen Antwort auf die Frage nach der Bedeutung der Gleichung (1) bei Interpretation derselben in Punktcoordinaten, eine Frage, die wir uns ohnedem, in Anbetracht der überall in der Geometrie waltenden Dualität, jetzt hätten vorlegen müssen. Die Gleichung

$$A_0 + \lambda\,A_1 + \lambda^2\,A_2 + \lambda^3\,A_3 = 0$$

worin nun A_0, A_1, A_2, A_3 die linken Seiten der Gleichungen von Ebenen bedeuten, stellt, wie jetzt aus dem Vorhergehenden unmittelbar erhellt, ein System von Ebenen im Raum dar, welche erstens sämmtlich eine bestimmte unebene Curve 3. Ordnung osculiren und zweitens eine gewisse developpable Oberfläche tangiren, so dass also die Oberfläche jene Curve zur Wendecurve hat. Das System ist von der Beschaffenheit, dass durch jeden Punkt des Raumes drei Ebenen desselben hindurchgehen, d. h. von einem jeden Punkt des Raumes aus sind an jene Curve 3 Osculationsebenen möglich, es ist dieselbe also von der 3. Classe

und ferner die der Raumcure 3. Ordnung reciprok entsprechende Oberfläche ist gleichfalls von der dritten Classe, weil durch jeden Punkt des Raumes drei Tangentenebenen an sie gelegt werden können. Das Punktsystem 3. Ordnung, welches die Gleichung (1) zwischen Ebenencoordinaten darstellt, erweist sich also vollkommen reciprok mit dem System 3. Ordnung von Ebenen, welches dieselbe Gleichung zwischen Punktcoordinaten repräsentirt, wie dies besonders darin hervortritt, dass die (Tangenten-) Fläche, welche in einem Fall durch die Verbindungslinien je zwei aufeinander folgender Punkte, im andern durch die Schnittlinien je zwei unendlich naher Ebenen gebildet wird, dieselbe ist. Diese Eigenschaft, sich selbst reciprok zu sein, bekundet eine gewisse Analogie zwischen den Raumcurven 3. Ordnung und den ebenen Curven 2. Grades, deren weitere Verfolgung und Aufdeckung sich daher als eine unserer Hauptaufgaben für die Untersuchung jener Raumcurven hinstellt.

Die Verwandtschaft der beiden Gebilde lässt sich zunächst schon nachweisen durch die vollständige Uebereinstimmung ihrer Gleichungen und eines leicht daraus herzuleitenden allgemeinen Gesetzes zu ihrer punktweisen Bestimmung. Die Gleichung

$$U_2^2 - U_1 U_3 = 0$$

eines Kegelschnittes, der die Geraden $U_1 = 0$ und $U_3 = 0$ zu Tangenten und die Gerade $U_2 = 0$ zur Berührungssehne hat, lässt sich nämlich ersetzen durch das System

$$U_1 : U_2 : U_3 = \lambda^2 : \lambda : 1$$

ganz entsprechend der Gleichung (3*) unserer Raumcurve 3. Ordnung. Nimmt man, um nur die letztere als die allgemeinere zu berücksichtigen, an, die in ihrem Ausdruck (3*) vorkommenden linearen Ausdrücke U_0, U_1, U_2, U_3, welche gleich Null gesetzt Ebenen repräsentiren, seien in der sogenannten Normalform gegeben oder auf sie reducirt, d. h. es sei

$$U_n = x \cos \alpha_n + y \cos \beta_n + z \cos \gamma_n + p_n, \; [n = 0, 1, 2, 3]$$

so erhält man durch Einsetzen der Coordinaten $x\, y\, z$ eines bestimmten Punkts in dieselben die resp. Entfernungen des Punkts von jenen 4 Ebenen und kann daher die Gleichung (3*.) folgendermassen als Satz aussprechen:

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Entfernungen P_0, P_1, P_2, P_3 von 4 festen Ebenen 0, 1, 2, 3 in der Beziehung

$$P_0 : P_1 : P_2 : P_3 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1$$

stehen, ist eine Raumcurve 3. Ordnung, welche durch 2 Ecken *und den Schwerpunkt des von jenen Ebenen gebildeten Tetraeders geht.*

Der entsprechende Satz für die Ebene heisst dann:

Der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen P_0, P_1, P_2 von drei festen Geraden 0, 1, 2 in der Beziehung

$$P_0 : P_1 : P_2 = \lambda^2 : \lambda : 1$$

stehen, ist ein Kegelschnitt, der durch 2 Ecken und den Schwerpunkt des von jenen Geraden gebildeten Dreiecks geht.

Zweites Capitel.

Die vorher angeregte Analogie der Raumcurven 3. Ordnung mit den ebenen Curven 2. Grades und die sich daran anknüpfenden weiteren Beziehungen werden am sichersten und raschesten erkannt, wenn man die Stellung untersucht, welche die unebene Curve 3. Ordnung im System der synthetischen Geometrie einnimmt, weil gerade diese geometrische Disciplin den organischen Zusammenhang bewahrt, in welchem die complicirteren Raumgebilde mit den sogenannten Grundgebilden stehen, und eben dadurch jene Durchsichtigkeit erhält, welche sofort in jedem zusammengesetzten Gebilde die einfachsten Grundelemente wieder auffinden und damit sein eigentlichstes Wesen erkennen lässt.

Die Grundgebilde der synthetischen Geometrie sind bekanntlich folgende sechs: das gerade Gebilde (Inbegriff aller auf einer Geraden liegenden Punkte), der (ebene) Strahlenbüschel (Gesammtheit aller Geraden in einer Ebene, die durch denselben Punkt gehen), der Ebenenbüschel (bestehend aus allen Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden), das ebene System (enthaltend alle Punkte einer Ebene), der (räumliche) Strahlenbündel (Inbegriff aller durch einen Punkt des Raumes möglichen Geraden) und endlich das räumliche System (Gesammtheit aller Punkte des Raumes). Man hat dieselben weiter eingetheilt in Stufen, je nachdem sie nur Elemente einer Art, oder solche von verschiedenen Arten umfassen; es sondern sich in dieser Weise dann das gerade Gebilde, der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel als Grundgebilde der ersten Stufe, das ebene System und der Strahlenbündel als solche der zweiten Stufe und endlich das räumliche System als der dritten Stufe angehörend.

Die analytischen Ausdrücke für diese Grundgebilde lassen sich leicht herstellen; was zunächst die beiden der Ebene angehörenden Gebilde betrifft, so stellt die Gleichung

$$A_0 + \lambda A_1 = 0$$

je nachdem man die Symbole A_0 und A_1 als die linken Seiten der *Gleichungen von 2* Punkten oder von 2 Geraden repräsentirend betrachtet,

das gerade Gebilde oder den Strahlenbüschel dar. Für räumliche Coordinatensysteme stellt dieselbe Gleichung bei Interpretation in Ebenencoordinaten gleichfalls ein gerades Gebilde, bei Interpretation in Punktcoordinaten einen Ebenenbüschel dar. Das ebene System und der Strahlenbündel werden in gleicher Weise durch die Gleichung

$$A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 = 0$$

ersetzt und endlich das räumliche System durch die Gleichung

$$A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen tritt dann auch der Unterschied zwischen den Grundgebilden der verschiedenen Stufen auf's schärfste hervor.

Das wirksame Instrument der synthetischen Geometrie ist nun die ihr eigenthümliche Beziehung, in welche die Elementargebilde untereinander gebracht werden, nämlich die sogenannte projectivische oder collineare Beziehung, wonach einem jeden Element des einen Gebildes ein aber auch nur ein Element des andern entspricht, und zwar bei den Gebilden 2. und 3. Stufe nur gleichartige Elemente. Man weiss, wie diese Beziehung rein geometrisch durch die sogenannte perspectivische Lage der Gebilde vermittelt wird, ebenso, dass ausser der angegebenen Beziehung von nur gleichartigen Elementen der Gebilde auf einander, auch noch eine andere mit ungleichartigen Elementen benutzt wird, die jedoch für uns nicht weiter in Betracht kommt. Mit Rücksicht auf die gegebenen analytischen Ausdrücke der Grundgebilde bietet sich die Möglichkeit, dieselben projectivisch auf einander zu beziehen, fast noch einfacher als vom rein geometrischen Gesichtspunkt und erkennt man dabei sogleich, dass die Beziehung nur immer zwischen Gebilden derselben Stufe möglich ist. Um irgend zwei Gebilde der ersten Stufe, welche wir mit den Gleichungen

$$A_0 + \lambda A_1 = 0; \quad B_0 + \mu B_1 = 0$$

darstellen wollen, projectivisch, d. h. eindeutig aufeinander zu beziehen, genügt es, festzustellen, dass in den obigen beiden Gleichungen solche Elemente entsprechende sein sollen, für die der Werth der eingeführten Constanten λ und μ derselbe ist, so dass also die Gleichungen

$$A_0 + \lambda A_1 = 0; \quad B_0 + \lambda B_1 = 0$$

je nach ihrer Interpretation 2 collineare gerade Gebilde, oder 2 solche Strahlenbüschel oder 2 solche Ebenenbüschel, oder endlich, wenn die eine Gleichung anders als die andere interpretirt wird, irgend zwei projectivische Grundgebilde erster Stufe repräsentiren. Auf gleiche Weise findet man Gebilde der zweiten Stufe in projectivischer Beziehung zu einander dargestellt durch die Gleichungen

$$A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 = 0; \; B_0 + \lambda B_1 + \mu B_2 = 0,$$

und endlich projectivische räumliche Systeme durch die Gleichungen

$$A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 = 0; \; B_0 + \lambda B_1 + \mu B_2 + \nu B_3 = 0.$$

Die projectivische Beziehung wird also manifestirt durch die Gleichheit der in jenen Gleichungen vorkommenden Constanten. Diese Constanten haben geometrische Bedeutung und gelangt man bei näherem Eingehen darauf zu den Eigenschaften des sogenannten Doppel- oder anharmonischen Verhältnisses, welches sich auf die Lage von 4 Elementen bezieht und wobei wir der spätern Untersuchungen wegen zunächst etwas verweilen müssen. Dass die projectivische, d. h. eindeutige Beziehung auch noch auf allgemeinere Weise als oben durch Gleichsetzung der Constanten λ u. s. w., nämlich durch Annahme von linearen Relationen zwischen denselben vermittelt werden kann, ist leicht zu ersehen und wird überdies aus dem jetzt folgenden Nachweis, dass zwei Gebilde, in welchen die Elemente nach gleichem anharmonischen Verhältniss einander entsprechen, projectivisch sind, hervorgehen.

In das Doppelverhältniss gehen bekanntlich ein Entfernungen von den 4 dazu erforderlichen Punkten eines geraden Gebildes, resp. Sinus von den Winkeln zwischen den Strahlen und Ebenen der beiden andern Gebilde der ersten Stufe; es wird dasselbe für 4 einem dieser Gebilde angehörigen Elemente, deren Gleichungen

$$(1) \quad A_0 + \varkappa A_1 = 0; \quad (3) \quad A_0 + \mu A_1 = 0;$$
$$(2) \quad A_0 + \lambda A_1 = 0; \quad (4) \quad A_0 + \nu A_1 = 0$$

sind, dargestellt unter der Form

$$\frac{\varkappa - \mu}{\lambda - \mu} : \frac{\varkappa - \nu}{\lambda - \nu}.$$

Durch Gleichsetzung mit dem auf die entsprechenden Elemente 1′, 2′, 3′, 4′ eines andern Gebildes bezüglichen anharmonischen Verhältniss, erhält man zunächst

$$\frac{\varkappa - \mu}{\lambda - \mu} : \frac{\varkappa - \nu}{\lambda - \nu} = \frac{\varkappa' - \mu'}{\lambda' - \mu'} : \frac{\varkappa' - \nu'}{\lambda' - \nu'}$$

und wenn man entwickelt

$$(\alpha) \quad a \nu \nu' + b \nu + c \nu' + d = 0,$$

worin a, b, c, d von den die Punkte 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ bestimmenden Constanten $\varkappa$, λ, μ, $\varkappa'$, μ', ν' allein abhängige Grössen sind. Da die vorstehende Gleichung sowohl in Bezug auf ν als auf ν' linear ist und demnach aus ihr für jeden Werth von ν nur ein Werth von ν' und umgekehrt gefunden werden kann, so charakterisirt sie sich als allgemeinste Gleichung der Projectivität und liefert zugleich den Beweis, dass zur projectivischen Beziehung von zwei Gebilden drei Elemente eines jeden als entsprechende beliebig angenommen werden können, dann aber jedes weitere entsprechende Paar vollständig bestimmt ist.

Wenn zwei gerade Gebilde auf derselben Geraden liegen oder zwei Büschel denselben Mittelpunkt, resp. Achse haben, so fallen dabei zwei Paare entsprechender Elemente zusammen; denn vermöge der Gleichung (α) ergeben sich für entsprechende Elemente die Ausdrücke

$$A_0 + \lambda A_1 = 0; \; A_0 - \frac{b\lambda + d}{a\lambda + c} A_1 = 0$$

welche identisch werden, wenn

$$\lambda = -\frac{b\lambda + d}{a\lambda + c}, \text{ also } a\lambda^2 + (b + c)\lambda + d = 0 \qquad (\alpha^*)$$

ist, d. h. für die beiden Wurzelwerthe dieser quadratischen Gleichung. Von besonderer Wichtigkeit bei in der angegebenen Weise zusammenliegenden Gebilden ist folgendes: es kann nämlich ein jedes Element sowohl dem einen als auch dem andern angehörig betrachtet werden und hat im Allgemeinen je nach der gewählten Auffassung ein anderes entsprechendes. Man findet aus der Gleichung (α) als dem Element μ der ersten Reihe entsprechend $\nu' = -\frac{b\mu + d}{a\mu + c}$ der zweiten, und wenn μ zur zweiten Reihe gerechnet wird $\nu = -\frac{c\mu + d}{a\mu + b}$ aus der ersten; ist nun $b = c$ in der Gleichung (α), so geht dieselbe über in

$$(\beta) \qquad a\nu\nu' + b(\nu + \nu') + d = 0$$

und ergeben sich dann für ν und ν' dieselben Werthe. Die Gleichung (β) drückt daher die Bedingung aus, unter welcher in den beiden Gebilden zwei entsprechende Elemente sich wechselseitig entsprechen, d. h. so, dass man jedes von ihnen sowohl zum einen als zum andern Gebilde rechnen kann, ohne ihr Entsprechen zu stören. Die Gebilde befinden sich dann in sogenannter Involution; von der dieselbe anzeigenden Gleichung (β) werden wir später bei Betrachtung unserer Curven 3. Ordnung wiederholt Anwendung machen.

Sehen wir nun, auf welche Weise durch die projectivische Beziehung der Uebergang von den Grundgebilden zu zusammengesetzteren vermittelt wird; es erscheinen solche als Erzeugnisse der den entsprechenden Elementenpaaren zweier projectivischen Gebilde gemeinsamen Punkte, Geraden oder Ebenen. Betrachten wir zunächst zwei Grundgebilde in der Ebene, so ist der Ort der Verbindungslinien von je einem entsprechenden Punktpaare zweier geraden Gebilde ein Strahlenbüschel 2. Ordnung (Kegelschnitt als Enveloppe seiner Tangenten oder Curve 2. Classe) und bilden andererseits die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen von zwei collinearen Strahlenbüscheln eine Punktreihe 2. Ordnung (gleichfalls ein Kegelschnitt als Curve 2. Ordnung zu betrachten). Analytisch ergiebt sich dies einfach daraus, dass das Resultat der Elimination von λ aus den Gleichungen

$$A_0 + \lambda A_1 = 0; \quad B_0 + \lambda B_1 = 0$$

der beiden projectivischen Grundgebilde, nämlich der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} A_0, B_0 \\ A_1, B_1 \end{vmatrix} = A_0 B_1 - A_1 B_0 = 0$$

in Bezug auf die in u, v, resp. x, y linearen Factoren A_0, A_1, B_0, B_1 vom 2. Grade ist, und erkennt man aus der vorhergehenden Erzeugung der Kegelschnitte, dass die Eigenschaft derselben, sich selbst reciprok zu sein, unmittelbar durch das eigenthümliche Gegenüberstehen der ebenen Grundgebilde bedingt ist. Ein Strahlenbüschel einerseits und ein gerades Gebilde andererseits geben unmittelbar zu keinem neuen Gebilde Veranlassung, wesshalb wir hier nicht darauf eingehen.

Was nun weiter zwei Grundgebilde im Raume betrifft, so werden, wie wir oben gesehen, einige derselben gleichfalls durch die vorigen Gleichungen dargestellt und erhält man als Erzeugniss zweier collinearen geraden Gebilde die Regelschaar (geradliniges Hyperboloid) und als solches von zwei projectivischen Ebenenbüscheln dasselbe Gebilde. In dem besondern Fall, dass die geraden Gebilde, resp. die Achsen der Büschel in einer Ebene liegen, modificirt sich dieses Resultat und ergiebt sich im ersten Fall ein Strahlenbüschel 2. Ordnung, im andern eine Kegelfläche 2. Ordnung, weil das eine Mal auch alle Verbindungsstrahlen homologer Punkte in einer Ebene liegen, das andere Mal alle Schnittlinien entsprechender Ebenen durch einen Punkt gehen. Analytisch werden die beiden projectivischen Gebilde dann dargestellt durch die Gleichung

$$A_0 + \lambda A_1 = 0; \quad B_0 + \lambda A_0 = 0$$

und das Resultat (der Strahlenbüschel 2. Ordnung, resp. die Kegelfläche 2. Ordnung) durch

$$A_0^2 - A_1 B_0 = 0.$$

Die Combination eines geraden Gebildes mit dem Ebenenbüschel liefert kein unmittelbares Erzeugniss; ebenso wenig zwei Strahlenbüschel im Raum, wenn nicht angenommen wird, dass dieselben concentrisch seien oder dass sie in einer Ebene liegen; bei der letzteren Voraussetzung erhält man dann dasselbe Erzeugniss wie in der Ebene, nämlich die Punktreihe 2. Ordnung, im andern wird durch jedes Paar entsprechender Strahlen eine Ebene bestimmt, die durch das gemeinsame Centrum der beiden Büschel geht und einen bestimmten Kegel 2. Ordnung tangirt, wie sich mit Rücksicht auf die Schnittfigur des Gebildes mit einer beliebigen Ebene sogleich ergiebt. Es soll dieses System Ebenenbüschel 2. Ordnung genannt werden. Wenn auch wegen der unbequemen Darstellung des Strahlenbüschels im Raum (durch 2 Gleichungen $A_0 + \lambda A_1 = 0$; $B_0 = 0$) die analytische Herleitung dieser Resultate ziemlich weitläufig

ist, so hat man doch für sie selbst mit Rücksicht auf die im ersten Capitel gefundenen Gleichungen von Curven im Raum, und von developpablen Oberflächen, die jenen reciprok sind, den einfachen Ausdruck

$$A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 = 0.$$

Dieselben beiden Gebilde treten auch, wie man ohne weiteres erkennt, auf bei Zusammenstellung des Strahlenbüschels mit je einem der beiden andern Grundgebilde der ersten Stufe, nämlich die Punktreihe 2. Ordnung bei seiner Zusammenstellung mit dem Ebenenbüschel und der Ebenenbüschel 2. Ordnung bei der mit dem geraden Gebilde. Die gefundenen Resultate stellen wir folgendermassen tabellarisch zusammen:

	Gerades Gebilde.	Strahlenbüschel.	Ebenenbüschel.
Gerades Gebilde.	Regelschaar. Strahlenbüschel 2. Ordnung, wenn die Gebilde in einer Ebene liegen.	Ebenenbüschel 2. Ordnung	
Strahlenbüschel.	Ebenenbüschel 2. Ordnung.	Punktreihe 2. Ordnung, wenn die Gebilde in einer Ebene liegen. Ebenenbüschel 2. Ordnung, wenn die Gebilde denselb. Mittelpkt. haben.	Punktreihe 2. Ordnung.
Ebenenbüschel.		Punktreihe 2. Ordnung.	Regelschaar. Kegelfläche 2. Ordnung, wenn die Achsen der Büschel in einer Ebene.

und schliessen daran denjenigen analytischen Ausdruck derselben, welcher sie befähigt auf die Grundgebilde und auf einander projectivisch bezogen zu werden; man hat

$$[A_0 + \lambda A_1 = 0; \quad B_0 + \lambda B_1 = 0]$$

als Gleichungen der Regelschaar sowohl für Ebenen als für Punkt-Coordinaten,

$$[A_0 + \lambda A_1 = 0; \quad B_0 + \lambda A_0 = 0]$$

als Gleichung des Strahlenbüschels 2. Ordnung in Ebenencoordinaten, und als solche der Kegelfläche 2. Ordnung in Punktcoordinaten, endlich

$$A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 = 0$$

als Gleichung der Punktreihe 2. Ordnung in Ebenencoordinaten und als solche des Ebenenbüschels 2. Ordnung in Punktcoordinaten. Diese fünf Gebilde werden dann unter dem Namen der Elementargebilde zusammengefasst.

Wenden wir uns nun zunächst zur Betrachtung projectivisch auf*einander* bezogener Grundgebilde zweiter Stufe, also ebener Systeme

und Strahlenbündel, so entspricht jedem geraden Gebilde eines ebenen Systems in dem dazu collinearen ebenen System gleichfalls ein gerades Gebilde und jedem Ebenenbüschel in einem Strahlenbündel ein eben solcher in dem dazu projectivischen Strahlenbündel. Denkt man nämlich in den Gleichungen

$$A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 = 0; \; B_0 + \lambda B_1 + \mu B_2 = 0$$

der beiden projectivischen Gebilde einer von den Constanten, etwa λ einen bestimmten Werth l beigelegt, so nehmen sie die Form

$$(A_0 + l A_1) + \mu A_2 = 0; \; (B_0 + l B_1) + \mu B_2 = 0$$

jener Grundgebilde der ersten Stufe an. Es entspricht aber auch jedem ebenen Strahlenbüschel in dem einen der projectivischen Gebilde ein solcher im andern, d. h. allen durch einen Punkt gehenden Strahlen des einen ebenen Systems entsprechen gleichfalls durch einen Punkt gehende Strahlen des andern und allen in einer Ebene liegenden Strahlen des einen Büschels sind homolog auch einer Ebene angehörende Strahlen des andern; es lehrt dies ein Blick auf die Gleichungen der Gebilde in folgender Schreibart:

$$(A_0 + \lambda A_1) + \mu A_2 = 0; \; (B_0 + \lambda B_1) + \mu B_2 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich dann weiter, dass in zwei collinearen ebenen Systemen unendlich viele Paare von entsprechenden Strahlen vorkommen, welche einander begegnen und daher in einer Ebene liegen, sowie dass in projectivischen Strahlenbündeln es unendlich viele Paare von in einer Ebene liegenden und daher sich schneidenden homologen Strahlen gibt, und können daher die Gebilde auch in folgender Weise durch Gleichungen repräsentirt werden:

$$[A_0 + \lambda A_1 = 0; \; A_1 + \lambda A_2 = 0]; \; [A_2 + \lambda A_3 = 0; \; A_1 + \lambda A_2 = 0],$$

wobei $A_1 + \lambda A_2 = 0$ den Schnittpunkt von je 2 homologen Strahlen der ebenen Systeme, resp. die Ebene von je 2 entsprechenden Strahlen der Bündel darstellt. Das vorstehende Gleichungssystem, welches nur die 3 verschiedenen Gleichungen

$$A_0 + \lambda A_1 = 0; \; A_1 + \lambda A_2 = 0; \; A_2 + \lambda A_3 = 0$$

enthält, ist, wenn λ negativ genommen wird, identisch mit den Gleichungen (4) des ersten Capitels und repräsentirt also je nach der Interpretation die Raumcurve 3. Ordnung oder die ihr reciproke abwickelbare Oberfläche. Wir sehen daher, dass die Raumcurve 3. Ordnung und das System der sich einer solchen anschmiegenden Ebenen auf ganz dieselbe Weise durch zwei projectivische Grundgebilde zweiter Stufe im Raum erzeugt wird, wie die Curve 2. Ordnung und das System ihrer Tangenten durch Gebilde erster Stufe in der Ebene und haben damit das die verwandtschaftliche Natur beider Gebilde bedingende Moment gefunden.

Ohne auf Folgerungen, welche sich für die weitere Untersuchung der Raumcurven 3. Ordnung hieraus ziehen lassen, einzugehen, wollen wir zunächst versuchen, ob diese krummen Linien nicht auch noch auf andere Weise durch projectivische Gebilde erhalten werden können. Wir lassen uns dabei von der Bemerkung leiten, dass im ersten Capitel durch Elimination von λ aus den Gleichungen (6)

$$U_0 - 2\lambda U_1 + \lambda^2 U_2 = 0; \; U_1 - 2\lambda U_2 + \lambda^2 U_3 = 0$$

einer Tangente die Gleichung (8) der Tangentenfläche unserer Raumcurve erhalten wurde. Jene Gleichungen (6) erscheinen uns jetzt mit Rücksicht auf die vorhergehenden Entwicklungen als Gleichungen von 2 collinearen Punktreihen 2. Ordnung, welche in der Schnittlinie ihrer Ebenen eine gemeinsame Tangente besitzen und wir erhalten daher die Tangentenfläche der Raumcurve 3. Ordnung als Erzeugniss der Projectionsstrahlen von entsprechenden Punkten jener beiden Reihen 2. Ordnung, welche die angegebene Lage zu einander haben. Reciprok interpretirt stellen uns die Gleichungen (6) zwei Ebenenbüschel 2. Ordnung oder, wie wir zum bequemeren Ausdruck des folgenden lieber sagen wollen, die Systeme von Tangentenebenen zweier Kegel zweiten Grades dar, welche letztere einen Strahl gemein haben, und liefern dann die Durchschnitte entsprechender Ebenen gleichfalls jene Reciprokalfläche der Curve 3. Ordnung.

Versuchen wir nun im Hinblick hierauf durch projectivische Zusammenstellung zwischen einem der 5 Elementargebilde und einem der 3 Grundgebilde erster Stufe die Raumcurve 3. Ordnung, resp. ihre Reciprokalfläche zu erhalten, so hat man von den 15 möglichen Combinationen sofort die auszuscheiden, welche gar kein geometrisches Resultat geben, nämlich: gerades Gebilde und Ebenenbüschel 2. Ordnung; Strahlenbüschel 1. Ordnung und Regelschaar; Ebenenbüschel 1. Ordnung und Punktreihe 2. Ordnung; dann solche, welche nur in bestimmten Lagen und zwar ebene Curven oder Kegelflächen liefern, nämlich: Strahlenbüschel 1. Ordnung mit eben dem 2. Ordnung und der Kegelfläche 2. Ordnung endlich als gleichfalls nur ebene Curven, resp. Kegelflächen liefernd: gerades Gebilde und Kegelfläche, Strahlenbüschel 1. Ordnung und Punktreihe 2. Ordnung oder Ebenenbüschel 2. Ordnung und zuletzt den Ebenenbüschel 1. Ordnung mit dem Strahlenbüschel 2. Ordnung. Man ist daher auf die noch übrigen 6 Zusammenstellungen angewiesen; betrachten wir zunächst die Gleichungen

$$A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 = 0; \; B_0 + \lambda B_1 = 0,$$

so stellen sie je nach der Interpretation entweder eine Punktreihe 2. Ordnung und eine dazu projectivische Punktreihe 1. Ordnung oder ein Ebenenbüschel 2. Ordnung und ein dazu collineares 1. Ordnung dar; wird aus beiden λ eliminirt, so repräsentirt die resultirende Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_0, A_1, A_2 \\ B_0, B_1, 0 \\ 0, B_0, B_1 \end{vmatrix} = 0$$

das einemal eine Regelfläche dritter Ordnung, das anderemal eine ebensolche dritter Classe, welche in Folge des Satzes von Cayley[1]), dass die Ordnung einer jeden nicht abwickelbaren Regelfläche gleich ihrer Classe ist, identisch sind.

Die 4 noch übrigen Fälle werden sämmtlich repräsentirt durch die Gleichungen

$$A_0 + \lambda A_1 = 0; \; [B_0 + \lambda B_1 = 0; \; C_0 + \lambda C_1 = 0];$$

denn es stellen dieselben bei Interpretation in Ebenencoordinaten ein gerades Gebilde und eine Regelschaar dar, welche im Fall, dass $C_0 = B_1$ ist, wie wir früher gesehen, in den Strahlenbüschel 2. Ordnung übergeht; für die Punktcoordinaten sind sie die Gleichungen von einem Ebenenbüschel 1. Ordnung und einer Regelschaar, die durch dieselbe Voraussetzung wie vorher in die Kegelfläche übergeführt werden kann. Man kann, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, dieselben durch das System

$$A_0 + \lambda A_1 = 0; \; A_1 + \lambda A_2 = 0; \; A_2 + \lambda A_3 = 0$$

ersetzen, welches mit der Gleichung (3*) unserer Curve identisch ist und daher im ersteren Falle das sich ihr anschmiegende Ebenensystem repräsentirt; denn die Regelschaar $[A_0 + \lambda A_1 = 0; \; A_2 + \lambda A_3 = 0]$ hat mit jeder Geraden 2 Punkte gemein und kann die letztere also dargestellt werden durch $A_1 + \lambda A_2 = 0$; ebenso hat der Strahlenbüschel 2. Ordnung $[A_0 + \lambda A_1 = 0; \; A_1 + \lambda A_2 = 0]$ mit jeder Graden einen Punkt gemein, so dass also die letztere durch $A_2 + \lambda A_3 = 0$ repräsentirt werden darf. Im andern Fall für Gleichungen zwischen Punktcoordinaten sind offenbar dieselben vereinfachenden Voraussetzungen gestattet, und wir erhalten daher die Curve 3. Ordnung selbst als Erzeugniss von einer Regelschaar und einem dazu projectivischen Ebenenbüschel, oder als solches von einer Kegelfläche und einem zu derselben collinearen Ebenenbüschel. Wir können daher die Raumcurve 3. Ordnung in allgemeinster Weise durch die vorher geschriebenen Gleichungen

$$(11) \qquad A_0 + \lambda A_1 = 0; \; B_0 + \lambda B_1 = 0; \; C_0 + \lambda C_1 = 0$$

analytisch ausdrücken und bestätigen dies noch folgendermassen. Eliminirt man aus je 2 dieser Gleichungen λ, so erhält man

$$\begin{vmatrix} A_0, B_0 \\ A_1, B_1 \end{vmatrix} = A_0 B_1 - A_1 B_0 = 0$$

und

---

*) Vgl. Cambridge and Dublin Math. Journal. VII. pag. 171.

$$\begin{vmatrix} A_0, & C_0 \\ A_1, & C_1 \end{vmatrix} = A_0 C_1 - A_1 C_0 = 0$$

die Gleichungen von zwei Hyperboloiden, welche eine Gerade, die Schnittlinie der Ebenen $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$, gemein haben; da nun ihr vollständiger Durchschnitt vom 4. Grad ist, so muss er aus jener Geraden und einer Raumcurve 3. Ordnung bestehen. In gleicher Weise kann man auch aus dem einfacheren System

$$U_0 - \lambda U_1 = 0; \; U_1 - \lambda U_2 = 0; \; U_2 - \lambda U_3 = 0,$$

welches unsere Raumcurve darstellt, Gleichungen von Flächen 2. Grades herleiten, die sich in einer Geraden und der Curve schneiden, nämlich die eines einfachen Hyperboloids:

$$U_0 U_3 - U_1 U_2 = 0$$

und die von zwei Kegeln zweiten Grades:

$$U_1^2 - U_0 U_2 = 0; \; U_2^2 - U_1 U_3 = 0.$$

Wegen dieses Auftretens der Raumcurve 3. Ordnung als Schnitt von 2 Kegeln, die einen gemeinsamen Strahl haben, wollen wir sie in Zukunft kurz einen cubischen Kegelschnitt nennen.

Das System (11) gibt noch eine andere Erzeugung der Raumcurven 3. Ordnung durch projectivische Gebilde an die Hand; betrachtet man nämlich von den Gleichungen desselben jede für sich, so stellen sie je nach der Interpretation 3 projectivische Ebenenbüschel, resp. Punktreihen dar, jeder 3 entsprechenden Ebenen der 3 Büschel gemeinsame Punkt gehört dann einer bestimmten Raumcurve 3. Ordnung an und jede durch 3 entsprechende Punkte der geraden Gebilde bestimmte Ebene osculirt eine solche. Man hat daher die folgenden Sätze, welche die Analogie zwischen ebenen und cubischen Kegelschnitten noch von einer andern Seite beleuchten:

> Der Ort des Durchschnittspunkts von je 3 entsprechenden Ebenen dreier projectivischer Ebenenbüschel ist eine Raumcurve 3. Ordnung

und

> Die Verbindungsebenen von je 3 entsprechenden Punkten dreier projectivischen geraden Gebilde erzeugen eine abwickelbare Fläche, deren Wendecurve eine Raumcurve 3. Ordnung ist, die daher von jenen Ebenen osculirt wird.

Vermöge der verschiedenen Modificationen, durch welche man die projectivische Beziehung von 3 Gebilden vermitteln kann, geben sie Veranlassung zu einer Menge von interessanten Sätzen, von denen wir hier nur einige herausheben wollen; z. B.

> Wenn drei Flächenwinkel sich um ihre als fest angenommene *Kanten* dergestalt drehen, dass die Durchschnittspunkte dreier *Seitenflächen* von ihnen immer auf einer gegebenen Geraden

liegen, so erzeugt der Durchschnittspunkt der 3 andern Seitenflächen einen cubischen Kegelschnitt, der jene 3 Kanten zu Sehnen hat.

Es ist dieser Satz analog dem bekannten Newton'schen über die organische Erzeugung der Kegelschnitte in der Planimetrie:

Wenn 2 Winkel von constanter Grösse sich um ihre Scheitel so drehen, dass der Durchschnittspunkt zweier ihrer Schenkel eine Gerade durchläuft, so beschreibt der Schnittpunkt der beiden andern Schenkel einen Kegelschnitt, der durch die als fest angenommenen Scheitel jener Winkel geht.

Ein anderer Satz über die Beschreibung von Kegelschnitten (Theorem von Maclaurin und Braikenridge):

Wenn sich 3 Seiten eines Dreiecks von veränderlicher Gestalt um 3 feste Punkte drehen und dabei 2 Ecken desselben 2 feste Gerade durchlaufen, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt, welcher durch die beiden Punkte geht, um welche sich die dieser Ecke anliegenden Seiten drehen,

gibt Veranlassung zu den folgenden für cubische Kegelschnitte:

Wenn die 4 Seitenflächen eines Tetraeders durch feste gerade Linien gehen und 3 seiner Ecken sich in festen geraden Linien bewegen, so ist der Ort der letzten Ecke ein cubischer Kegelschnitt

und

Wenn man durch die Schnittlinien einer sich um eine feste Achse drehenden Ebene mit 3 festen Ebenen und drei feste Punkte Ebenen legt, so schneiden sich die letztern auf einem cubischen Kegelschnitt.

Verallgemeinerungen des reciproken Hauptsatzes sind beispielsweise folgende:

Wenn die vier Eckpunkte eines Tetraeders 4 feste Gerade durchlaufen, während drei seiner Seitenflächen durch feste Gerade gehen, so beschreibt die 4. Seitenfläche eine abwickelbare Oberfläche, deren Wendecurve ein cubischer Kegelschnitt ist,

und:

Wenn die Spitze eines körperlichen Dreiecks eine Gerade durchläuft, während sich seine Kanten um feste Punkte drehen, so bestimmen die Punkte, in welchen 3 feste Ebenen von jenen Kanten getroffen werden, eine Ebene, welche einen cubischen Kegelschnitt osculirt, mithin in ihren successiven Lagen die Tangentenfläche desselben erzeugt.

u. s. w., u. s. w.

Drittes Capitel.

Die im ersten Capitel gefundene Gleichung (3*) und ihr daselbst gegebener Ausdruck als Satz führt unmittelbar darauf hin, statt des bisher angewandten rechtwinkligen Coordinatensystems unsere Raumcurve auf ein tetraedrisches Coordinatensystem zu beziehen, worin bekanntlich die Coordinaten eines Punkts definirt werden als seine Entfernungen von den 4 Seitenebenen eines Tetraeders, sodass zwar drei davon zur Fixirung des Punkts schon ausreichen, und nur die Verhältnisse der 4 benutzten von einander unabhängig sind, und dessen Hauptvorzug in der Homogeneität der auf es bezüglichen Gleichungen besteht. Die allgemeinen Symbolgleichungen des ersten Capitels behalten selbstverständlich für ein solches System ihre Gültigkeit, und werden sich für die Raumcurve 3. Ordnung, wobei sich die Ebenen $U_0 = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ naturgemäss als Fundamentalebenen ergeben, ausser dem schon erwähnten Vorzug der Homogeneität der Gleichungen, sogleich noch verschiedene andere Vortheile herausstellen.

Untersuchen wir zunächst, in welcher Beziehung die Fundamentalebenen zur Curve stehen; die Gleichungen $U_0 = 0$ und $U_3 = 0$ ergeben sich aus der Gleichung (10) einer Osculationsebene für die Werthe $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ des Parameters; für dieselben Werthe erhält man aus den Gleichungen (6) $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ als Gleichungen von Tangentenebenen der Curve, sodass dieselbe also durch die Ecken 0 1 2 und 1 2 3 des Fundamentaltetraeders geht, und in der ersteren die Ebene $U_0 = 0$ osculirt und die Ebene $U_1 = 0$ berührt, während sie in der andern die Ebene $U_3 = 0$ osculirt und die Ebene $U_2 = 0$ tangirt. Mit Rücksicht hierauf lässt sich dann auch der am Schluss des ersten Capitels gegebene Satz noch etwas specialisiren.

Wir werden im Folgenden immer die Gleichungen der Fundamentalebenen $U_0 = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ als in der Normalform gegeben voraussetzen, so dass durch Substitution der rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ eines Punkts in dieselben die tetraedrischen Coordinaten desselben unmittelbar ausgedrückt werden durch

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3.$$

Es seien nun $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ die Coordinaten eines beliebigen Punkts im Raum, dann werden die Parameter ω von Punkten unseres cubischen Kegelschnitts (3*), deren Schmiegungsebenen durch jenen Punkt hindurchgehen, gefunden aus der Gleichung (10), welche dann die Form

$$x_0 - 3\,x_1\,\omega + 3\,x_2\,\omega^2 - x_3\,\omega^3 = 0$$

annimmt, und erkennt man darin, dass dieser Gleichung 3 reelle oder

imaginäre Werthe von ω genügen, zunächst den Beweis des schon früher gegebenen Satzes:

Die Raumcurve 3. Ordnung ist auch von der dritten Classe, d. h. es sind von jedem Punkte des Raumes 3 Osculationsebenen an sie möglich.

Nimmt man nun an, die 3 sich aus jener Gleichung ergebenden Parameterwerthe seien reell und bezeichnet sie mit ω_1, ω_2, ω_3, so erhält man

$$U_0 - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) U_1 + (\omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3) U_2 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 U_3 = 0$$

als Gleichung der durch die 3 Curvenpunkte möglichen Ebene, und kann dieselbe mit Rücksicht auf die zwischen den Coefficienten einer algebraischen Gleichung und ihren Wurzeln stattfindenden bekannten Relationen schreiben

$$x_3 U_0 - x_0 U_3 + 3 (x_1 U_2 - x_2 U_1) = 0,$$

welche letztere offenbar befriedigt wird durch die Coordinatenwerthe

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3,$$

d. h. die Coordinaten des gegebenen Punkts. Dies giebt den Satz:

Die Osculationsebenen von drei beliebigen Punkten eines cubischen Kegelschnitts schneiden sich in einem Punkt, der mit ihnen in einer Ebene liegt.

Als Coordinaten des Schnittpunkts von 3 Osculationsebenen in den Punkten ω_1, ω_2, ω_3 erhält man mit Rücksicht auf das Vorige unmittelbar

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = 3 \omega_1 \omega_2 \omega_3 : (\omega_1 \omega_2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3) : (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) : 3,$$

und findet auch umgekehrt, wenn

$$U_0 - \lambda U_1 + \mu U_2 - \nu U_3 = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Ebene ist, dass sich in dem in ihr gelegenen Punkte

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = 3 \nu : \mu : \lambda : 3$$

drei Osculationsebenen der Curve schneiden, nämlich die der 3 Punkte, welche jene Ebene mit der Curve gemein hat.

Es wird vortheilhaft sein, einige vorher mit der Curve in Verbindung gebrachten Geraden und Ebenen in dem neuen Coordinatensystem in der Weise auszudrücken, dass man ihre oben aufgestellten Gleichungen mit Einführung von unbestimmten Constanten durch aequivalente Systeme ersetzt, welche unmittelbar die tetraedrischen Coordinatenwerthe der jenen Geraden und Ebenen angehörigen Punkte geben. Wir finden auf diese Weise als Coordinaten von Punkten auf der durch die Curvenpunkte ω und ϑ gehenden Secante die Ausdrücke:

$$(5^*) \quad U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = [(\omega + \vartheta)^2 - \omega\,\vartheta]\, l - (\omega + \vartheta)\, \omega\, \vartheta : (\omega + \vartheta)\, l - \omega\, \vartheta : l : 1,$$

woraus für Punkte der durch ω gehenden Tangente

$$(6^*) \quad U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = 3\, \omega^2\, l - 2\, \omega^3 : 2\, \omega\, l - \omega^2 : l : 1$$

hervorgeht; ebenso ergibt sich für die der Osculationsebene am Punkt ϑ angehörigen Punkte

$$(10^*) \quad U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = 3\, \vartheta\, m - 3\, \vartheta^2\, n + \vartheta^3 : m : n : 1.$$

Die Coordinatenwerthe (5*) liefern mit den Coordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ eines beliebigen Punkts verglichen durch Auflösung der Gleichungen:

$$[(\omega + \vartheta)^2 - \omega\,\vartheta]\, l - (\omega + \vartheta)\, \omega\, \vartheta : (\omega + \vartheta)\, l - \omega\, \vartheta : l : 1 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3$$

nur ein System Werthe für l, ω und ϑ, nämlich

$$l = \frac{x_2}{x_3};\ \omega + \vartheta = \frac{x_1\, x_2 - x_0\, x_3}{x_2^{\,2} - x_1\, x_3};\ \omega\, \vartheta = \frac{x_1^{\,2} - x_0\, x_2}{x_2^{\,2} - x_1\, x_3}$$

und damit den Beweis von folgendem Satz:

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes geht nur eine Sehne einer Raumcurve 3. Ordnung, d. h. es ist durch ihn nur eine Gerade möglich, welche der Curve in 2 Punkten begegnet.

Durch Einsetzen der obigen Werthe von $\omega + \vartheta$ und $\omega\, \vartheta$ in die Gleichungen

$$U_0 - (\omega + \vartheta)\, U_1 + \omega\, \vartheta\, U_2 = 0;\ U_1 - (\omega + \vartheta)\, U_2 + \omega\, \vartheta\, U_3 = 0$$

der durch die Curvenpunkte ω und ϑ gehenden Secante erhält man

$$(x_2^2 - x_1\, x_3)\, U_0 - (x_1\, x_2 - x_0\, x_3)\, U_1 + (x_1^2 - x_0\, x_2)\, U_2 = 0$$
$$(x_2^2 - x_1\, x_3)\, U_1 - (x_1\, x_2 - x_0\, x_3)\, U_2 + (x_1 - x_0\, x_2)\, U_3 = 0$$

als Gleichungen der durch den Punkt $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ möglichen Sehne unserer Curve. Die Werthe von ω und ϑ findet man in bekannter Weise als Wurzeln einer quadratischen Gleichung und können sie daher sowohl reell als auch imaginär sein; bildet man die Bedingung

$$(x_1\, x_2 - x_0\, x_3)^2 - 4\, (x_2^2 - x_1\, x_3)\, (x_1^2 - x_0\, x_3) = 0,$$

unter welcher jene quadratische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, so sind von den Punkten, deren Coordinaten ihr genügen, Tangenten an die Curve möglich, und liegen dieselben daher in der Tangentenfläche der Curve, mit deren Gleichung auch die vorstehende Bedingungsgleichung übereinstimmt. Reciprok zu dem eben gegebenen Satz ist der folgende:

In jeder Ebene schneiden sich zwei Osculationsebenen der Raumcurve 3. Ordnung.

Wir werden später bei der ausführlichen Untersuchung der durch cubische *Kegelschnitte* bedingten Reciprocitätsverhältnisse im Raum die Gleichungen jener Schnittlinie für eine bestimmte Ebene aufstellen.

Durch Gleichsetzen der Werthe (6*) mit Coordinaten $x_0 + k\,y_0 : x_1 + k\,y_1 : x_2 + k\,y_2 : x_3 + k\,y_3$ eines der Verbindungslinie der Punkte x und y angehörenden Punkts lassen sich im allgemeinen 4 zusammengehörige Systeme von Werthen für ω, l und k bestimmen; man findet nämlich zur Bestimmung von ω die biquadratische Gleichung:

$$\omega^4 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - 2\,\omega^3 (x_1 y_3 - x_3 y_1) + \omega^2 [x_0 y_3 - x_3 y_0 - 3 (x_2 y_1 - x_1 y_2)] - 2\,\omega\,(x_2 y_0 - x_0 y_2) + (x_0 y_1 - x_1 y_0) = 0$$

während sich k und l aus den linearen Gleichungen

$$k = -\frac{\omega^2 x_3 - 2\,\omega\,x_2 + x_1}{\omega^2 y_3 - 2\,\omega\,y_2 + y_1}; \quad l = \frac{x_2 + k\,y_2}{x_3 + k\,y_3}$$

ergeben und erkennt darin den Beweis des folgenden Satzes:

> Auf einer beliebigen Geraden gibt es immer 4 Punkte, von denen aus Tangenten an einen gegebenen cubischen Kegelschnitt gezogen werden können; d. h. die Raumcurven 3. Ordnung sind vom 4. Rang.

Dieser Satz, welcher sich auch leicht aus den früher angegebenen Beziehungen zwischen einer Raumcurve und ihrer Reciprokalfläche vermittelst der Bemerkung, dass die letztere für den cubischen Kegelschnitt mit seiner Tangentenfläche identisch, also vom 4. Grade ist, herleiten lässt, lautet kürzer ausgedrückt:

> Jede Gerade begegnet 4 Tangenten der Raumcurve 3. Ordnung.

Als specielle Fälle verdienen hierbei hervorgehoben zu werden folgende: wenn jene Gerade die Curve in einem Punkte schneidet, so begegnet sie ausser der Tangente dieses Punkts nur noch zweien andern Tangenten der Curve und wenn sie zwei Punkte mit der Curve gemein hat, also eine Sehne derselben ist, so wird sie nur von den beiden Tangenten in jenen Punkten geschnitten. Es geht nämlich die obige Bestimmungsgleichung für ω, wenn darin

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \vartheta^3 : \vartheta^2 : \vartheta : 1$$

gesetzt wird, über in

$$(\omega^2 - 2\,\vartheta\,\omega + \vartheta^2)\,[\omega^2 (\vartheta\,y_3 - y_2) - 2\,\omega\,(\vartheta\,y_2 - y_1) + (\vartheta y_1 - y_0)] = 0,$$

worin der erste Factor ein vollständiges Quadrat ist, so dass also zwei ihrer Wurzelwerthe $= \vartheta$ sind; wird dann ferner angenommen

$$y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1,$$

so wird mit Hinweglassung des Factors $(\vartheta - \lambda)$ auch der zweite Factor ein vollständiges Quadrat, nämlich das von $(\omega - \lambda)$. Es folgt aus diesen Eigenschaften, dass keine 2 Tangenten eines cubischen Kegelschnittes in derselben Ebene liegen, und dann mit Rücksicht hierauf, dass, wenn 4 beliebige Tangenten einer Raumcurve 3. Ordnung gegeben *sind, immer 2 Gerade* existiren, welche ihnen allen vieren begegnen;

weil nämlich das durch 3 von ihnen bestimmte geradlinige Hyperboloid die vierte derselben in 2 Punkten schneidet.

Durch Vergleichung der Ausdrücke (6*) und (10*) erhält man

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = 3\,\omega^2\,\vartheta : \omega\,(2\,\vartheta + \omega) : \vartheta + 2\,\omega : 3$$

als Coordinaten des Punkts, in welchem die Osculationsebene am Punkt ϑ von der Tangente am Punkt ω getroffen wird; die Gleichungen von 4 Ebenen, die durch eine feste Achse $U_1 = U_2 = 0$ und die 4 Punkte, in welchen die Tangente des Punkts ω die Osculationsebenen der resp. Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ trifft, hindurchgehen, werden daher erhalten, wenn man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ nacheinander in die Gleichung

$$\omega\,(2\,U_1 - \omega\,U_2) - \vartheta\,(2\,\omega\,U_2 - U_1) = 0$$

an Stelle von ϑ substituirt. Das anharmonische Verhältniss von diesen 4 Ebenen und mithin auch das der 4 Punkte auf der Tangente, durch die sie hindurchgehen, ist

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} : \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}$$

also von ω, d. h. von der Lage der Tangente ganz unabhängig. Dies beweist den Satz:

> Jede Tangente eines cubischen Kegelschnittes wird von 4 festen Osculationsebenen desselben in Punkten von constantem Doppelverhältniss getroffen.

Aus der Theorie der ebenen Kegelschnitte ist ihm analog der bekannte Satz:

> Jede Tangente eines Kegelschnitts wird von 4 festen Tangenten desselben in Punkten von constantem anharmonischen Verhältniss geschnitten.

Wie nun diesem Satz der Planimetrie dualistisch gegenübersteht der andere:

> Jeder Punkt eines Kegelschnitts liefert mit 4 festen Punkten desselben verbunden ein Büschel von 4 Strahlen, deren anharmonisches Verhältniss constant ist,

so gilt auch für die Raumcurven 3. Ordnung als reciproker Satz der folgende:

> Das anharmonische Verhältniss von 4 Ebenen, die durch 4 feste Punkte und eine beliebige Sehne eines cubischen Kegelschnitts gehen, ist constant,

dessen Beweis sich sehr einfach ergiebt; denn schreibt man die Gleichung (9) einer durch die Punkte ω, ϑ, λ der Raumcurve gehenden Ebene in folgender Weise:

$$U_0 - (\omega + \vartheta)\,U_1 + \omega\,\vartheta\,U_2 - \lambda\,[U_1 - (\omega + \vartheta)\,U_2 + \omega\,\vartheta\,U_3] = 0,$$

so stellt sie für $\lambda = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ den Büschel der 4 Ebenen dar, welche *durch die Sehne*

$$U_0 - (\omega + \vartheta)\, U_1 + \omega\,\vartheta\, U_2 = 0; \; U_1 - (\omega + \vartheta)\, U_2 + \omega\,\vartheta\, U_3 = 0$$

und die vier Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ hindurchgehen und das Doppelverhältniss

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} : \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}$$

ist dann von ω und ϑ ganz unabhängig. Gibt man demselben die Benennung „anharmonisches Verhältniss von 4 Punkten des cubischen Kegelschnitts" und dem im reciproken Satz vorkommenden „anharmonisches Verhältniss von 4 Osculationsebenen des cubischen Kegelschnitts," so erhält man den wichtigen Satz:

> Das anharmonische Verhältniss von 4 Osculationsebenen eines cubischen Kegelschnitts ist gleich dem anharmonischen Verhältniss ihrer Berührungspunkte

und bilden daher die Osculationsebenen einer Raumcurve 3. Ordnung eine zu der von ihren Berührungspunkten gebildeten Figur correlative[1]) Figur; eine Beziehung, die wir später aus einem allgemeinern Gesichtspunkt noch ausführlich zu erörtern haben und worin sich wieder die schon öfters betonte Eigenschaft des cubischen Kegelschnitts, wie der ebene Kegelschnitt sich selbst reciprok zu sein in bemerkenswerther Weise kundgibt. Der vorletzte Satz gilt auch noch, wenn die darin vorkommende Sehne in eine Tangente übergeht; er heisst dann:

> Das anharmonische Verhältniss von 4 Ebenen, welche durch 4 feste Punkte eines cubischen Kegelschnitts und eine beliebige Tangente desselben gehn, ist constant.

Ein anderer Ausdruck desselben, resp. des allgemeinen Satzes ist folgender:

> Wenn sich um 2 feste Tangenten (resp. Sehnen) eines cubischen Kegelschnitts Ebenen in der Weise drehen, dass ihre Schnittlinie immer der Curve begegnet, so bilden sie in ihren successiven Lagen zwei projectivische Ebenenbüschel und beschreibt daher jene Schnittlinie ein geradliniges Hyperboloid, welches durch den cubischen Kegelschnitt geht.

Wir schliessen an ihn seiner Aehnlichkeit wegen den folgenden:

> Wenn sich um eine Gerade, die einen Punkt mit einem cubischen Kegelschnitt gemein hat, eine Ebene dreht, so beschreibt die Verbindungslinie der beiden Punkte, in welchen diese Ebene die Curve trifft, ein einfaches Hyperboloid, welches auch durch die Curve geht.

---

1) Vergl. Chasles, Geschichte der Geometrie. Deutsch von Sohncke p. 253, oder auch Chasles, traité de géom. supér. Chap. XXVI.

Die Gerade, welche der Curve im Punkt ϑ begegnet, wird nämlich dargestellt durch die Gleichungen:

$$U_0 - \vartheta\, U_1 - h\,(U_1 - \vartheta\, U_2) = 0; \quad U_1 - \vartheta\, U_2 - k\,(U_2 - \vartheta\, U_3) = 0,$$

eine um sie rotirende Ebene also durch

$$U_0 - \vartheta\, U_1 - (h + l)\,(U_1 + \vartheta\, U_2) + k\,l\,(U_2 - \vartheta\, U_3) = 0,$$

worin l die die Lage der Ebene bestimmende Constante ist. Die Parameter der beiden andern Schnittpunkte dieser Ebene mit der Curve erhält man aus der durch Einsetzen von

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$$

in die obige Gleichung resultirenden quadratischen Gleichung

$$\omega^2 - (h + l)\,\omega + k\,l = 0,$$

sodass also in Folge der zwischen den Coefficienten einer Gleichung und ihren Wurzeln stattfindenden Relationen die Verbindungslinie jener Punkte dargestellt ist durch die Gleichungen

$$U_0 - (h + l)\,U_1 + k\,l\,U_2 = 0; \quad U_1 - (h + l)\,U_1 + k\,l\,U_3 = 0.$$

Eliminirt man aus denselben l, so ergibt sich die Gleichung

$$(U_0 - h\,U_1)\,(U_2 - k\,U_3) - (U_2 - h\,U_3)\,(U_2 - k\,U_3) = 0$$

des von der Geraden beschriebenen einfachen Hyperboloids.

Die vorher angegebenen beiden Fundamentalsätze über die anharmonische Eigenschaft von 4 Punkten, resp. 4 Tangenten eines ebenen Kegelschnittes finden für cubische Kegelschnitte noch weitere Analogien, zunächst eine, welche sich ausspricht in der im vorhergehenden Capitel ausführlich erörterten Erzeugung der Raumcurve 3. Ordnung vermittelst dreier projectivischer Grundgebilde und den sich daran schliessenden, der Newton'schen organischen Beschreibung der Kegelschnitte analogen Sätzen, auf die wir daher nur hinweisen wollen, dann eine andere, welche im Zusammenhang steht mit der früher gleichfalls schon gefundenen Erzeugung des cubischen Kegelschnittes durch projectivische Strahlenbündel und projectivische Ebenen. Man hat nämlich folgende Sätze:

> Die Verbindungslinien von zwei festen Punkten einer Raumcurve 3. Ordnung mit allen übrigen Curvenpunkten gehören zweien projectivischen Strahlenbündeln an; oder die Verbindungslinien von 4 festen Curvenpunkten mit zwei beliebigen andern bestimmen zwei collineare Strahlenbündel,

und als reciprok entgegenstehenden:

> Vier feste Osculationsebenen einer Raumcurve 3. Ordnung bestimmen in zwei andern solchen collineare ebene Systeme, nämlich durch 4 Paare entsprechender Geraden.

Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen der *Verbindungs-*, resp. Schnittlinien von 2 Punkten, resp. Ebenen ω und

ϑ mit den übrigen Curvenpunkten, resp. Osculationsebenen $x_1, x_2 \ldots$, nämlich

$$U_0 - \omega\, U_1 - x_n\ (U_1 - \omega\, U_2) = 0;$$
$$U_1 - \omega\, U_2 - x_n\ (U_2 - \omega\, U_3) = 0; \quad [n = 1, 2 \ldots]$$

und

$$U_0 - \vartheta\, U_1 - x_n\ (U_1 - \vartheta\, U_2) = 0;$$
$$U_1 - \vartheta\, U_2 - x_n\ (U_2 - \vartheta\, U_3) = 0; \quad [n = 1, 2 \ldots]$$

wenn man die im vorhergehenden Capitel angegebene analytische Darstellung projectivischer Strahlenbündel und collinearer ebener Systeme berücksichtigt.

In Anschluss an diese Sätze geben wir zunächst den Beweis von folgendem:

Die Verbindungslinien eines beliebigen Punkts auf einen cubischen Kegelschnitt mit allen übrigen Curvenpunkten bilden eine Kegelfläche zweiten Grades.

Die Gleichung

$$(U_0 - \vartheta\, U_1)\ (U_2 - \vartheta\, U_3) - (U_1 - \vartheta\, U_2)^2 = 0$$

derselben ergibt sich einfach durch Elimination des Parameters ω aus den Gleichungen

$$U_0 - (\omega + \vartheta)\, U_1 + \omega\,\vartheta\, U_2 = 0; \quad U_1 - (\omega + \vartheta)\, U_2 + \omega\,\vartheta\, U_3 = 0$$

der durch ω und ϑ gehenden Secante. Das hiezu reciproke Theorem, welches wir später besonders beweisen werden, heisst:

Jede Osculationsebene eines cubischen Kegelschnitts wird von allen übrigen Osculationsebenen in Geraden geschnitten, die sämmtlich einen bestimmten Kegelschnitt tangiren.

Der erstere dieser beiden Sätze lässt erkennen, dass 6 Punkte zur vollständigen Bestimmung eines cubischen Kegelschnittes genügen, indem durch Verbindung von irgend zweien davon mit den jedesmaligen fünf übrigen 2 Kegel zweiten Grades bestimmt werden, welche einen gemeinsamen Strahl haben und sich daher in einer Raumcurve 3. Ordnung schneiden. Ohne vor der Hand weiter hierauf einzugehen, leiten wir zunächst aus demselben Satze vermittelst des bekannten Theorems vom Pascal'schen Sechseck, welches ein Kriterium enthält, ob 6 Punkte einer Ebene einem Kegelschnitt angehören, ein ebensolches dafür ab, ob 7 Punkte des Raumes auf einer Raumcurve 3. Ordnung liegen. Angenommen, es seien 1, 2 ... 7 Punkte einer solchen, so sind nach dem Vorigen die Verbindungslinien eines derselben, etwa des Punkts 7 mit den übrigen, 6 Strahlen eines Kegels 2. Grades; eine beliebige Ebene wird daher von denselben in den auf einem Kegelschnitt gelegenen Punkten [1], [2] ... [6] getroffen und es liegen in dem durch dieselben *bestimmten Sechseck* die Schnittpunkte von je einem Paar Gegenseiten,

wie [1], [2] und [4], [5] u. s. w. auf einer Geraden; denkt man sich nun die durch den Punkt 7 und jene Geraden bestimmten Ebenen, so erkennt man sofort, dass die Schnittlinien der Ebenen [7 1 2, 7 4 5], [7 2 3, 7 5 6], [7 3 4, 7 6 1] in einer Ebene liegen. Dieses Resultat lässt sich folgendermassen übersichtlicher aussprechen:

In dem durch 7 Punkte einer Raumcurve 3. Ordnung gebildeten unebenen Siebeneck treffen die Ebenen 2 1 7, 1 7 6, 7 6 5 von den 3 successiven Ecken angehörigen Winkeln die Gegenseiten, resp. 5 4, 4 3, 3 2 in 3 Punkten, welche in einer Ebene liegen, die auch durch den Scheitel 7 des mittlern jener 3 Winkel geht,

denn die Verbindungslinien jener 3 Punkte mit der Ecke 7 sind, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, mit den ersterwähnten Durchschnittslinien der Ebenen [7 1 2, 7 4 5] u. s. w. identisch. Ein anderer Ausdruck desselben Satzes ist folgender:

Liegen 7 Punkte auf einer Raumcurve 3. Ordnung, so schneiden die durch einen von ihnen und die Seiten des von den 6 übrigen gebildeten unebenen Sechsecks gehenden Ebenen die betreffenden Gegenseiten desselben in 6 Punkten, die auf einer durch jenen ersten gehenden Ebene liegen und darin ein (Brianchon'sches) Sechseck bestimmen, indem ihre resp. Verbindungslinien, die Diagonalen desselben, sich in jenem Punkte schneiden.

Die Umkehrung dieses Satzes ist die gesuchte Bedingung, unter welcher 7 Punkte auf einem cubischen Kegelschnitt liegen; man hat dabei zu bedenken, dass die Behauptung des umzukehrenden Satzes für zwei Ecken erfüllt sein muss, weil, wenn auch etwa die Strahlen 7 1, 7 2, . . . 7 6 einem Kegel 2. Grades angehören, damit noch nicht bedingt ist, dass auch die Geraden 6 1, 6 2 . . . 6 7 auf einem ebensolchen liegen. Mit Rücksicht hierauf lautet dann die Umkehrung folgendermaassen:

Wenn ein nicht ebenes Siebeneck so beschaffen ist, dass die Ebene eines Winkels und die Ebenen der beiden zunächst liegenden Winkel die drei resp. Gegenseiten in Punkten treffen, welche in einer Ebene liegen, die durch den Scheitel des ersten Winkels geht, und wenn dasselbe für einen der sechs andern Winkel stattfindet, so liegen die 7 Scheitelpunkte des Siebenecks auf einem cubischen Kegelschnitt und trifft mithin die vorausgesetzte Eigenschaft bei allen Winkeln des Siebenecks ein.

Einige weitere hiermit im Zusammenhang stehende Eigenschaften, sowie die sich darauf gründenden Constructionen und ein eigenthümliche Analogon des Pascal'schen Satzes werden wir später betrachten und uns zunächt gegen einen Irrthum vorsehen, zu welchem man durch Umkehrung unserer obigen beiden Hauptsätze leicht verleitet werden könnte.

Es ist dies die Behauptung[1]), dass der geometrische Ort der Spitzen aller Kegel zweiten Grades, welche durch 6 feste Raumpunkte gehen, die durch jene Punkte bestimmte Raumcurve 3. Ordnung sei und dass die Ebenen aller Kegelschnitte, welche 6 feste Ebenen berühren, eine Regelfläche, deren Wendecurve ein cubischer Kegelschnitt ist, tangiren. Wir beschränken uns darauf zu zeigen, dass im erstern Fall der fragliche Ort eine Fläche ist, welcher dann selbstverständlich auch jene Raumcurve angehört.

Es seien 1, 2 ... 6 die gegebenen Raumpunkte und werden ihre Coordinaten mit den entsprechenden Indices unterschieden, der gesuchte Scheitel des durch sie gehenden Kegels habe die Coordinaten X, Y, Z; die Gleichungen von 4 Ebenen, welche durch den Punkt X, Y, Z und die resp. Gruppen 1 2; 2 3; 3 4; 4 1 gehen, sind dann

$$L = \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x, & y, & z, & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad M = \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x, & y, & z, & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$N = \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x, & y, & z, & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad P = \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x, & y, & z, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

und repräsentirt die Gleichung

$$L\,N - \lambda\,M\,P = 0$$

jeden aus dem Punkt X, Y, Z als Scheitel durch die Kanten

$$L = M = 0; \; L = P = 0; \; N = M = 0; \; N = P = 0$$

beschriebenen Kegel 2. Grades. Soll derselbe auch durch den Punkt 5 gehen, so ergibt sich der betreffende Werth von λ aus der vorigen Gleichung durch Substitution von x_5, y_5, z_5 an die Stelle der laufenden Coordinaten x, y, z, nämlich:

$$\lambda = \left[\begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix}\right] : \left[\begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix}\right]$$

Setzt man diesen Werth von λ in die vorige Gleichung ein und substituirt dann x_6, y_6, z_6 an Stelle der darin vorkommenden veränderlichen Coordinaten x, y, z, so stellt das Resultat

1) Vergl. Chasles, Gesch. d. Geom. Deutsch v. Sohncke. Note XXXIII, 2. pag. 441.

$$\begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_6, & y_6, & z_6, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x_6, & y_6, & z_6, & 1 \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_6, & y_6, & z_6, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_6, & y_6, & z_6, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

einen durch die Punkte 1, 2, . . . 6 gehenden Kegel 2. Ordnung dar, dessen Spitze die Coordinaten X, Y, Z hat. Da vorstehende Gleichung in Bezug auf die Coordinaten X, Y, Z vom 4. Grad ist, so ist der geometrische Ort für die fragliche Kegelspitze eine Fläche 4. Grades, die, wie aus der Form ihrer Gleichung ohne weiteres ersichtlich, eine Anzahl von geraden Linien enthält, welche dargestellt werden durch Vergleichung derjenigen Systeme von den in ihrer Gleichung enthaltenen linearen Factoren mit Null, deren gleichzeitiges Verschwinden die Gleichung selbst verschwinden macht. Bei näherem Eingehen auf die Untersuchung dieser Geraden finden sich davon im Ganzen 25, nämlich die 15 Verbindungslinien von je zweien der gegebenen 6 Punkte und ausserdem die 10 Schnittlinien der Paare von Ebenen durch je 3 der gegebenen Punkte, welche sämmtliche 6 Punkte enthalten, wie z. B. die Ebenen 1 2 3 und 4 5 6; oder 1 2 4 und 3 5 6 u. s. w.

Wir beschliessen dieses Capitel mit Begründung des folgenden, später zu interessanten Folgerungen Anlass gebenden Satzes:

> Construirt man an einem Punkt (a) eines cubischen Kegelschnittes die Osculationsebene und legt ausserdem durch ihn eine Ebene, welche die Curve in einem andern Punkte (b) berührt, so wird jede Sehne der Curve, welche durch die Schnittlinie jener beiden Ebenen geht, harmonisch getheilt durch eine Gerade, welche der Schnitt ist von der Osculationsebene der Curve in (b) und einer andern Ebene, die auch durch (b) geht und die Curve in (a) berührt.

Die 4 in diesem Satze vorkommenden Ebenen stehen in derselben Beziehung zur Curve, wie die früher bei Aufstellung ihrer Gleichung benutzten Ebenen $U_0 = U_1 = U_2 = U_3 = 0$, von denen schon damals bemerkt wurde, dass die Ebene $U_0 = 0$ die Curve im Punkt $\vartheta = 0$ osculirt, ebenso die Ebene $U_3 = 0$ im Punkt, dessen Parameter $\vartheta = \infty$, während $U_1 = 0$ in $\vartheta = \infty$ schneidet und in $\vartheta = 0$ tangirt und $U_2 = 0$ in $\vartheta = \infty$ tangirt und in $\vartheta = 0$ schneidet; der Beweis wird sich daher durch Zugrundelegung derselben am einfachsten gestalten. *Es seien* wie früher die Gleichungen jener 4 Ebenen in der Normal*form angenommen*, dann hat eine durch den Punkt ϑ der Curve und die

Schnittlinie von $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ gehende Ebene die Gleichung $U_1 - \vartheta\, U_2 = 0$, wobei ϑ zugleich das Theilverhältniss des Neigungswinkels jener Ebenen ausdrückt; die dazu harmonisch conjugirte Ebene hat die Gleichung $U_1 + \vartheta\, U_2 = 0$ und geht daher durch einen Curvenpunkt, dessen Parameter $-\vartheta$ ist. Werden nun die Gleichungen der durch diese beiden Punkte ϑ und $-\vartheta$ gehenden Sehne gebildet, nämlich

$$U_0 - \vartheta^2\, U_2 = 0; \;\; U_1 - \vartheta^2\, U_3 = 0,$$

so zeigen dieselben unmittelbar, dass jene Sehne durch die Schnittlinie von U_0 und U_2 und die von U_1 und U_3 geht. Da nun die Ebenen $U_1 = 0$; $U_2 = 0$; $U_1 - \vartheta\, U_2 = 0$; $U_1 + \vartheta\, U_2 = 0$ 4 harmonische Ebenen sind, so sind die Schnittpunkte jener Sehne mit den beiden Geraden 0 2 und 1 3 und der Curve harmonische Punkte, womit der Satz oder eigentlich seine Umkehrung bewiesen ist. Die letztere würde lauten:

> Legt man durch die Schnittlinie zweier Ebenen, deren eine einen cubischen Kegelschnitt in (a) berührt und in (b) schneidet, während die andere ihn in (a) schneidet und in (b) berührt, ein zu ihnen harmonisches Ebenenpaar, so treffen die Ebenen desselben die Curve in 2 Punkten, deren Verbindungslinie den gegebenen Ebenen in Punkten begegnen, die zugleich auf den Osculationsebenen der Punkte (a) und (b) liegen.

Die eben dargelegten Eigenschaften cubischer Kegelschnitte entsprechen auf eine bemerkenswerthe Weise den Beziehungen von Pol und Polare bei den ebenen Kegelschnitten; projicirt man nämlich die ganze in den vorhergehenden Sätzen vorkommende Raumfigur von einer der beiden Tetraederecken, durch welche die Curve geht, etwa vom Punkt $\vartheta = \infty$ aus auf irgend eine Ebene, so ist die Projection des cubischen Kegelschnitts ein ebener, die der Geraden $U_0 = U_2 = 0$ eine Gerade, die der Geraden $U_1 = U_3 = 0$ aber ein Punkt, und zwar der Pol jener projicirten ersten Geraden in Bezug auf den ebenen Kegelschnitt, denn die Ebenen $U_1 = 0$ und $U_3 = 0$ schneiden die Projectionsebene in den durch jenen Punkt gehenden Tangenten, für welche die Projection der Geraden $U_0 = U_2 = 0$ Berührungssehne ist, wie sich aus der Form der Gleichung

$$U_1\, U_3 - U_2^2 = 0$$

des die Curve projicirenden Kegels ohne weiteres ergibt; die Secante des cubischen Kegelschnitts endlich wird als durch den Pol gehende Gerade projicirt, die dann von dem ebenen Kegelschnitt und der Polare harmonisch getheilt ist.

Viertes Capitel.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der durch die Tangenten eines cubischen Kegelschnittes erzeugten abwickelbaren Fläche, welche, wie früher nachgewiesen, mit demselben zugleich in der Verwandtschaft der Reciprocität steht, und betrachten zunächst die Schnittcurve derselben mit einer beliebigen Ebene. Die früher aufgestellte Gleichung

$$[U_0 U_3 - U_1 U_2]^2 - 4 [U_1 U_3 - U_2^2] [U_0 U_2 - U_1^2] = 0$$

der Tangentenfläche ist vom 4. Grad, und wird daher auch eine ebene Schnittcurve derselben von der 4. Ordnung sein, während aus dem gleichfalls früher bewiesenen Satze, dass durch jeden Punkt 3 Osculationsebenen einer Raumcurve 3. Ordnung, d. h. 3 Tangentenebenen ihrer Tangentenfläche gehen, sich folgern lässt, dass jene Schnittcurve von der dritten Classe sei. Um ihre Gleichung zu erhalten, verfahren wir folgendermassen: wir wählen als schneidende Ebene eine, deren Gleichung

$$U_1 - \vartheta U_2 = 0$$

ist, die demnach durch 3 Punkte der Curve geht, welche zu den Parametern 0, ∞ und ϑ gehören. Diese 3 Punkte bestimmen in der vorhergenannten Ebene ein Dreieck, dessen Seiten bestimmt werden als Schnittlinien dieser Ebene mit drei andern, deren Gleichungen sind

$$U_2 = 0; \quad U_0 - \vartheta^2 U_2 = 0; \quad \vartheta U_3 - U_2 = 0$$

und von denen die erste durch die Punkte 0 und ∞, die zweite durch die Punkte 0 und ϑ, die dritte endlich durch die Punkte ϑ und ∞ geht. Werden diese 4 Ebenen zu Fundamentalebenen eines tetraedrischen Coordinatensystems genommen, setzt man also

$$U_2 \equiv x, \; U_0 - \vartheta^2 U_2 \equiv \vartheta^2 y, \; \vartheta U_3 - U_2 \equiv z, \; U_1 - \vartheta U_2 \equiv w,$$

so wird die Gleichung der Fläche zwischen diesen neuen Coordinaten sich ergeben, indem man die Grössen U_0, U_1, U_2, U_3 aus den vorstehenden Identitäten herleitet, nämlich

$$U_0 = \vartheta^2 (y + x); \; U_1 = w + \vartheta x; \; U_2 = x; \; U_3 = \frac{z + x}{\vartheta}$$

und in die frühere Gleichung derselben substituirt; man findet

$$[\vartheta (y + x)(z + x) - x (w + \vartheta x)]^2 - 4 \left[w + \vartheta x \frac{z + x}{\vartheta} - x^2\right]$$
$$[\vartheta^2 (y + x) x - (w + \vartheta x)^2] = 0$$

und daraus für $w = 0$ ihren Schnitt mit der Ebene $U_1 - \vartheta U_2 = 0$ ausgedrückt durch

$$(y z + z x + x y)^2 - 4 x^2 y z = 0$$

bezogen auf ein trimetrisches Coordinatensystem, worin

$$w = 0 \; [x = 0, \; y = 0, \; z = 0]$$

die Gleichungen der Seiten des Fundamentaldreiecks sind. Die Gleichung der Curve nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn man für x setzt $-x$, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Vorzeichen von y und z in die entgegengesetzten verwandelt; sie wird dann

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Wir gehen auf keine speciellere Untersuchung dieser in der Folge nicht weiter wichtigen Curve ein und beschränken uns darauf zu bemerken, dass sie, wie aus der Natur der Tangentenfläche schon erkannt, von der dritten Classe ist, dann dass sie drei Rückkehrpunkte oder Spitzen hat, nämlich die 3 Ecken des Fundamentaldreiecks, und dass die Tangenten in denselben unter der zuletzt über die Vorzeichen der Coordinaten gemachte Voraussetzung dargestellt sind durch die Gleichungen

$$y - z = 0; \; z - x = 0; \; x - y = 0,$$

deren identisches Verschwinden bei ihrer Addition beweist, dass jene Tangenten sich in demselben Punkte schneiden, nämlich in dem Schnittpunkt der 3 Osculationsebenen von den Punkten, in welchen die Curve die Ebene $w \; U_1 - \vartheta \; U_2 = 0$ trifft.

Es ist nun zunächst zu untersuchen, wie sich die Schnittcurve modificirt, wenn die schneidende Ebene eine Tangenten- oder Osculationsebene der Curve ist. Um zunächst den Schnitt der Tangentenfläche mit einer Tangentenebene zu studiren, kann man als solche die Ebene $U_1 = 0$ wählen, welche die Tangente des Punkts 0 enthält und die Curve noch im Punkt, dessen Parameter ∞ ist, schneidet. Die Gleichung der Tangentenfläche reducirt sich unter dieser Voraussetzung, dass $U_1 = 0$ wird, auf

$$U_0^{\,2} U_3^{\,2} + 4 \; U_0 \; U_2^{\,3} = 0$$

und zerfällt daher dieser Schnitt in die Gerade $U_0 = 0$, $U_1 = 0$, und eine ebene Curve dritten Grades dargestellt durch $U_1 = 0$, $U_0 \; U_3^2 + 4 \; U_2^3 = 0$, welche im Punkt $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ eine Spitze, dagegen im Punkt $U_0 = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ einen Wendepunkt hat, dessen Tangente die Gerade $U_0 = 0$, $U_1 = 0$ ist, während sie im Cuspidalpunkt von der Geraden $U_1 = 0$, $U_3 = 0$ berührt wird. Ist endlich die schneidende Ebene eine Osculationsebene, so kann die Ebene $U_0 = 0$ zur Untersuchung benutzt werden, welche die Curve im Punkt 0 osculirt; man erhält dann als Schnittcurve den Kegelschnitt

$$U_0 = 0, \; U_2^2 + 4 \, (U_1 \; U_3 - U_2^2) \equiv 4 \; U_1 \; U_3 - 3 \; U_2^2 = 0,$$

der von der Geraden $U_0 = 0$, $U_1 = 0$ in dem ihm mit der Curve *3. Ordnung gemeinsamen* Punkte berührt wird.

Der eben gelösten Frage nach der Natur des Schnitts der Tangentenfläche einer Raumcurve 3. Ordnung mit einer beliebigen Ebene stellt sich nun in Folge des reciproken Verhältnisses zwischen ihr und der Curve dualistisch die folgende gegenüber: welcher Kegel wird erzeugt durch die Verbindung eines beliebigen Raumpunktes mit allen Punkten einer Curve dritter Ordnung? Da sich, wie früher gezeigt, in jedem Punkt des Raumes drei Osculationsebenen der Curve schneiden, wovon auch zwei imaginär sein können, so kann man zunächst als beliebigen Punkt, worin sich 3 reelle Osculationsebenen schneiden, den den 3 Ebenen

$$U_0 = 0;\ U_3 = 0;\ U_0 - 3\vartheta U_1 + 3\vartheta^2 U_2 - \vartheta^3 U_3 = 0$$

gemeinsamen Punkt wählen. Die Gleichungen einer ihn mit einem variablen Curvenpunkt ω verbindenden Geraden sind:

$$\omega^2 [U_1 - \vartheta U_2] - (\omega - \vartheta) U_0 = 0;\ \omega(\omega - \vartheta) U_3 + \omega U_2 - U_1 = 0,$$

aus welchen sich durch die Elimination von ω die Gleichung

$$[U_1 - \vartheta U_2]^3 - U_0 U_3 [U_0 - 3\vartheta U_1 + 3\vartheta^2 U_2 - \vartheta^3 U_3] = 0$$

als solche der gesuchten Kegelfläche ergibt. Setzt man

$$U_0 \equiv x;\ \vartheta^3 U_3 = y;\ U_0 - 3\vartheta U_1 + 3\vartheta^2 U_2 - \vartheta^3 U_3 \equiv z,$$

so wird sie

$$(x + y + z)^3 - 27\, x y z = 0$$

oder

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0,$$

welche zeigt, dass der betreffende Kegel von der dritten Ordnung ist; als Reciprokalfläche von einer ebenen Curve 4. Grades muss er von der vierten Classe sein, ein Schluss, der sich auch leicht aus den bekannten Formeln, welche den Zusammenhang zwischen Ordnung, Classe, und sonstigen Singularitäten einer ebenen Curve, resp. Kegels ausdrücken, bewahrheiten lässt. Er hat nämlich, wie sich aus Form seiner Gleichung sofort ergibt, drei reelle Wendestrahlen, die in der Ebene $x + y + z = 0$ liegen und worin er von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ tangirt wird. Ausserdem hat er einen conjugirten Strahl, dargestellt durch die Gleichungen $x = y = z$.

Der andere Fall, wo nur eine von den 3 durch den angenommenen Raumpunkt gehenden Osculationsebenen reell ist, lässt sich leicht hieran anschliessen; wir behalten als solche reelle Osculationsebene die Ebene $U_0 \equiv x = 0$ bei und bezeichnen mit $u = 0$ und $v = 0$ zwei durch den Punkt gehende reelle Ebenen von der Beschaffenheit, dass

$$y \equiv u + vi;\ z \equiv u - vi$$

die durch ihn möglichen imaginären Osculationsebenen der Curve sind. Durch Substitution dieser Werthe in die vorher gefundene Gleichung des Kegels wird dieselbe

$$x\,[(x-u)^2-3\,v^2]-\frac{8}{9}(x-u)^3=0,$$

und zeigt sie, dass derselbe nun nur einen reellen Wendestrahl hat, in dem er von der Ebene $x=0$ berührt wird, sowie dass er einen Doppelstrahl hat, worin ihn die Ebenen $x-u\pm v\sqrt{3}=0$ tangiren.

Den beiden oben bei den reciproken Untersuchungen betrachteten Specialfällen, wo die schneidende Ebene in eine Tangenten-, resp. Osculationsebene der Curve überging, entsprechen nun die, dass der Scheitel des Kegels auf einer Tangente der Curve, resp. derselben selbst liegt, von welchen der letztere bei einer frühern Gelegenheit schon erörtert wurde, indem damals gezeigt worden, dass durch Verbindung eines Punkts der Raumcurve 3. Ordnung mit den übrigen Curvenpunkten ein Kegel 2. Grades entsteht. Für den andern Fall bestimmen wir den Scheitel des Kegels durch die Gleichungen

$$U_0=0;\ U_1=0;\ U_2-h\,U_3\equiv V=0,$$

sodass derselbe also auf der Tangente des Punkts 0 liegt. Die Gleichungen der ihn mit einem veränderlichen Curvenpunkt ω verbindenden Geraden sind

$$U_0-\omega\,U_1=0;\ (\omega-h)\,U_1-\omega^2\,(U_2-h\,U_3)=0$$

und ergibt sich aus ihnen durch Elimination von ω

$$U_0^2\,U_2+U_0\,U_1^2-h\,(U_0^2\,U_3-U_1^3)=0$$

oder nachdem mit $27\,h^2$ multiplicirt und $U_0^3-9\,h\,U_0^2\,U_1$ addirt und subtrahirt worden

$$U_0^2\,[U_0-9\,h\,U_1-27\,h^2\,V]-[U_0-3\,h\,U_1]^3=0$$

als Gleichung des Kegels. Er ist vom dritten Grad, hat einen Rückkehrstrahl $U_0=0$, $U_1=0$, und einen Inflexionsstrahl

$$U_0-9\,h\,U_1-27\,h^2\,V=0;\ U_0-3\,h\,U_1=0,$$

worin er von der Ebene

$$U_0-9\,h\,U_1-27\,h^2\,U_2+27\,h^3\,U_3=0$$

berührt wird, während die Ebene $U_0=0$ ihn längs der Rückkehrkante tangirt; beide Ebenen sind Osculationsebenen des cubischen Kegelschnitts.

Im Zusammenhange mit Vorstehendem befinden sich folgende, später zu einigen bemerkenswerthen Constructionen Anlass gebende Betrachtungen. Nimmt man den vorher benutzten Punkt, worin sich die Osculationsebenen

$$U_0=0,\ U_3=0,\ U_0-3\,\vartheta\,U_1+3\,\vartheta^2\,U_2-\vartheta^3\,U_3=0$$

schneiden, zum Scheitel eines Kegels zweiten Grades, der dem von diesen 3 Ebenen gebildeten körperlichen Dreieck umschrieben ist, so *ist für die früheren* Substitutionen

$$U_0 = x, \quad \vartheta^3 U_3 = y, \quad U_0 - 3\vartheta U_1 + 3\vartheta^2 U_2 - \vartheta^3 U_3 = z,$$

die Gleichung desselben

$$\lambda y z + \mu z x + \nu x y = 0,$$

wobei $\lambda : \mu : \nu$ noch unbestimmte Constanten bedeuten, über welche wir sogleich die erforderlichen Bestimmungen machen werden. Wir denken uns nämlich auf der Curve 4 Punkte $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ beliebig angenommen; es wird dann durch deren Osculationsebenen ein Tetraeder gebildet, und soll der Kegel so bestimmt werden, dass er durch 2 Ecken desselben hindurchgeht. Nach dem Frühern schneiden sich die Osculationsebenen an $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ in einem Punkt mit den Coordinaten

$$U_0 : 3 U_1 : 3 U_2 : U_3 = \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 : (\vartheta_2 \vartheta_3 + \vartheta_3 \vartheta_1 + \vartheta_1 \vartheta_2) : (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) : 1,$$

dessen gerade Verbindungslinie mit der Spitze des körperlichen Dreiecks $x\,y\,z$ die Gleichungen

$$x : y : z = \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 : \vartheta^3 : (\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_3)$$

hat. Soll dieselbe ein Strahl jenes Kegels sein, so entspringt durch Einsetzen dieser Werthe in seine Gleichung für $\lambda : \mu : \nu$ die Relation

$$\frac{\lambda}{\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3} + \frac{\mu}{\vartheta^3} + \frac{\nu}{(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_3)} = 0.$$

Ebenso finden wir, wenn die Verbindungslinie des Schnittpunkts der Osculationsebenen an $\vartheta_1\, \vartheta_2\, \vartheta_4$ ihm angehören soll,

$$\frac{\lambda}{\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_4} + \frac{\mu}{\vartheta^3} + \frac{\nu}{(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_4)} = 0,$$

aus welchen beiden Bedingungsgleichungen sich

$$\lambda : \mu : \nu = \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4 : -\vartheta^4 : (\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_3)(\vartheta - \vartheta_4)$$

ergibt, eine Gleichung, deren Symmetrie in Bezug auf $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ beweist, dass der fragliche Kegel dann auch die Verbindungslinien seines Scheitels mit den beiden übrigen Tetraederecken enthält. Es lässt sich dies als Satz folgendermaassen aussprechen:

> Die Kanten des von 3 Osculationsebenen eines cubischen Kegelschnitts gebildeten körperlichen Dreiecks und die Verbindungslinien seiner Spitze mit den Eckpunkten eines durch die Osculationsebenen von irgend 4 Curvenpunkten gebildeten Tetraeders gehören einem Kegel zweiten Grades an.

Je nach der Wahl der 4 Punkte $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ wird sich dieser Kegel verändern; behält man 3 derselben, etwa $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ und lässt den vierten ϑ_4 die Curve durchlaufen, so erhält man eine Schaar von Kegeln 2. Ordnung, die alle vier Strahlen gemein haben, nämlich die 3 Kanten des körperlichen Dreiecks $x\ y\ z$ und die Verbindungslinie seiner Spitze mit dem Schnittpunkt der 3 Osculationsebenen an ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3. Variirt

man dann weiter auch ϑ_3, so wird dieser jetzt je zwei Kegeln gemeinsame Strahl eine Ebene durchlaufen, deren Gleichung

$$\frac{x}{\vartheta_1 \vartheta_2} - \frac{y}{\vartheta^2} + \frac{z}{(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)} = 0$$

sich durch Elimination von ϑ_3 aus den frühern

$$x : y : z = \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 : \vartheta^3 : (\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_3)$$

ergibt und welche durch die Schnittlinie der Osculationsebenen an ϑ_1 und ϑ_2 hindurchgeht. Nimmt man ferner auch den Punkt ϑ_2 als veränderlich an, so umhüllt die eben gefundene Ebene einen Kegel, dessen Gleichung

$$[(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta x + \vartheta_1 y) - \vartheta \vartheta_1] - 4 \vartheta \vartheta_1 (\vartheta - \vartheta_1)^2 x y = 0$$

erhalten wird, als Bedingung, unter der die Gleichung jener Ebene, welche wir zu dem Ende schreiben:

$$\vartheta_2^2 (\vartheta - \vartheta_1) \vartheta_1 y + \vartheta_2 [(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta x + \vartheta_1 y) - \vartheta \vartheta_1 z] \vartheta - (\vartheta - \vartheta_1) \vartheta^3 x = 0,$$

zwei gleiche Wurzeln hat; dieser Kegel geht auch durch die Schnittlinie der Osculationsebene des Punkts ϑ_1 mit der Tangentenfläche unserer Raumcurve 3. Ordnung. Wird endlich auch noch der Punkt ϑ_1 als auf der Curve veränderlich gedacht, so werden alle diese Kegel 2. Ordnung von einem solchen dritten Grades

$$(x + y + z)^3 - 27 x y z = 0$$

umhüllt, welcher dann, wie seine Gleichung lehrt, derselbe ist, wie der, den man durch Verbindung des Punkts $x y z$ mit allen Curvenpunkten erhält. Dies gibt den Satz:

> Alle Kegel, die einen beliebigen Punkt des Raumes zum Scheitel und die Schnittcurven der Osculationsebenen einer Raumcurve 3. Ordnung mit ihrer Tangentenfläche zu Leitlinien haben, werden eingehüllt von einem Kegel 3. Ordnung, den man erhält durch Verbindung jenes Raumpunkts mit sämmtlichen Punkten der Curve.

Wenden wir uns nun zu den hierzu reciproken Untersuchungen; in der früher benutzten, durch die 3 Punkte 0, ∞, und ϑ der Curve gehenden Ebene hatte man ein Dreieck mit jenen Punkten als Ecken, dessen Seiten dargestellt wurden durch die Gleichungen

$$U_1 - \vartheta U_2 = 0 \; [U_2 = 0, \; U_0 - \vartheta^2 U_2 = 0, \; \vartheta U_3 - U_2 = 0]$$

oder für die damals benutzten Abkürzungen

$$U_2 = x, \; U_0 - \vartheta^2 U_2 = \vartheta y, \; \vartheta U_3 - U_2 = z, \; U_1 - \vartheta U_2 = w$$

durch

$$w = 0 \; [x = 0, \; y = 0, \; z = 0].$$

Ein demselben einbeschriebener Kegelschnitt hat die Gleichung[1])

$$(l\,x)^{\frac{1}{2}} + (my)^{\frac{1}{2}} + (n\,z)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

und wird von der seiner Ebene $w = 0$ mit einer durch die 3 Curvenpunkte ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 gehenden Ebene gemeinsamen Geraden, deren Gleichung

$$(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_3)\,x + \vartheta^3\,y - \vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,z = 0$$

ist, berührt unter der Bedingung

$$\frac{l}{(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_3)} + \frac{m}{\vartheta^3} - \frac{n}{\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3} = 0.$$

Nimmt man noch einen vierten Punkt ϑ_4 hinzu, so werden damit noch 3 Ebenen bestimmt, auch Seitenebenen des von den 4 Punkten als Eckpunkten gebildeten Tetraeders. Die Bedingung, dass die Schnittlinie noch einer von diesen Ebenen, etwa der Ebene $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_4$ mit der Ebene $w = 0$, auch den obigen Kegelschnitt tangire, ist

$$\frac{l}{(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_4)} + \frac{m}{\vartheta_3} - \frac{n}{\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3} = 0,$$

welche in Verbindung mit der vorigen zur Bestimmung von den Coefficienten l, m, n genügt; man findet

$$l : m : n = (\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)(\vartheta - \vartheta_3)(\vartheta - \vartheta_4) : -\vartheta^4 : -\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4.$$

Die Symmetrie dieser Werthe in Bezug auf die Parameter jener 4 Punkte zeigt, dass auch die Schnittlinien der Ebenen $\vartheta_1\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ und $\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ mit der Ebene $w = 0$ unsern Kegelschnitt berühren, ein Resultat, das zu folgendem Satz veranlasst:

> Die Verbindungslinien der drei Punkte, in welchen eine Ebene eine Raumcurve 3. Ordnung schneidet, und die Schnittlinien derselben Ebene mit den Seitenebenen eines Tetraeders, dessen Ecken auf der Curve liegen, sind Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts.

Wir lassen nun wie oben die Eckpunkte des Tetraeders beliebig auf der Curve variiren, wodurch sich selbstverständlich der dem Dreieck $x\,y\,z$ eingeschriebene Kegelschnitt fortwährend ändert. Wird zunächst nur ϑ_4 veränderlich angenommen, während die Punkte ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 fest bleiben, so behalten alle sich dann ergebenden Kegelschnitte ausser den 3 Seiten des Dreiecks auch noch die gemeinsame Tangente, in welcher die Ebene $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3$ die Ebene $w = 0$ schneidet, sind also sämmtlich demselben Vierseit eingeschrieben. Lässt man nun weiter nur die Punkte ϑ_1 und ϑ_2 fest, ϑ_3 und ϑ_4 aber variabel sein, so wird die zuletzt er-

---

1) Vergl. Salmon, anal. Geom. der Kegelschnitte, deutsch v. W. Fiedler. **Art. 159.** *p. 191.*

wähnte den Kegelschnitt berührende Gerade sich auch fortwährend verändern, dabei jedoch, weil die Ebene $\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3$ sich um die Sehne $\vartheta_1 \vartheta_2$ der Curve dreht, immer durch einen festen Punkt

$$(\vartheta - \vartheta_1)(\vartheta - \vartheta_2)\, x = -\vartheta^2 y = -\vartheta_1 \vartheta_2 z$$

gehen, welches der Schnittpunkt der Ebene $\omega = 0$ mit eben dieser Sehne $\vartheta_1 \vartheta_2$ ist. Wird nun weiter auch der Punkt ϑ_2 veränderlich genommen, so dass nur noch ϑ_1 fest bleibt, so beschreibt der eben gefundene Punkt einen Kegelschnitt

$$\vartheta \vartheta_1 z y + (\vartheta - \vartheta_1)\, \vartheta_1 x z - (\vartheta - \vartheta_1)\, \vartheta x y = 0,$$

dessen Gleichung sich durch Elimination von ϑ_2 aus den vorhergehenden Gleichungen jenes Punkts ergibt, und welches derselbe ist, indem die Ebene $w = 0$ den vom Scheitel ϑ_1 aus durch die Curve 3. Ordnung gelegten Kegel 2. Grades schneidet. Ist endlich auch noch der Punkt ϑ_1 veränderlich, so sind alle auf die angegebene Weise entstehenden Kegelschnitte umhüllt von der Curve vierten Grades

$$(y z + z x + x y)^2 - 4 x^2 y z = 0,$$

welche, wie ihre Gleichung lehrt, der Schnitt der Ebene $w = 0$ mit der Tangentenfläche unserer Raumcurve 3. Ordnung ist. Hieraus folgt:

> Alle Kegelschnitte, welche man erhält, indem man mit einer beliebigen Ebene sämmtliche durch eine Raumcurve 3. Ordnung möglichen Kegel 2. Ordnung schneidet, sind umhüllt von einer Curve 4. Ordnung, die der Schnitt jener Ebene mit der Tangentenfläche des cubischen Kegelschnittes ist.

Die vorher gefundene Eigenschaft der cubischen Kegelschnitte, dass die Verbindungslinien sämmtlicher Punkte eines solchen mit einem beliebigen Punkt des Raumes einen Kegel 3. Ordnung erzeugen, welcher einen conjugirten, resp. Doppelstrahl hat, und welche auch folgendermaassen ausgesprochen werden kann:

> Die perspectivische Projection einer Raumcurve 3. Ordnung von irgend einem Punkt des Raumes aus auf eine beliebige Ebene ist eine Curve 3. Ordnung mit einem conjugirten resp. doppelten Punkt,

vermittelt den Zusammenhang zwischen ebenen Curven 3. Ordnung und den cubischen Raumcurven und zeigt, wie gewisse Eigenschaften der einen sich leicht auf die andern müssen übertragen lassen. Der bekannte[1]) Satz aus der Theorie der ebenen Curven:

> Legt man durch 4 feste Punkte a, b, c, d einer Curve 3. Ordnung einen Kegelschnitt, so schneidet dieser die gegebene Curve in zwei

1) Cremona, geom. Theorie der ebenen Curven. Deutsch von M. Curtze. I. Cap. § 12. Lehrs. II, pag. 91.

> Punkten m und m'. Die Gerade $m\,m'$ geht durch einen fünften festen Punkt o der Curve 3. Ordnung, welcher der Gegenpunkt der 4 Punkte a, b, c, d heisst,

kann z. B. ohne weiteres in folgender Weise auf cubische Kegelschnitte übertragen werden:

> Legt man durch die Verbindungsstrahlen eines beliebigen Raumpunktes mit 4 festen Punkten eines cubischen Kegelschnitts einen Kegel 2. Ordnung, so geht die durch die beiden Punkte, welche der Kegel noch ferner mit der Curve gemein hat, und seinen Scheitel gelegte Ebene durch einen bestimmten festen fünften Punkt des cubischen Kegelschnitts, den sogenannten Gegenpunkt jener 4 Punkte.

Es hat nämlich eine beliebige Fläche zweiter Ordnung mit einer Raumcurve 3. Ordnung im Allgemeinen sechs Punkte gemein, und werden wir später zeigen, dass die Curve derselben ganz angehört, sobald sieben ihrer Punkte auf der Fläche liegen. Beschränken wir uns hier auf den Beweis der ersteren Behauptung für den Kegel 2. Ordnung, so ist

$$U_0^2 + l\,(U_1 - \vartheta\,U_2)^2 + m\,U_3^2 + n\,U_0\,U_3 + p\,U_0\,(U_1 - \vartheta\,U_2) + q\,U_3\,(U_1 - \vartheta\,U_2) = 0$$

die allgemeinste Gleichung eines solchen, dessen Scheitel im Schnittpunkt der Ebenen

$$U_0 = 0;\ U_3 = 0;\ U_1 - \vartheta\,U_2 = 0$$

liegt. Durch Einsetzen der die Gleichung der Curve befriedigenden Werthe $\omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$ für $U_0 : U_1 : U_2 : U_3$ finden wir

$$\omega^6 + l\,\omega^2\,(\omega - \vartheta)^2 + m + n\,\omega^3 + p\,\omega^4\,(\omega - \vartheta) + q\,\omega\,(\omega - \vartheta) = 0,$$

welche Gleichung in Bezug auf ω vom 6. Grad ist, demnach 6 reelle oder complexe Parameterwerthe für die Punkte liefert, welche der Kegel 2. Ordnung mit der Curve gemein hat. Aus dem Zusammenhang zwischen diesen Wurzelwerthen der Gleichung, die wir mit $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_6$ bezeichnen wollen, und den Coefficienten derselben, ergiebt sich

$$S_1 = -p,\ S_2 = l - p\,\vartheta,\ S_3 = 2\,l\,\vartheta - n,\ S_4 = q + l\,\vartheta^2,\ S_5 = q\,\vartheta,\ S_6 = m,$$

wenn S_r die Summe der Producte der Wurzeln zu je r bedeutet. Die Elimination der Grössen l, m, n, p, q aus diesen Gleichungen liefert dann folgende

$$\vartheta^4\,S_1 - \vartheta^3\,S_2 + \vartheta\,S_4 - S_5 = 0,$$

welche, wenn ω_5 und ω_6 explicite darin geschrieben werden, die Form

$$a\,(\omega_5 + \omega_6) - b\,\omega_5\,\omega_6 + c = 0$$

annimmt, wobei

$$a = \vartheta^4 - \vartheta^3\,S_1 + \vartheta\,S_3 - S_4,\ b = \vartheta^3 - \vartheta\,S_2 + S_3,$$
$$c = \vartheta^4\,S_1 - \vartheta^3\,S_2 + \vartheta\,S_4$$

zu setzen sind. Diese Gleichung ist aber, wie im zweiten Capitel gezeigt, die Bedingung, unter welcher sich Punkte in Involution befinden und zieht man daher aus ihr den folgenden Satz:

> Die 6 Punkte, worin eine Raumcurve 3. Ordnung von irgend einem Kegel 2. Ordnung getroffen wird, befinden sich in Involution, d. h. legt man durch sie und irgend welche Sehne der Curve Ebenen, so erhält man ein involutorisches Büschel.

Dem andern zu derselben Kategorie wie der obige gehörigen Satze: [1])

> Sind in einer Curve 3. Ordnung drei Punkte a, b, c gegeben und legt man durch einen vierten festen Punkt in derselben Curve eine Gerade, welche dieselbe in m und m' schneidet, so geht der Kegelschnitt, den man durch a, b, c, m, m' beschreiben kann, durch einen fünften festen Punkt d der gegebenen Curve,

wird sich für die Raumcurve 3. Ordnung folgender gegenüberstellen lassen:

> Wird ein beliebiger Punkt des Raumes mit 3 festen Punkten einer Raumcurve 3. Ordnung verbunden und durch die Verbindungsstrahlen ein Kegel 2. Ordnung gelegt, welcher auch durch die 2 Punkte geht, in welchen eine durch den angenommenen Raumpunkt und einen vierten festen Punkt der Curve gehende Ebene die Curve noch ferner trifft, so gehen alle so erhaltenen Kegel durch einen und denselben sechsten Punkt des cubischen Kegelschnitts.

u. s. w., u. s. w.

Kehren wir schliesslich wieder zur Tangentenfläche unseres cubischen Kegelschnitts zurück, so wird ihr Schnitt mit der Osculationsebene des Punkts ω dargestellt durch die Gleichungen

$$U_0 - 3\,\omega\, U_1 + 3\,\omega^2\, U_2 - \omega^3\, U_3 = 0;$$
$$[U_0\, U_3 - U_1\, U_2]^2 - 4\,[U_1\, U_3 - U_2^2]\,[U_0\, U_2 - U_1^2] = 0,$$

deren letztere sich ersetzen lässt durch die

$$[U_0 - \omega\, U_1]^2 - 4\,\omega^2\,[U_1^2 - U_0\, U_2] = 0$$

eines Kegels 2. Ordnung mit der Spitze in $U_0 = U_1 = U_2 = 0$, der den der Tangentenfläche und jener Osculationsebene gemeinsamen Kegelschnitt zur Leitlinie hat. Dieselbe Osculationsebene wird nun von einer beliebigen Ebene, als welche wir die schon oben benutzte durch die Curvenpunkte 0, ∞, ϑ gehende, deren Gleichung

$$U_1 - \vartheta\, U_2 = 0$$

ist, wählen wollen, in einer Geraden geschnitten, deren Pol in Bezug

1) Ibid. Lehrsatz III.

auf den vorhererwähnten Kegelschnitt bestimmt wird durch die Gleichungen

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = 3\,\vartheta\,\omega^2 : \omega\,(2\,\omega - \vartheta) : \omega - 2\,\vartheta : -3.$$

Eliminirt man nun aus diesen den Parameter ω, so ergeben sich folgende

$$2\,U_0 - 3\,\vartheta\,U_1 - 3\,\vartheta^2\,U_2 + 2\,\vartheta^3\,U_3 = 0;$$
$$\vartheta\,[3\,U_2 - 2\,\vartheta\,U_3]^2 + U_0\,U_3 = 0,$$

welche einen andern Kegelschnitt repräsentiren; ein Resultat, das wir folgendermassen als Satz aussprechen:

Eine beliebige feste Ebene wird von den Osculationsebenen eines cubischen Kegelschnitts in Geraden geschnitten, deren Pole in Bezug auf die den resp. Osculationsebenen mit der Tangentenfläche des cubischen Kegelschnitts gemeinsamen Kegelschnitte auf einem Kegelschnitt liegen,

oder wenn man als Pol einer Ebene in Bezug auf einen Kegelschnitt den Pol der Schnittlinie der Ebene des Kegelschnitts mit der gegebenen in Bezug auf ihn definirt, kürzer:

Die Pole einer beliebigen Ebene in Bezug auf die der Tangentenfläche eines cubischen Kegelschnitts eingeschriebenen Kegelschnitte liegen in einem bestimmten Kegelschnitt.

Lässt man die Ebene in unendliche Ferne rücken, so sind die Pole derselben in Bezug auf jene Kegelschnitte die betreffenden Mittelpunkte der letzteren, was zu folgendem, später noch näher zu untersuchenden, bemerkenswerthen Resultate führt:

Die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte, in denen die Tangentenfläche eines cubischen Kegelschnitts von den Osculationsebenen desselben geschnitten wird, liegen auf einem Kegelschnitt.

Die Untersuchung der Beziehungen, welche zwischen den beiden Ebenen, der angenommen festen und der ihrer Pole, stattfinden, wird bei einer andern Gelegenheit aufgenommen werden.

Fünftes Capitel.

Eine Classification der cubischen Kegelschnitte lässt sich nach ähnlichen Principien bewirken, wie die der ebenen Curven zweiten Grades; wie nämlich jene in die drei Gruppen der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Formen zerfallen, je nachdem sie mit der unendlich entfernten Geraden ihrer Ebene zwei imaginäre, oder zwei zusammenfallende oder endlich zwei verschiedene Punkte gemein haben, so kann man die Raumcurven 3. Ordnung eintheilen je nach der verschiedenen Art, in welcher sie durch die unendlich entfernte Ebene geschnitten *werden*. Es kann dies entweder in drei reellen oder in einem reellen

und zwei imaginären, oder in einem reellen und zwei zusammenfallenden oder endlich in drei zusammenfallenden Punkten geschehen, so dass im letzten Falle die unendlich entfernte Ebene eine Osculationsebene ist, während im vorletzten Fall die Curve nur eine unendlich entfernte Tangente besitzt. Die 4 sich auf diese Weise ergebenden Species heissen der Reihe nach: cubische Hyperbel, cubische Ellipse, cubisch-hyperbolische Parabel und cubische Parabel.

Die Tangenten an den unendlich entfernten Punkten einer Raumcurve führen, wie bei den ebenen Curven, den Namen Asymptoten; es hat daher die cubische Hyperbel drei Asymptoten, die cubische Ellipse nur eine, während für die beiden andern Species die Tangente des unendlich entfernten Punktes ganz in der unendlich entfernten Ebene liegt. Man erkennt dann ferner, da nach dem Frühern die Verbindungslinien eines beliebigen Curvenpunkts mit allen übrigen einen Kegel zweiten Grades erzeugen, dass drei Cylinder zweiten Grades durch den cubischen Kegelschnitt möglich sind, deren Erzeugende den resp. Asymptoten der Curve parallel sind. Hat dieselbe drei reelle Asymptoten, wie die cubische Hyperbel, so sind alle drei Cylinder reell; bei der cubischen Ellipse sind zwei derselben imaginär; für die cubische Parabel existirt nur einer und im Fall der cubisch-hyperbolischen Parabel gibt es deren zwei.

Um aus der Gleichung eines cubischen Kegelschnitts in der allgemeinsten Form

$$A_0 - \lambda A_1 = 0; \; A_2 - \lambda A_3 = 0; \; A_4 - \lambda A_5 = 0,$$

wo wir unter

$$A_n = a_n x + b_n y + c_n z + d_n = 0 \quad [n = 0, 1, 2 \ldots 5]$$

die Gleichung einer Ebene verstehen, zu entscheiden, welcher der vorhererwähnten Gattungen er angehört, verfahren wir folgendermassen. Bei der angegebenen Gleichungsform erscheint die Curve als Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Ebenen von 3 collinearen Ebenenbüscheln; wird nun die Schnittlinie von einem homologen Ebenenpaar parallel zu der dritten entsprechenden Ebene, so rückt der betreffende Curvenpunkt in unendliche Ferne. Die Bedingung, unter welcher dies geschieht, wird gefunden, indem man zunächst die Ausdrücke für die Winkel α, β, γ, welche jene Gerade mit den Coordinatenachsen bildet, herleitet, dann diejenigen für die Winkel α', β', γ', welche die entsprechende Ebene mit den Coordinatenebenen, oder was dasselbe ist, eine auf ihr normale Gerade mit den Achsen einschliesst, und schliesslich die Bedingungsgleichung aufstellt, unter welcher beide Gerade zu einander rechtwinklig sind. Man hat als Richtungscosinus der Geraden

$$(a_0 - \lambda a_1) x + (b_0 - \lambda b_1) y + (c_0 - \lambda c_1) z + (d_0 - \lambda d_1) = 0,$$
$$(a_2 - \lambda a_3) x + (b_2 - \lambda b_3) y + (c_2 - \lambda c_3) z + (d_2 - \lambda d_3) = 0$$

folgende

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma =$$
$$(b_0 - \lambda b_1)(c_2 - \lambda c_3) - (c_0 - \lambda c_1)(b_2 - \lambda b_3) :$$
$$(c_0 - \lambda c_1)(a_2 - \lambda a_3) - (a_0 - \lambda a_1)(c_2 - \lambda c_3) :$$
$$(a_0 - \lambda a_1)(b_2 - \lambda b_3) - (b_0 - \lambda b_1)(a_2 - \lambda a_3) :$$

und als solche der auf der Ebene

$$(a_4 - \lambda a_5)x + (b_4 - \lambda b_5)y + (c_4 - \lambda c_5)z + (d_4 - \lambda d_5) = 0$$

Normalen die Ausdrücke

$$\cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma' = (a_4 - \lambda a_5) : (b_4 - \lambda b_5) : (c_4 - \lambda c_5).$$

Die Bedingung der Perpendicularität der beiden Geraden ist bekanntlich

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

also

$$(a_4 - \lambda a_5)[(b_0 - \lambda b_1)(c_2 - \lambda c_3) - (c_0 - \lambda c_1)(b_2 - \lambda b_3)] +$$
$$(b_4 - \lambda b_5)[(c_0 - \lambda c_1)(a_2 - \lambda a_3) - (a_0 - \lambda a_1)(c_2 - \lambda c_3)] +$$
$$(c_4 - \lambda c_5)[(a_0 - \lambda a_1)(b_2 - \lambda b_3) - (b_0 - \lambda b_1)(a_2 - \lambda a_3)] = 0$$

oder als Determinante geschrieben

$$\begin{vmatrix} a_0 - \lambda a_1, & b_0 - \lambda b_1, & c_0 - \lambda c_1 \\ a_2 - \lambda a_3, & b_2 - \lambda b_3, & c_2 - \lambda c_3 \\ a_4 - \lambda a_5, & b_4 - \lambda b_5, & c_4 - \lambda c_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist dieselbe in Bezug auf λ vom dritten Grad und erhält man bei ihrer Entwicklung die cubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_0, b_0, c_0 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_4, b_4, c_4 \end{vmatrix} - \lambda \left[\begin{vmatrix} a_0, b_0, c_0 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_5, b_5, c_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0, b_0, c_0 \\ a_3, b_3, c_3 \\ a_4, b_4, c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_4, b_4, c_4 \end{vmatrix} \right] +$$
$$\lambda^2 \left[\begin{vmatrix} a_0, b_0, c_0 \\ a_3, b_3, c_3 \\ a_5, b_5, c_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_5, b_5, c_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_3, b_3, c_3 \\ a_4, b_4, c_4 \end{vmatrix} \right] - \lambda^3 \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_3, b_3, c_3 \\ a_5, b_5, c_5 \end{vmatrix} = 0,$$

deren Wurzelwerthe die unendlich entfernten Punkte des cubischen Kegelschnitts bestimmen; für unsere gewöhnliche Gleichung (4) der Curve vereinfacht sich dieselbe in

$$\begin{vmatrix} a_0, b_0, c_0 \\ a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, b_2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} a_0, b_0, c_0 \\ a_1, b_1, c_1 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} a_0, b_0, c_0 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} - \lambda^3 \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Kriterien, welche aus den Coefficienten der Gleichungen der Curve gebildet unmittelbar ihre Gattung erkennen liessen, wie dies für die ebenen Kegelschnitte geschieht, könnten mit Rücksicht auf vorstehende Bedingungsgleichungen zwar hergestellt werden, würden aber zu complicirt und eben desshalb von keiner praktischen Anwendbarkeit sein. Man wird daher in einem speciellen Fall vorstehende Gleichungen zu bilden

und wirklich aufzulösen oder wenigstens auf die Realität ihrer Wurzeln zu untersuchen haben, um über die Natur des cubischen Kegelschnitts zu entscheiden.

Nichts desto weniger gelingt es leicht, die Gleichungen jener 4 Species von Raumcurven 3. Ordnung in ihren einfachsten Formen herzustellen. Zu dem Ende haben wir uns zunächst an das im vorigen Capitel angegebene Verhältniss des Coordinatentetraeders zur Curve zu erinnern und das dort auseinandergesetzte tetraedrische Coordinatensystem in ein schiefwinkliches Parallelcoordinatensystem überzuführen, d. h. man hat erstens eine Tetraederebene, am besten wohl die Ebene $U_3 = 0$ in unendliche Ferne zu rücken, so dass sie also durch const. $= 0$ repräsentirt wird und dann mit Beibehaltung der andern 3 Seitenebenen als Coordinatenebenen, die leicht herzustellenden Entfernungen eines Punkts von ihnen durch Multiplication mit gewissen constanten, von den Winkeln, welche jene 3 Coordinatenebenen mit einander bilden, abhängigen Factoren in die schiefwinkligen Parallelcoordinaten $x\,y\,z$ desselben zu verwandeln. Man erhält unter dieser Annahme einen beliebigen Curvenpunkt als Coordinatenanfang, zur Achse der z die Tangente in ihm und zur $y\,z$-Ebene die Osculationsebene desselben; die Achse der x als nach einem unendlich entfernten Curvenpunkt gerichtet wird einer Asymptote parallel, durch welche dann auch die $x\,y$-Ebene geht. Das die Curve repräsentirende Gleichungs-System ist dann, indem man die constanten, zur Bildung der Coordinaten jenes Punkts aus seinen Entfernungen von den Coordinatenebenen dienenden Multiplicatoren sogleich mit der die Ebene U_3 repräsentirenden Constanten vereinigt:

$$(3^a)\quad \frac{x}{a} : \frac{y}{b} : \frac{z}{c} = \vartheta^3 : \vartheta^2 : \vartheta,$$

so dass dem Werth $\vartheta = 0$ der Coordinatenanfang als Curvenpunkt, dem Werth $\vartheta = \infty$ aber der unendlich entfernte Punkt der Curve auf der x-Achse entspricht. Diese Gleichung (3^a) des cubischen Kegelschnitts bedarf jedoch, um allgemein für alle 4 Species zu gelten und dieselben gehörig von einander distinguiren zu können, noch einer geringen Modification, welche erkennen lässt, dass ausser $\vartheta = \infty$ noch zwei andere reelle oder auch imaginäre Werthe dieses Parameters existiren, für welche man unendlich grosse Coordinatenwerthe erhält; wir geben ihr zu dem Ende folgende Form:

$$(4^a)\quad \frac{x}{a} = \frac{\vartheta^3}{\varphi};\ \frac{y}{b} = \frac{\vartheta^2}{\varphi};\ \frac{z}{c} = \frac{\vartheta}{\varphi},$$

wo zur Abkürzung

$$\varphi = (\vartheta - \alpha)^2 \pm \beta^2$$

gesetzt ist und das doppelte Vorzeichen des letzten Gliedes von φ dazu

dient, den Fall nur einer reellen Asymptote von dem, wo alle drei Asymptoten reell sind, zu unterscheiden. Man findet nämlich durch Vergleichung von φ mit Null, also aus der Gleichung

$$(\vartheta - \alpha)^2 \pm \beta^2 = 0$$

zwei Werthe von ϑ, welche gleichfalls unendlich grosse Coordinatenwerthe liefern, und zwar für das obere Vorzeichen die complexen Werthe $\alpha \pm \beta i$, für das untere dagegen reelle $\alpha \pm \beta$.

Ehe wir nun auf weitere Vereinfachungen der Gleichung (4^a) für die einzelnen 4 Species von cubischen Kegelschnitten eingehen, bilden wir zunächst für die Gleichung der Curve in dem eben discutirten Coordinatensystem die Gleichungen von Sehnen, Tangenten derselben u. s. w. Man erhält wie oben die Gleichungen einer Secante durch Curvenpunkte ϑ_1 und ϑ_2, wenn man die Werthe von λ, μ, ν, resp. λ_1, μ_1, ν_1 bestimmt, welche die Gleichungen

$$\lambda\left\{\frac{x}{a} - \frac{\vartheta_1^3}{(\vartheta_1 - \alpha)^2 \pm \beta^2}\right\} + \mu\left\{\frac{y}{b} - \frac{\vartheta_1^2}{(\vartheta_1 - \alpha)^2 \pm \beta^2}\right\}$$
$$+ \nu\left\{\frac{z}{c} - \frac{\vartheta_1}{(\vartheta_1 - \alpha)^2 \pm \beta^2}\right\} = 0$$

$$\lambda_1\left\{\frac{x}{a} - \frac{\vartheta_2^3}{(\vartheta_2 - \alpha)^2 \pm \beta^2}\right\} + \mu_1\left\{\frac{y}{b} - \frac{\vartheta_2^2}{(\vartheta_2 - \alpha)^2 \pm \beta^2}\right\}$$
$$+ \nu_1\left\{\frac{z}{c} - \frac{\vartheta_2}{(\vartheta_2 - \alpha)^2 \pm \beta^2}\right\} = 0$$

von einer durch den Punkt ϑ_1 und einer durch den Punkt ϑ_2 gehenden Ebene in einander überführen. Es genügen hierzu die Systeme

$$\lambda = \lambda_1 = 1;\ \mu = \mu_1 = \vartheta_1 + \vartheta_2;\ \nu = \nu_1 = \vartheta_1\,\vartheta_2$$

und

$$\lambda = \lambda_1 = 0;\ \mu = \mu_1 = \vartheta_1\,\vartheta_2 - h;\ \nu = \nu_1 = h\,(\vartheta_1 + \vartheta_2) - 2\alpha\,\vartheta_1\,\vartheta_2,$$

worin

$$h = \alpha^2 \pm \beta^2$$

gesetzt ist; man erhält durch sie als Gleichungen der Secante

$$(5^a)\quad \begin{aligned} &\frac{x}{a} - (\vartheta_1 + \vartheta_2)\,\frac{y}{b} + \vartheta_1\,\vartheta_2\,\frac{z}{c} = 0;\\ &(\vartheta_1\,\vartheta_2 - h)\,\frac{y}{b} + [h\,(\vartheta_1 + \vartheta_2) - 2\,\alpha\,\vartheta_1\,\vartheta_2]\,\frac{z}{c} - \vartheta_1\,\vartheta_2 = 0, \end{aligned}$$

aus welchen, wenn $\vartheta_1 = \vartheta_2$ angenommen wird, die Gleichungen

$$(6^a)\quad \begin{aligned} &\frac{x}{a} - 2\,\vartheta_1\,.\,\frac{y}{b} + \vartheta_1^2\,.\,\frac{z}{c} = 0,\\ &(\vartheta_1^2 - h)\,\frac{y}{b} + 2\,(\vartheta_1\,h - \alpha\,\vartheta_1^2)\,\frac{z}{c} - \vartheta_1^2 = 0 \end{aligned}$$

einer Tangente hervorgehen. Auf ähnliche Weise findet sich die Gleichung

$$
(9^a) \quad \begin{aligned} & h\frac{x}{a} + [\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 - h(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3)]\frac{y}{b} \\ & + [h(\vartheta_1\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_3 + \vartheta_2\vartheta_3) - 2\alpha\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3]\frac{z}{c} - \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 = 0 \end{aligned}
$$

einer die Curve in den 3 Punkten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ schneidenden Ebene, aus welcher sich dann als Gleichung der Osculationsebene im Punkt ϑ ergibt

$$
(10^a) \quad h\frac{x}{a} + \vartheta(\vartheta^2 - 3h)\frac{y}{b} + \vartheta^2(3h - 2\alpha\vartheta)\frac{z}{c} - \vartheta^3 = 0.
$$

Für $\vartheta = \infty$ erhält man aus (6^a) die Gleichungen

$$
z = 0; \; \frac{y}{b} - \frac{2\alpha z}{c} - 1 = 0,
$$

deren letztere sich in Folge der ersteren auf

$$
y = b
$$

reducirt, der einen reellen Asymptote, wobei zugleich für die Grösse b eine geometrische Bedeutung gewonnen wird. Sind die beiden andern Asymptoten gleichfalls reell, so haben sie die Gleichungen

$$
\frac{x}{a} - 2(\alpha \pm \beta)\frac{y}{b} + (\alpha \pm \beta)^2\frac{z}{c} = 0;
$$

$$
2\beta \cdot \frac{y}{b} - 2\beta(\alpha \pm \beta)\frac{z}{c} - (\alpha \pm \beta) = 0.
$$

Wird aus den Gleichungen der Tangente der veränderliche Parameter ϑ eliminirt, so findet sich

$$
(8^a) \quad \begin{vmatrix} \frac{x}{a}, & 0, & \frac{y}{b}, & 0 \\ \frac{y}{b}, & \frac{x}{a}, & \frac{z}{c}, & \frac{y}{b} \\ \frac{z}{c}, & \frac{y}{b}, & 1 + 2\alpha\frac{z}{c} - \frac{y}{b}, & \frac{z}{c} \\ 0, & \frac{z}{c}, & 0, & 1 + 2\alpha\frac{z}{c} - \frac{y}{b} \end{vmatrix} = 0
$$

als Gleichung der durch die Tangenten der Curve gebildeten abwickelbaren Oberfläche. Die Gleichungen der durch einen beliebigen Punkt ξ, η, ζ des Raumes möglichen einzigen Sehne des cubischen Kegelschnits werden gefunden, wenn man die Coordinaten jenes Punkts in die Gleichungen (5^a) substituirt und die sich daraus ergebenden Werthe

$$
\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\frac{\xi}{a}\left\{\frac{\eta}{b} - 2\alpha\frac{\zeta}{c} - 1\right\} + h\frac{\eta\zeta}{bc}}{\frac{\eta}{b}\left\{\frac{\eta}{b} - 2\alpha\frac{\zeta}{c} - 1\right\} + h\frac{\zeta^2}{c^2}}; \; \vartheta_1\vartheta_2 = \frac{h\left\{\frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\xi\zeta}{ac}\right\}}{\frac{\eta}{b}\left\{\frac{\eta}{b} - 2\alpha\frac{\zeta}{c} - 1\right\} + h\frac{\zeta^2}{c^2}}
$$

in dieselben einsetzt, man erhält dann als solche

$$\left[\frac{\eta}{b}\left\{\frac{\eta}{b}-2\alpha\frac{\zeta}{c}-1\right\}+h\frac{\zeta^2}{c^2}\right]\frac{x}{a}-\left[\frac{\xi}{a}\left\{\frac{\eta}{b}-2\alpha\frac{\zeta}{c}-1\right\}+h\frac{\eta\zeta}{bc}\right]\frac{y}{b}$$
$$+h\left\{\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\xi\zeta}{ac}\right\}\frac{z}{c}=0;$$

$$\left[\frac{\zeta}{c}\left\{\frac{\xi}{a}-2\alpha\frac{\eta}{b}\right\}-\frac{\eta}{b}+h\frac{\zeta^2}{c^2}\right]\frac{y}{b}-\left[\frac{\eta}{b}\left\{\frac{\xi}{a}-2\alpha\frac{\eta}{b}\right\}-\frac{\xi}{a}+h\frac{\eta\zeta}{bc}\right]\frac{z}{c}$$
$$-\left\{\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\xi\zeta}{ac}\right\}=0.$$

Durch Elimination des einen Parameters, etwa ϑ_2, aus den Gleichungen (5^a) der Secante ziehen wir

$$h\left\{\frac{y}{b}-\vartheta_1\cdot\frac{z}{c}\right\}^2-\left\{\frac{x}{a}-\vartheta_1\cdot\frac{y}{b}\right\}\left\{\vartheta_1\frac{y}{b}+(h-2\alpha\vartheta_1)\frac{z}{c}-\vartheta_1\right\}=0$$

die Gleichung des durch Verbindung des Punkts ϑ_1 mit allen übrigen Curvenpunkten entstehenden Kegels zweiten Grades, aus welcher für $\vartheta_1=\infty$ die Gleichung

$$h\left(\frac{z}{c}\right)^2+\frac{y}{b}\left(\frac{y}{b}-2\alpha\frac{z}{c}-1\right)=0$$

des die Curve enthaltenden Cylinders hervorgeht, dessen Erzeugende mit der reellen durch $\vartheta_1=\infty$ gehenden Asymptote parallel sind. Sind die andern unendlich entfernten Punkte der Curve gleichfalls reell, so werden die zugehörigen Cylinder dargestellt durch die Gleichung

$$(\alpha\mp\beta)\left\{\frac{y}{b}-(\alpha\pm\beta)\frac{z}{c}\right\}^2$$
$$-\left\{\frac{x}{a}-(\alpha\pm\beta)\frac{y}{b}\right\}\left\{\frac{y}{b}-(\alpha\pm\beta)\frac{z}{c}-1\right\}=0.$$

Dass diese Gleichung Cylinderflächen darstellt, erkennt man, indem sie mit Beibehaltung einer der frühern Coordinatenebenen und Transformation auf die Ebenen

$$X=\frac{x}{a}-(\alpha\pm\beta)\frac{y}{b}=0;\quad Y=\frac{y}{b}-(\alpha\pm\beta)\frac{z}{c}=0$$

als neuer Coordinatenebenen[1]) die Form

$$(\alpha\mp\beta)q^2Y^2-pX(qY-1)=0$$

annimmt, welche nur 2 der neuen Coordinaten enthält. Diese Form lässt auch zugleich erkennen, dass die betreffenden Cylinder hyperbolische

---

1) Vergl. Joachimsthal, analyt. Geom. d. Ebene. Cap. VII, § 59, pag. 91. Der daselbst bewiesene Satz lässt sich ohne weiteres auf den Raum übertragen, *von welcher* Erweiterung oben Gebrauch gemacht wird.

sind, denn sie werden von den Ebenen $X = 0$ und $Y - 1 = 0$ längs ihrer Schnittlinien mit der Ebene $Y = 0$ berührt; da nun die Schnittlinie der beiden letzteren als paralleler Ebenen unendlich entfernt ist, so ist die Ebene $Y - 1 = 0$ eine Asymptotenebene des Cylinders und kann derselbe mithin nur ein hyperbolischer sein. Die Erzeugenden der Cylinder werden dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{x}{a} - (\alpha \pm \beta)\frac{y}{b} = 0; \quad \frac{y}{b} - (\alpha \pm \beta)\frac{z}{c} = 0$$

und sind den Asymptoten des cubischen Kegelschnitts parallel, denn sowohl diese wie jene bilden Winkel mit Coordinatenachsen, deren Cosinus den Grössen

$$\frac{(\alpha \pm \beta)^2}{b\,c}, \quad \frac{\alpha \pm \beta}{a\,c}, \quad \frac{1}{a\,b}$$

proportional sind.

Indem wir jetzt zur speciellen Untersuchung der vier Gattungen von cubischen Kegelschnitten übergehen, bemerken wir zunächst, dass man die in den allgemeinen Gleichungen (3^a) und (4^a) vorkommenden constanten Divisoren a, b, c weglassen kann unter der Annahme, dass die lineare Einheit, womit die Coordinaten auf den Achsen gemessen werden, für die 3 Achsen verschieden sei und zwar nach der Proportion $x : y : z = a : b : c$. Wir begnügen uns jedoch mit diesem Hinweis, da eine wesentliche Vereinfachung der Formeln durch die angegebene Voraussetzung nicht erzielt wird.

Die cubische Parabel osculirt, wie schon angegeben, die unendlich entfernte Ebene; man bedarf daher bei ihrer Gleichung des die unendlich entfernten Punkte der Curve unterscheidenden Divisors φ nicht mehr und ist dieselbe demnach

$$\frac{x}{a} = \vartheta^3; \quad \frac{y}{b} = \vartheta^2; \quad \frac{z}{c} = \vartheta.$$

Sie besitzt am meisten Conformität mit der allgemeinen Gleichung der Raumcurve 3. Ordnung, wie wir sie im ersten Capitel gefunden, und werden daher auch die Gleichungen der mit der Curve in Verbindung zu bringenden Geraden, Ebenen etc. unmittelbar sich aus denen desselben Capitels ergeben. Man hat z. B.

$$\frac{x}{a} - (\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{y}{b} + \vartheta_1\,\vartheta_2\frac{z}{c} = 0;$$
$$\frac{y}{b} - (\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{z}{c} + \vartheta_1\,\vartheta_2 = 0$$

als Gleichungen einer Sehne durch die Punkte ϑ_1 und ϑ_2, ferner

$$\frac{x}{a} - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)\frac{y}{b} + (\vartheta_1\,\vartheta_2 + \vartheta_1\,\vartheta_3 + \vartheta_2\,\vartheta_3)\frac{z}{c} - \vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3 = 0$$

als Gleichung der durch die 3 Curvenpunkte ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 gehenden Ebene u. s. w. Die Tangentenfläche hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a}, & 0, & \frac{y}{b}, & 0 \\ \frac{y}{b}, & \frac{x}{a}, & \frac{z}{c}, & \frac{y}{b} \\ \frac{z}{c}, & \frac{y}{b}, & 1, & \frac{z}{c} \\ 0, & \frac{z}{c}, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\left\{\frac{x}{a} - \frac{y\,z}{b\,c}\right\}^2 - 4\left\{\frac{y}{b} - \frac{z^2}{c^2}\right\}\left\{\frac{x\,z}{a\,c} - \frac{y^2}{b^2}\right\} = 0,$$

und der die Curve vom Punkt ϑ_1 auf ihr projicirende Kegel 2. Ordnung wird dargestellt durch den Ausdruck

$$\left\{\frac{x}{a} - \vartheta_1 \frac{y}{b}\right\}\left\{\frac{z}{c} - \vartheta_1\right\} - \left\{\frac{y}{b} - \vartheta_1 \frac{z}{c}\right\}^2 = 0,$$

welcher für $\vartheta_1 = \infty$ übergeht in

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y}{b} = 0,$$

die Gleichung des einzigen die Curve enthaltenden parabolischen Cylinders, dessen Gleichung auch einfach durch Elimination des Parameters ϑ aus den beiden Gleichungen $\frac{y}{b} = \vartheta^2$ und $\frac{z}{c} = \vartheta$ erhalten werden kann. Die Curve besteht aus einem einzigen Zweige, der sich über den ganzen Cylinder hin erstreckt und kann leicht punktweise für die einzelnen Werthe von ϑ construirt werden. Ihr Verlauf ist angedeutet in Fig. 1; von welcher, sowie von den in den Fig. 2., 3., 4. gegebenen Darstellungen der drei andern Species wir am Schluss des Capitels angeben werden, wie sie erhalten worden. Bringt man die Gleichung der Curve auf die Form

$$\frac{x}{a} - \vartheta\frac{y}{b} = 0;\ \frac{y}{b} - \vartheta\frac{z}{c} = 0;\ \frac{z}{c} - \vartheta = 0,$$

so erkennt man sofort, wie sich die früher gefundene Erzeugung von Raumcurven 3. Ordnung vermittelst dreier projectivischer Grundgebilde für die cubische Parabel modificirt, indem dann eins der 3 Ebenenbüschel in ein Parallelebenenbüschel übergeht. Wir ersehen daraus, dass die Curve erhalten wird auch als theilweiser Schnitt eines hyperbolischen Paraboloids mit einer andern geradlinigen Fläche 2. Ordnung, *die eine* Erzeugende damit gemein hat.

Die 3 übrigen Gattungen von cubischen Kegelschnitten sind unmittelbar in der vorher aufgestellten, mit dem Factor φ versehenen Gleichung

$$\frac{x}{a}=\frac{\vartheta^3}{(\vartheta-\alpha)^2\pm\beta^2};\quad \frac{y}{b}=\frac{\vartheta^2}{(\vartheta-\alpha)^2\pm\beta^2};\quad \frac{z}{c}=\frac{\vartheta}{(\vartheta-\alpha)^2\pm\beta^2}$$

enthalten. Sie stellt für ein positives Zeichen von β^2 die cubische Ellipse, für ein negatives die cubische Hyperbel und endlich für den Werth $\beta=0$ die cubische hyperbolische Parabel dar. Wir gehen auf die Gleichungen von Sehnen, Tangenten u. s. w. nicht näher ein, da solche aus den früher gegebenen allgemeinen unter den oben gemachten Voraussetzungen über β^2 sich ohne weiteres ergeben.

Für die cubische Ellipse und Hyperbel kann man noch eine weitere Vereinfachung ihrer Gleichungen herbeiführen, indem die darin enthaltene Grösse $\alpha=0$ angenommen wird; eine Annahme, deren Berechtigung und Bedeutung bei einer späteren Gelegenheit nachgewiesen werden wird.

Die cubische Ellipse hat dann die Gleichung

$$\frac{x}{a}=\frac{\vartheta^3}{\vartheta^2+\beta^2};\quad \frac{y}{b}=\frac{\vartheta^2}{\vartheta^2+\beta^2};\quad \frac{z}{c}=\frac{\vartheta}{\vartheta^2+\beta^2}$$

und der die Curve enthaltende reelle Cylinder ist dargestellt durch

$$\frac{\beta^2}{c^2}\cdot z^2+\frac{y}{b}\left(\frac{y}{b}-1\right)=0,$$

woraus als Scheitelgleichung einer Ellipse erhellt, dass derselbe elliptisch ist. Die Curve erstreckt sich, wie aus Fig. 2 zu ersehen, in einem ununterbrochenen Zuge längs des ganzen Cylinders, und nähert sich dabei der einzigen reellen Asymptote, welche eine Seite des Cylinders ist. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass diese Curve und auch die beiden folgenden, gerade so wie die cubische Parabel, aus den für die Coordinaten ihrer Punkte gegebenen Functionen des Parameters unmittelbar im Raum construirt werden können.

Durch die Gleichungen

$$\frac{x}{a}=\frac{\vartheta^3}{\vartheta^2-\beta^2};\quad \frac{y}{b}=\frac{\vartheta^2}{\vartheta^2-\beta^2};\quad \frac{z}{c}=\frac{\vartheta}{\vartheta^2-\beta^2}$$

repräsentiren wir die cubische Hyperbel; der der X-Achse parallele Cylinder wird dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{\beta^2}{c^2}z^2-\frac{y}{b}\left\{\frac{y}{b}-1\right\}=0$$

und ist demnach hyperbolisch. Die beiden andern, wie früher nachgewiesen, gleichfals hyperbolischen Cylinder haben die Gleichungen

$$\mp\beta\left\{\frac{y}{b}\mp\beta\frac{z}{c}\right\}^2-\left\{\frac{x}{a}\mp\beta\frac{y}{b}\right\}\left\{\frac{y}{b}\mp\beta\frac{z}{c}-1\right\}=0$$

und sind den beiden andern Asymptoten

$$\frac{x}{a} \mp 2\beta \cdot \frac{y}{b} + \beta^2 \frac{z}{c} = 0; \quad 2\frac{y}{b} \mp 2\beta \cdot \frac{z}{c} \mp 1 = 0$$

parallel. Jeder der drei Cylinder enthält selbstverständlich eine Asymptote. Die Curve besteht aus 3 im Unendlichen zusammenhängenden Zweigen, die sich zu je zweien immer einer Asymptote nähern und in Bezug auf die 3 Cylinder ganz gleichmässig verhalten, denn es liegen auf dem einen die resp. Asymptote enthaltenden Mantel zwei Curvenäste, auf dem andern nur einer, wie in Fig. 3 zu erkennen. Was die weitere Beziehung der 6 Cylindermäntel zur Curve anbelangt, so gehen durch jeden Ast von ihr drei derselben, welche verschiedenen Cylindern angehören und darunter immer einer, der keine Asymptote enthält.

Es bleibt nun noch die hyperbolische Parabel zu betrachten; ihre Gleichungen sind

$$\frac{x}{a} = \frac{\vartheta^3}{(\vartheta^2 - \alpha)^2}; \quad \frac{y}{b} = \frac{\vartheta^2}{(\vartheta - \alpha_,)^2}; \quad \frac{z}{c} = \frac{\vartheta}{(\vartheta - \alpha)^2}$$

und der durch sie mögliche parabolische Cylinder wird dargestellt durch

$$\alpha^2 \frac{z^2}{c^2} + \frac{y}{b} \left\{ \frac{y}{b} - 2\,\alpha\,\frac{z}{c} - 1 \right\} = 0$$

oder anders geschrieben

$$\left\{ \frac{y}{b} - \alpha\,\frac{z}{c} \right\}^2 - \frac{y}{b} = 0.$$

Er nimmt durch Verlegung der XY-Ebene in die Ebene

$$Z = \frac{y}{b} - \alpha\,\frac{z}{c} = 0$$

die Gleichung

$$q^2\, Z^2 = \frac{y}{b}$$

an und wird in diesem neuen Coordinatensystem die Curve, indem man $\Theta = \frac{\vartheta}{\vartheta - \alpha}$ setzt, dargestellt durch

$$\frac{X}{a} = \frac{\Theta^3}{\Theta - \alpha} : \frac{Y}{b} = \Theta^2; \quad \frac{Z}{c} = \Theta.$$

Ihr Verlauf ist aus Fig. 4 zu erkennen, wo sie auf diesem parabolischen Cylinder gezeichnet ist; sie besteht aus 2 Zweigen, deren jeder sich mit einem Ast der reellen Asymptote nähert, während ihre beiden andern Aeste in unendlicher Ferne sich in parabolischer Form vereinigend zu denken sind, so dass in dem Vereinigungspunkt eine unendlich entfernte Tangente existirt. In derselben Figur ist auch der die Curve enthaltende hyperbolische Cylinder angedeutet; seine Seiten geben die

Richtung an, in welcher der unendlich entfernte parabolische Zweig der Curve liegt. Durch eine ähnliche Transformation wie oben kann die Curve auch auf ihn bezogen werden und hat dann die Gleichung

$$\frac{X}{a} = \frac{\Theta^3}{\Theta - \alpha}; \quad \frac{Y}{b} = \Theta - \alpha; \quad \frac{Z}{c} = \frac{\alpha}{\Theta - \alpha};$$

jeder ihrer beiden Zweige liegt dann auf einem der beiden Cylindermäntel und hat der Cylinder selbst die Gleichung

$$Y Z - \alpha b c = 0.$$

Der zwischen den einzelnen 4 Species stattfindende Zusammenhang ist nun leicht zu erkennen; die cubische Ellipse kann, indem man den durch sie gehenden elliptischen Cylinder in einen parabolischen übergehen lässt, unmittelbar in die hyperbolische Parabel übergeführt werden, welche dann andererseits auch erhalten werden kann, indem man bei einer cubischen Hyperbel den einen die Asymptote nicht enthaltenden hyperbolischen Cylindermantel unendlich weit fortrücken lässt. Die cubische Parabel endlich entsteht auf gleiche Weise aus der cubischen Ellipse sowohl, als auch aus der Hyperbel, wenn die Scheitelseite des ins Unendliche sich entfernenden Cylindertheils gerade eine Asymptote der Curve war.

Schliesslich einige Worte über die Herstellung von Zeichnungen der cubischen Kegelschnitte. In Folge der früher bestimmten Art des durch jede Species derselben möglichen Cylinders ist es leicht mit Hülfe der Methoden der descriptiven Geometrie Darstellungen der 4 Species zu machen. Zunächst wird man durch Zusammenstellung eines elliptischen Cylinders mit einem Kegel 2. Ordnung, der eine Kante mit ihm gemein hat, immer eine cubische Ellipse bekommen. Weiter wird durch Zusammenstellung eines parabolischen Cylinders mit einem Kegel 2. Ordnung, der eine Kante mit ihm gemein hat, im Allgemeinen eine hyperbolische Parabel erhalten werden; ihre im Endlichen gelegene Asymptote wird wie bei der cubischen Ellipse bestimmt durch die den Kegel längs der gemeinsamen Kante tangirende Ebene. Die Richtung der Seiten des durch die Curve gehenden hyperbolischen Cylinders findet man parallel zu dem Strahl des Kegels, welcher zur Hauptebene des parabolischen Cylinders parallel läuft. Haben der parabolische Cylinder und der Kegel die besondere Lage, dass die Tangentenebene des Kegels im gemeinsamen Strahl zur Hauptebene des Cylinders parallel ist, so vereinigt sich auch noch der auf der Asymptote gelegene unendlich entfernte Curvenpunkt mit den beiden andern unendlich entfernten Punkten und geht die hyperbolische Parabel in die einfache cubische Parabel über. Die cubische Hyperbel endlich erhält man als Schnitt eines hyperbolischen Cylinders und eines Kegels, der eine Kante mit demselben gemein hat; die auf dem Cylinder gelegene Asymptote wird

wie vorher bestimmt, die Richtungen der beiden andern und damit auch die der Seiten der auch die Curve enthaltenden beiden andern hyperbolischen Cylinder ergeben sich den Kegelseiten parallel, welche den Asymptotenebenen des ersten Cylinders parallel sind. Hat der Kegel die besondere Lage, dass die ihn längs des gemeinsamen Strahls berührende Ebene einer Asymptotenebene parallel geht, so rückt eine der Asymptoten in unendliche Ferne und geht die Curve in die cubische hyperbolische Parabel über.

Sechstes Capitel.

Nachdem im vierten Capitel nachgewiesen worden, dass die Tangentenfläche einer Raumcurve 3. Ordnung mit den Osculationsebenen der Curve Kegelschnitte bestimmt, beschäftigen wir uns zunächst mit der Untersuchung, was für Gattungen von Kegelschnitten hierbei vorkommen können und wie sich in dieser Beziehung die im vorhergehenden Capitel unterschiedenen 4 Species von cubischen Kegelschnitten verhalten. Wir bilden zu dem Ende zunächst für die vorher aufgestellte allgemeinste Gleichung

$$\frac{x}{a} = \frac{\vartheta^3}{(\vartheta - \alpha)^2 \pm \beta^2}; \quad \frac{y}{b} = \frac{\vartheta^2}{(\vartheta - \alpha)^2 \pm \beta^2}; \quad \frac{z}{c} = \frac{\vartheta}{(\vartheta - \alpha)^2 \pm \beta^2}$$

des cubischen Kegelschnitts, die Gleichung der Projection derjenigen Geraden, in welcher eine feste Osculationsebene, etwa die am Punkt ω, von einer andern solchen, die einem variablen Punkt ϑ zukommt, geschnitten wird, auf die yz-Ebene, welche dann in dieser für alle überhaupt möglichen Werthe von ϑ gleichfalls einen Kegelschnitt durch Umhüllung erzeugt, von dem dann auf die Natur des in der Osculationsebene des Punkts ω durch die Tangentenfläche hervorgebrachten Kegelschnitts geschlossen werden kann. Die Gleichungen der beiden Osculationsebenen sind nach dem Frühern

$$\text{(A.)} \quad h\frac{x}{a} + \omega(\omega^2 - 3h)\frac{y}{b} + \omega^2(3h - 2\alpha\omega)\frac{z}{c} - \omega^3 = 0$$

und

$$h\frac{x}{a} + \vartheta(\vartheta^2 - 3h)\frac{y}{b} + \vartheta^2(3h - 2\alpha\vartheta)\frac{z}{c} - \vartheta^3 = 0;$$

man findet durch Elimination des x aus ihnen mit Hinweglassung des Factors $(\vartheta - \omega)$

$$\frac{y}{b}(\vartheta^3 + \omega\vartheta + \omega^2 - 3h) + \frac{z}{c}[3h(\vartheta + \omega) - 2\alpha(\vartheta^2 + \omega\vartheta + \omega^2)] - (\vartheta^2 + \omega\vartheta + \omega^2) = 0$$

oder nach Potenzen von ϑ geordnet

$$\vartheta^2 \left\{ \frac{y}{b} - 2\alpha\frac{z}{c} - 1 \right\} + \vartheta \left\{ \omega\left(\frac{y}{b} - 1\right) + (3h - 2\alpha\omega)\frac{z}{c} \right\}$$

$$+ (\omega^2 - 3h)\frac{y}{b} + \omega(3h - 2\alpha\omega)\frac{z}{c} - \omega^2 = 0$$

als Gleichung der Projection besagter Geraden auf die yz-Ebene. Um die Gleichung der durch sie erzeugten Enveloppe zu erhalten, hat man bekanntlich [1]) die Bedingung zu bilden, unter welcher vorstehende Gleichung gleiche Werthe für ϑ liefert; es ist dieselbe

$$\left\{ \omega\left(\frac{y}{b} - 1\right) + (3h - 2\alpha\omega)\frac{z}{c} \right\}^2 -$$

$$4\left\{ \frac{y}{b} - 2\alpha\frac{z}{c} - 1 \right\}\left\{ (\omega^2 - 3h)\frac{y}{b} + \omega(3h - 2\alpha\omega)\frac{z}{c} - \omega^2 \right\} = 0$$

oder entwickelt und nach Potenzen der Coordinaten geordnet

$$\text{(B.)} \qquad (4h - \omega^2)\frac{y^2}{b^2} + (3h - 2\alpha\omega)(h + 2\alpha\omega)\frac{z^2}{c^2}$$

$$+ 2(2\alpha\omega^2 - \omega h - 4\alpha h)\frac{yz}{bc} + 2(\omega^2 - 2h)\frac{y}{b}$$

$$+ 2\omega(h - 2\alpha\omega)\frac{z}{c} - \omega^2 = 0,$$

und stellt sie den die zu untersuchende Schnittcurve auf die yz-Ebene projicirenden Cylinder, also in Verbindung mit der Gleichung der Osculationsebene des Punkts ω diese Schnittcurve selbst dar. Um über ihre Natur zu entscheiden, bildet man die bekannte Determinante

$$\nabla = \begin{vmatrix} 4h - \omega^2, & 2\alpha\omega^2 - \omega h - 4\alpha h \\ 2\alpha\omega^2 - \omega h - 4\alpha h, & (3h - 2\alpha\omega)(h + 2\alpha\omega) \end{vmatrix},$$

welche den einfachen Werth

$$\nabla = -4h^2(\omega^2 - 2\alpha\omega + 4\alpha^2 - 3h)$$

oder bei der frühern Bedeutung von $h = \alpha^2 \pm \beta^2$

$$\nabla = -4(\alpha^2 \pm \beta^2)^2 \cdot [(\omega - \alpha)^2 \mp 3\beta^2]$$

annimmt; je nachdem ihr Werth positiv, Null oder negativ ausfällt, ist der zu untersuchende Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. In unserm Fall wird das Vorzeichen von ∇ bestimmt durch den Factor $(\omega - \alpha)^2 \mp 3\beta^2$, welchen wir kurz mit $\triangle$ bezeichnen wollen, und wird also die zu untersuchende Schnittcurve eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse sein, je nachdem

---

1) Vergl. Salmon, anal. Geom. d. Kegelschnitte. Deutsch v. Fiedler. 2. Aufl. Art. 316. pag. 367.

$$\triangle = (\omega - \alpha)^2 \mp 3\,\beta^2 \gtreqless 0.$$

Dieser Ausdruck kann für das untere Vorzeichen, welches gilt, wenn die Curve 3 reelle unendlich entfernte Punkte hat, wobei $h = \alpha^2 - \beta^2$ ist, als Summe zweier Quadrate nur positive Werthe annehmen und hat man daher den Satz:

> Die Tangentenfläche einer cubischen Hyperbel wird von allen Osculationsebenen derselben (welche zugleich Tangentenbenen der Fläche sind) in Hyperbeln geschnitten.

Bei der cubischen Ellipse, wo das obere Vorzeichen gilt, kommen alle drei Formen von Kegelschnitten vor; bemerkenswerth sind die beiden Parabeln für die durch Vergleichung von $\triangle$ mit Null sich ergebenden Werthe

$$\omega = \alpha \pm \beta\sqrt{3};$$

sie liegen in den Ebenen

$$h\,\frac{x}{a} + 2\,\alpha\,(3\,h - 4\,\alpha^2)\,\frac{y}{b} + (3\,h - 4\,\alpha^2)^2\,\frac{z}{c} = (\alpha \pm \beta\sqrt{3})^3,$$

welche, wie diese Gleichungen lehren, parallel sind und werden ihre Projectionen auf die yz-Ebene dargestellt durch die Gleichungen

$$\left\{\frac{y}{b}\,(\beta \pm \alpha\sqrt{3}) + \frac{z}{c}\,(\alpha \mp \beta\sqrt{3})\,(\beta \pm \alpha\sqrt{3})\right\}^2$$

$$+ 2(\beta^2 - \alpha^2 \pm 2\alpha\beta\sqrt{3})\,\frac{y}{b} + 2(\beta^2 - \alpha^2 \pm 2\alpha\beta\sqrt{3})\,\frac{z}{c} - (\alpha \pm \beta\sqrt{3})^2 = 0.$$

Da für $\omega = \alpha$ in dem vorliegenden Fall $\triangle = -3\,\beta^2$, also negativ ist, so schneidet die zu diesem Parameter gehörige Osculationsebene die Tangentenfläche in einer Ellipse und werden ferner, da der Werth α zwischen den obigen Werthen $\alpha \pm \beta\sqrt{3}$ liegt, auch für alle übrigen zu zwischen den beiden letzteren liegenden Parameterwerthen gehörigen Punkte der Curve die betreffenden Schnitte gleichfalls Ellipsen sein, für alle ausserhalb der beiden Gränzwerthe $\alpha \pm \beta\sqrt{3}$ liegenden Parameter dagegen Hyperbeln. Man hat daher den Satz:

> Die cubische Ellipse hat zwei parallele Osculationsebenen, welche die Tangentenfläche der Curve in Parabeln schneiden, während alle übrigen Osculationsebenen dieselbe in Ellipsen und Hyperbeln schneiden, und zwar diejenigen, welche zu zwischen den parallelen Osculationsebenen liegenden Curvenpunkten gehören, in Ellipsen, die andern dagegen in Hyperbeln.

Für die cubisch-hyperbolische Parabel, bei welcher, wie wir oben gesehen, $\beta = 0$ anzunehmen, sind nur positive Werthe von $\triangle$ möglich und verschwindet dasselbe für den Werth $\omega = \alpha$, so dass also eine *Ebene, die* Osculationsebene des unendlich entfernten Doppelpunkts der

Curve, existirt, deren Schnitt mit der Tangentenfläche eine Parabel ist; welches Resultat wir als Satz nochmals besonders hervorheben:

Die Osculationsebenen einer cubischen hyperbolischen Parabel schneiden die Tangentenfläche derselben sämmtlich in Hyperbeln, mit Ausnahme der dem Berührungspunkt der unendlich entfernten Ebene angehörigen, welche mit der Fläche eine Parabel gemein hat.

Die Projection derselben auf die yz-Ebene hat die Gleichung

$$3\left\{\frac{y}{b}-\alpha\frac{z}{c}\right\}^2-\left\{2\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)+1\right\}=0$$

und wird sie selbst demnach durch diese Gleichung in Verbindung mit der

$$\frac{x}{a}-2\alpha\frac{y}{b}+\alpha^2\frac{z}{c}-\alpha=0$$

ihrer Ebene dargestellt.

Ehe wir zu den entsprechenden Untersuchungen für die cubische Parabel übergehen, wenden wir uns zur Betrachtung des geometrischen Orts der Mittelpunkte von den vorher behandelten Kegelschnitten, in welchen die Tangentenfläche der Raumcurve 3. Ordnung von den Osculationsebenen geschnitten wird, oder wie man kürzer sagen kann, der der Reciprokalfläche eines cubischen Kegelschnitts eingeschriebenen ebenen Kegelschnitte. Es wurde schon früher bemerkt, dass dieser Ort ein Kegelschnitt ist und es lässt sich mit Rücksicht auf die vorhergehenden Resultate die Natur desselben schon im Voraus erkennen; denn es muss derselbe bei der cubischen Ellipse, wo zwei Parabeln unter jenen Schnitten vorkommen, zwei unendlich entfernte Punkte haben, also eine Hyperbel sein, bei der cubischen hyperbolischen Parabel dagegen, wo nur ein parabolischer Schnitt möglich ist, hat der Ort der Mittelpunkte nur einen unendlich entfernten Punkt, und ist demnach eine Parabel, bei der cubischen Hyperbel endlich, deren Tangentenfläche nur in Hyperbeln geschnitten wird, ist er nothwendigerweise eine Ellipse. Es wird nicht überflüssig sein, diese Resultate nochmals besonders analytisch herzuleiten, indem sich dabei noch einige andere nicht uninteressante Beziehungen ergeben.

Wir bilden zu dem Ende die Coordinaten ξ, η, ζ des Mittelpunkts eines der durch die Gleichungen (A.) und (B.) dargestellten Kegelschnitte, welche die Tangentenfläche mit den Osculationsebenen gemein hat, nämlich

$$\text{(a)}\quad 2\,\Delta\,\frac{\xi}{a}=3\,\omega\,(2\,\alpha\,\omega-3\,h),$$

$$\text{(b)}\quad 2\,\Delta\,\frac{\eta}{b}=2\,\omega\,(\omega-\alpha)-3\,h,$$

$$\text{(c)}\quad 2\,\Delta\,\frac{\zeta}{c}=\omega-4\,\alpha,$$

aus denen sich durch Elimination von ω die Gleichungen

$$h\frac{\xi}{a}+2\alpha(3h-4\alpha^2)\frac{\eta}{b}+(3h-4\alpha^2)^2\cdot\frac{\zeta}{c}+\alpha(8\alpha^2-9h)=0;$$

$$2\left\{(8\alpha^2-3h)\frac{\zeta}{c}+4\alpha\left(1-\frac{\eta}{b}\right)\right\}^2$$
$$+\left\{1+2\alpha\frac{\zeta}{c}-\frac{\eta}{b}\right\}\cdot\left\{2(4\alpha^2+3h)\frac{\eta}{b}-16\alpha^3\frac{\zeta}{c}-(8\alpha^2+3h)\right\}=0$$

als den Ort sämmtlicher Mittelpunkte darstellend ergeben; die letztere wird einfach erhalten als Resultante der Gleichungen (b) und (c), während sich die erstere durch Substitution der aus (b) und (c) zu entnehmenden Werthe von ω^2 und ω in (a) herleiten lässt; sie zeigt, dass die Ebene der Mittelpunkte den beiden oben bestimmten parallelen Osculationsebenen gleichfalls parallel ist und ausserdem von beiden gleichweit absteht. Wird die andere nach η und ζ geordnet, so nimmt sie die Form

$$2(4\alpha^2-h)\frac{\eta^2}{b^2}-2\cdot2\alpha(8\alpha^2-5h)\frac{\eta\zeta}{bc}+2[16(\alpha^4-\alpha^2h)+3h^2)]\frac{\zeta^2}{c^2}$$
$$-(16\alpha^2-3h)\frac{\eta}{b}+2\alpha(16\alpha^2-9h)\frac{\zeta}{c}+8\alpha^2-h=0$$

an und stellt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse dar, je nachdem die Grösse

$$h-\alpha^2\equiv\pm\beta^2,$$

von welcher allein das Vorzeichen der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2(4\alpha^2-h), & 2\alpha(8\alpha^2-5h) \\ 2\alpha(8\alpha^2-5h), & 2[16(\alpha^4-\alpha^2h)+3h^2 \end{vmatrix}=-12h^2(h-\alpha^2)$$

abhängt, positiv, Null, oder negativ ist. Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Grösse $\pm\beta^2$ in der Gleichung (4^a) der Curve sehen wir demnach unsere vorigen Behauptungen bestätigt. Als Coordinaten X, Y, Z des Mittelpunkts des eben untersuchten Kegelschnitts, worauf die Centra der übrigen liegen, hat man

$$\frac{X}{a}=\frac{\alpha(9h-8\alpha^2)}{4(h-\alpha^2)};\quad\frac{Y}{b}=\frac{3h-2\alpha^2}{4(h-\alpha^2)};$$
$$\frac{Z}{c}=\frac{\alpha}{4(h-\alpha^2)};$$

ein Resultat, welches insofern bemerkt zu werden verdient, als, wie wir später zeigen werden, durch eben diesen Punkt die 3 Osculationsebenen von den Punkten hindurchgehn, in welchen die Ebene des Orts der Centra die Raumcurve 3. Ordnung schneidet.

Für die cubische Ellipse hängt, wie oben nachgewiesen, die Gattung des Kegelschnitts, den eine ihrer Osculationsebenen mit der Tangentenfläche gemein hat, von dem mit $\triangle$ bezeichneten Ausdruck ab; es

erselbe eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\triangle \lesseqgtr 0$.

e Grösse $\triangle$ lässt sich vermöge der Gleichungen (b) und (c) durch Coordinaten η, ζ der Mittelpunkte jener Kegelschnitte ausdrücken; findet nämlich durch Addition der Gleichungen

$$2 \triangle \frac{\eta}{b} = 2 \omega (\omega - \alpha) - 3 h$$

$$- 2 \alpha \cdot 2 \triangle \frac{\zeta}{c} = - 2 \alpha \omega + 4 \alpha^2$$

$$- 2 \triangle = - [(\omega - \alpha)^2 - 3 \beta^2]$$

·t

$$\triangle = \frac{\frac{3}{2} h}{\frac{\eta}{b} - 2 \alpha \frac{\zeta}{c} - 1} = \frac{\frac{3}{2} (\alpha^2 + \beta^2)}{\frac{\eta}{b} - 2 \alpha \frac{\zeta}{c} - 1},$$

ιus man erkennt, dass das Vorzeichen von $\triangle$ nur von dem des Di-rs $\frac{\eta}{b} - 2 \alpha \frac{\zeta}{c} - 1$ abhängt. Dieser Divisor hat aber mit Null ver-ıen eine geometrische Bedeutung; es ist nämlich, wie sich aus dem ıern ergibt,

$$\frac{\eta}{b} - 2 \alpha \frac{\zeta}{c} - 1 = 0;$$

$$\frac{\xi}{a} + 2 \alpha (3 h - 4 \alpha^2) \frac{\eta}{b} + (3 h - 4 \alpha^2)^2 \cdot \frac{\zeta}{c} + \alpha (8 \alpha^2 - 9 h) = 0$$

Gleichung einer Tangente des Kegelschnitts, worauf die Centra ›n, und erhält also die linke Seite von

$$\frac{\eta}{b} - 2 \alpha \frac{\zeta}{c} - 1 = 0$$

tives oder negatives Vorzeichen, je nachdem die Punkte η, ζ auf der n oder der andern Seite dieser Tangente liegen, d. h. dem einen r dem andern Zweig jener Hyperbel angehören.

Man hat demnach folgende Sätze:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte, welche der Tangentenfläche einer cubischen Ellipse eingeschrieben werden können, ist eine Hyperbel, und zwar gehören zu den beiden unendlich entfernten Punkten derselben die beiden einzigen unter jenen Kegelschnitten möglichen Parabeln, deren Ebenen mit der Ebene jener Hyperbel parallel sind und gleich weit von ihr abstehn, während ihre Achsen offenbar den Asymptoten derselben bezüglich parallel sind. Die Centra der hyperbolischen Schnitte jener Fläche

liegen auf dem einen, die der elliptischen auf dem andern Zweige besagter Hyperbel.

Die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte, welche der Tangentenfläche einer cubischen Hyperbel sich einschreiben lassen, liegen auf einer Ellipse und kommen darunter keine vor, deren Ebenen parallel sind.

Bei der hyperbolischen Parabel liegen die Mittelpunkte von allen ihrer Tangentenfläche einschreibbaren Kegelschnitten auf einer Parabel, deren Ebene mit der des einzigen parabolischen Schnittes der Fläche zusammenfällt.

Die cubische hyperbolische Parabel vermittelt, wie aus dem Vorhergehenden zu ersehen, den Zusammenhang zwischen der cubischen Ellipse und Hyperbel in gleicher Weise, wie die ebene Parabel zwischen den gleichnamigen ebenen Curven, sie ist, wie schon früher bemerkt, der Gränzfall, in welchen sowohl die cubische Hyperbel übergeht, wenn zwei ihrer unendlich entferntenPunkte zusammenfallen, als auch die cubische Ellipse, wenn die beiden parallelen Osculationsebenen derselben mit der Ebene des Orts der Centra sich vereinigen. Es wird genügen, hier auf die Analogien, welche das im Vorstehenden untersuchte System von Kegelschnitten im Raume, die der Tangentenfläche einer Raumcurve 3. Ordnung eingeschrieben sind, mit dem der einem Viereck umschriebenen Kegelschnitte in der Ebene darbietet, einfach hinzuweisen und über letzteres nur den Fundamentalsatz:

Die Mittelpunkte aller durch dieselben 4 Punkte gehenden Kegelschnitte liegen auf einem bestimmten Kegelschnitt,

zu erwähnen.

Werden die Coordinaten

$$\frac{x}{a} = \frac{\vartheta^3}{\varphi}, \frac{y}{b} = \frac{\vartheta^2}{\varphi}; \frac{z}{c} = \frac{\vartheta}{\varphi}$$

eines Curvenpunkts in die Gleichung

$$h\frac{\xi}{a} + 2\alpha(3h - 4\alpha^2)\frac{\eta}{b} + (3h - 4\alpha^2)^2 \cdot \frac{\zeta}{c} + \alpha(8\alpha^2 - 9h) = 0$$

der Ebene der Centren der ihrer Tangentenfläche einbeschriebenen Kegelschnitte eingesetzt, so ergeben sich als Wurzeln der daraus resultirenden cubischen Gleichung die Parameter der Punkte, in welchen diese Ebene von der Curve getroffen wird; man erhält auf diese Weise nach Weglassung des gemeinsamen Factors $h = \alpha^2 \pm \beta^2$

$$\vartheta^3 - 3\alpha\vartheta^2 + 3(\alpha \pm 3\beta^2)\vartheta - (\alpha^3 \pm 9\alpha\beta^2) \equiv$$
$$(\vartheta - \alpha)[(\vartheta - \alpha)^2 \pm 9\beta^2] = 0,$$

woraus man ersieht, dass einer jener Punkte zum Parameter α gehört, während sich für die beiden andern unter der Voraussetzung eines

positiven Vorzeichens von β^2 die beiden complexen Werthe

$$\vartheta = \alpha \pm 3\beta \cdot i,$$

dagegen für ein negatives β^2 die reellen Werthe

$$\vartheta = \alpha \pm 3\beta$$

ergeben. Dies beweist die folgenden Sätze:

Die Ebene der Mittelpunkte aller der Tangentenfläche einer cubischen Ellipse eingeschriebenen Kegelschnitte trifft die letztere nur in einem reellen Punkt

und

Die cubische Hyperbel hat mit der Ebene der Centren der ihrer Tangentenfläche einschreibbaren Kegelschnitte immer 3 reelle Punkte gemein.

Da für die beiden oben genannten Species von Raumcurven 3. Ordnung unter den 3 Schnittpunkten der Ebene der Centra der in der Tangentenfläche möglichen Kegelschnitte immer einer, dessen Parameter α ist, vorkommt, so ergibt sich jetzt ohne Weiteres der Sinn und die Berechtigung der im vorigen Capitel zur Vereinfachung ihrer Gleichungen gemachten Voraussetzung $\alpha = 0$; man hat damit eben diesen Punkt zum Coordinatenanfang des dort ausführlich erörterten Systems gewählt.

Bei der hyperbolischen Parabel, wo $\beta^2 = 0$ zu nehmen, reducirt sich die vorige Bestimmungsgleichung auf

$$(\vartheta - \alpha)^3 = 0$$

und liefert daher 3 gleiche Werthe α für die Parameter der Schnittpunkte der Curve mit der Ebene der Centren. Man ersieht daraus, dass die Curve aus der cubischen Hyperbel entsteht, wenn ihre drei in der Ebene der Centren gelegenen Punkte sich vereinigen und dabei in unendliche Ferne rücken; es ist jedoch der dreifache unendlich entfernte Punkt der Curve wohl zu unterscheiden von dem der cubischen Parabel, denn während die letztere eine unendlich entfernte Osculationsebene hat, ist dies bei der hyperbolischen Parabel nicht der Fall, sie osculirt eine im endlichen Raume gelegene Ebene, deren Gleichung

$$\frac{x}{a} - 2\alpha\frac{y}{b} + \alpha^2\frac{z}{c} - \alpha = 0$$

ist, in α, und hat man sich die Sache so zu denken, dass in diesem Punkt α ein Curvenzweig und die ihn darin osculirende Ebene von einem andern durchschnitten wird.

Wir verweilen bei den bis jetzt betrachteten drei Species noch etwas, um die Frage zu erledigen, ob unter den Schnitten ihrer Tangentenflächen durch die Osculationsebenen auch als Curven 2. Grades zu betrachtende Systeme von geraden Linien vorkommen können und bilden zu dem Ende die sogenannte Discriminante der Gleichung (B), nämlich:

$$\begin{vmatrix} 4h - \omega^2, & 2\alpha\omega - \omega h - 4\alpha h, & \omega^2 - 2h \\ 2\alpha\omega^2 - \omega h - 4\alpha h, & (3h - 2\alpha\omega)(h + 2\alpha\omega), & \omega(h - 2\alpha\omega) \\ \omega^2 - 2h, & \omega(h - 2\alpha\omega), & -\omega^2 \end{vmatrix}.$$

welche den einfachen Werth

$$-12h^4(4h - \omega^2)$$

annimmt; wird derselbe gleich Null, so zerfällt der durch die Gleichung (B) dargestellte Kegelschnitt in das System zweier sich schneidender (reeller oder imaginärer) Geraden. Dasselbe gilt dann auch von dem in der Osculationsebene (A) gelegenen Kegelschnitt, dessen Projection auf die YZ-Ebene der erstere ist. Vergleicht man den Werth der Discriminante mit Null, so kann die hierdurch resultirende Gleichung nur befriedigt werden, wenn

$$4h - \omega^2 = 0$$

wird, woraus sich $\omega = \pm 2\sqrt{h}$ als zu den beiden betreffenden Osculationsebenen gehörige Parameterwerthe ergeben. Da nun für die cubische Ellipse $h = \alpha^2 + \beta^2$, also immer positiv ist, so erkennt man, dass für dieselbe immer zwei derartige Osculationsebenen existiren, während bei der cubischen Hyperbel, wo $h = \alpha^2 - \beta^2$, auch der Fall möglich ist, dass der Werth von h negativ ausfällt, also keine derartigen reellen Schnitte der Tangentenfläche vorhanden sind.

Es bleibt uns noch in der seither verfolgten Richtung die cubische Parabel zu untersuchen; wir bilden mit Hilfe der Gleichung von zweien ihrer Osculationsebenen

$$\frac{x}{a} - 3\vartheta\frac{y}{b} + 3\vartheta^2\frac{z}{c} - \vartheta^3 = 0,$$

$$\frac{x}{a} - 3\omega\frac{y}{b} + 3\omega^2\frac{z}{c} - \omega^3 = 0$$

durch Elimination des x aus denselben, wie oben, die Projection einer Tangente des zu untersuchenden Kegelschnittes auf die YZ-Ebene, nämlich:

$$3\frac{y}{b} - 3(\vartheta + \omega)\frac{z}{c} + (\vartheta^2 + \omega\vartheta + \omega^2) = 0,$$

oder nach ϑ geordnet

$$\vartheta^2 - \vartheta\left(3\frac{z}{c} - \omega\right) + \left\{3\left(\frac{y}{b} - \omega\frac{z}{c}\right) + \omega^2\right\} = 0$$

und erhalten durch Gleichsetzen der Determinante dieser Gleichung mit Null die von dieser Tangente umhüllte Curve, d. h. die Projection des gesuchten Kegelschnitts auf der YZ-Ebene dargestellt durch

$$\left(3\frac{z}{c} - \omega\right)^2 - 4\left\{3\left(\frac{y}{b} - \omega\frac{z}{c}\right) + \omega^2\right\} = 0.$$

Diese Gleichung nimmt bei Beziehung auf ein neues Coordinatensystem:

$$Y = 3\frac{z}{c} - \omega = 0;\; Z = 3\left(\frac{y}{b} - \omega\frac{z}{c}\right) + \omega^2 = 0,$$

die Form

$$p^2 Y^2 = 4\, q\, Z$$

an und gibt sich damit sofort als Parabel zu erkennen; man hat daher den Satz:

Die Tangentenfläche einer cubischen Parabel wird von sämmtlichen Osculationsebenen der Curve in Parabeln geschnitten,

so dass also für diese Curve der bei den andern Arten von cubischen Kegelschnitten so bemerkenswerthe Ort der Centra der in der Tangentenfläche gelegenen Kegelschnitte durch sein Entrücktwerden in unendliche Ferne sich unserer Betrachtung entzieht. Von den in der Tangentenfläche der cubischen Parabel möglichen Parabeln reducirt sich die in der unendlich entfernten Osculationsebene gelegene auf eine als doppelt zu rechnende Gerade, nämlich die beiden in jener Ebene gelegenen zusammenfallenden Tangenten der Curve.

Aus den bisherigen Sätzen ersieht man, dass es ebenso einfach möglich ist, Modelle der Tangentenfläche für die einzelnen 4 Species von cubischen Kegelschnitten zu erhalten, wie aus den Betrachtungen des vorigen Capitels die Zeichnung der Curven selbst sich darbot.

Der am Schluss des dritten Capitels bewiesene Satz, dass eine Sehne einer Raumcurve 3. Ordnung, welche durch die Schnittlinie der Osculationsebene eines Punkts α mit der Ebene, welche die Curve in β tangirt und zugleich in α schneidet, hindurchgeht, auch von der Schnittlinie der Osculationsebene an β mit der in α berührenden und zugleich durch β gehenden Ebene getroffen wird, und dass die beiden Punkte, welche sie mit den eben genannten Geraden gemein hat, harmonische sind zu ihren Schnittpunkten mit der Curve, gibt Veranlassung zu mehreren interessanten Sätzen für die einzelnen Gattungen von cubischen Kegelschnitten, wenn man die eine jener beiden Geraden in's Unendliche rücken lässt, indem dann die harmonische Theilung der Sehne in eine Halbirung derselben durch die andere dieser Geraden übergeht, weshalb wir die letztere als geometrischen Ort der Mittelpunkte einer Schaar von Sehnen gewissermassen als einen Durchmesser des cubischen Kegelschnitts bezeichnen können.

Man erkennt ohne weiteres, dass bei der cubischen Parabel, welche eine unendlich entfernte Osculationsebene besitzt, für jeden ihrer Punkte zwei Gerade von der zuletzt angegebenen Beschaffenheit möglich sind, indem die unendlich entfernte von ihnen erhalten wird als Schnitt der unendlich entfernten Osculationsebene mit der Ebene

$$\frac{y}{b} - 2\vartheta\frac{z}{c} + \vartheta^2 = 0,$$

welche durch den unendlich entfernten Curvenpunkt geht und in ϑ die Curve berührt, während der zugehörige Durchmesser der cubischen Parabel, als Schnitt der in ϑ osculirenden Ebene mit der durch ϑ gehenden und im unendlich entfernten Punkt der Curve tangirenden Ebene, repräsentirt wird durch

$$\frac{x}{a} - 3\vartheta\frac{y}{b} + 3\vartheta^2\frac{z}{c} - \vartheta^3 = 0; \ \frac{z}{c} - \vartheta = 0.$$

Es ergibt sich hieraus, dass durch jeden Punkt der Parabel ein Durchmesser möglich ist, sowie dass die von ihm halbirten Sehnen sämmtlich der durch den Schnittpunkt des Durchmessers mit der Curve gehenden zu den Seiten des die Curve enthaltenden parabolischen Cylinders parallelen Tangentenebene der Curve parallel sind, und lehrt insbesondere die Gleichung $\frac{z}{c} - \vartheta = 0$, dass alle Durchmesser einer bestimmten Ebene parallel sind, welche die Richtung der unendlich entfernten Tangente enthält, was wir alles nochmals in folgenden Satz zusammenfassen:

> Durch jeden Punkt einer cubischen Parabel giebt es eine berührende Ebene, die zu den Seiten des durch die Curve möglichen Cylinders parallel ist; jede zu dieser Ebene parallele Sehne der Curve wird halbirt von einer Geraden, sogenanntem Durchmesser, welche die Schnittlinie der Osculationsebene jenes Punkts mit der durch ihn gehenden und die Curve in ihrem unendlich entfernten Punkt berührenden Ebene ist. Durch jeden Punkt der cubischen Parabel geht daher ein Durchmesser und sind alle Durchmesser einer bestimmten Ebene parallel.

Was die übrigen Arten, welche keine unendlich entfernte Osculationsebene besitzen, anbetrifft, so steht zunächst fest, dass die in Betracht kommende unendlich entfernte Gerade jedenfalls der Schnitt der Osculationsebene eines unendlich entfernten Curvenpunkts mit einer dazu parallelen Tangentenebene sein muss. Betrachten wir zuerst die cubische Hyperbel, so ist für die früher gefundene einfachste Gleichung derselben

$$\frac{x}{a} = \frac{\vartheta^3}{\vartheta^2 - \beta^2}; \ \frac{y}{b} = \frac{\vartheta^2}{\vartheta^2 - \beta^2}; \ \frac{z}{c} = \frac{\vartheta}{\vartheta^2 - \beta^2},$$

die einer Osculationsebene im Punkt ω

$$\beta^2 \cdot \frac{x}{a} - \omega(\omega^2 + 3\beta^2)\frac{y}{b} + 3\omega^2\beta^2 \cdot \frac{z}{c} + \omega^3 = 0$$

woraus sich für $\omega = \beta$

$$\frac{x}{a} - 4\beta \cdot \frac{y}{b} + 3\beta^2 \cdot \frac{z}{c} + \beta = 0$$

als solche des einen unendlich entfernten Curvenpunkts β ergibt. Die Gleichung einer durch ihn gehenden und in ω berührenden Ebene ist

$$\beta\left\{\frac{x}{a}-2\vartheta\cdot\frac{y}{b}+\vartheta^2\cdot\frac{z}{c}\right\}-\left\{(\vartheta^2+\beta^2)\frac{y}{b}-2\beta^2\vartheta\cdot\frac{z}{c}+\vartheta^2\right\}=0;$$

soll dieselbe zu der eben genannten Osculationsebene parallel sein, so muss

$$\beta:\vartheta^2+\beta^2-2\vartheta\beta:\vartheta^2\beta+2\beta^2\vartheta=1:4\beta:3\beta^2$$

sein, was für den Werth $\vartheta=-3\beta$, wobei die Gleichung der letztern Ebene in

$$\frac{x}{a}-4\beta\cdot\frac{y}{b}+3\beta^2\cdot\frac{z}{c}+9\beta=0$$

übergeht, der Fall ist. Dieser Werth $\vartheta=-3\beta$ gehört, wie wir früher gesehen, zu einem der drei reellen Punkte, welche die cubische Hyperbel mit der Ebene der Centra der in ihrer Tangentenfläche möglichen Kegelschnitte gemein hat; zu ihm gehört also ein Durchmesser. Gleiches gilt selbstverständlich auch für die beiden andern unendlich entfernten Curvenpunkte und die entsprechenden 2 Schnittpunkte der Curve mit der Ebene der Centren; wir haben daher den Satz:

Die cubische Hyperbel hat drei Durchmesser, welche durch die der Curve mit der Ebene der Centra der in ihrer Tangentenfläche möglichen Kegelschnitte gemeinsamen Punkte gehen. Die von einem derselben halbirten Sehnen sind parallel der in dem betreffenden Punkt die Curve berührenden Ebene, welche zugleich einen der unendlich entfernten Curvenpunkte enthält, also den Seiten des resp. durch die Curve möglichen Cylinders parallel ist.

Bei der cubischen Ellipse werden 2 der unendlich entfernten Punkte, sowie zwei von ihren Durchschnittspunkten mit der Ebene der Centren imaginär und bleibt daher nur für den dritten reellen ein Durchmesser bestehen. Was schliesslich die Durchmesser der hyperbolischen Parabel betrifft, so fallen dieselben ins Unendliche, indem, wie früher gezeigt, die Ebene der Centra mit der Curve den unendlich entfernten Punkt gemein hat.

Siebentes Capitel.

Bereits im ersten Capitel wurde angegeben, dass die Raumcurve 3. Ordnung auftritt als partieller Schnitt von 2 geradlinigen Flächen 2. Ordnung, welche ausser ihr noch eine Gerade gemein haben; man wird hierdurch auf die Untersuchung hingeführt, in welcher Beziehung die Curve zu einer sie enthaltenden Fläche 2. Ordnung stehe. Da

aus der Gleichung des cubischen Kegelschnitts sich unmittelbar die Gleichungen

$$U_1^2 - U_0 U_2 = 0; \quad U_2^2 - U_1 U_3 = 0$$

von zwei Kegeln zweiten Grades und die

$$U_0 U_3 - U_1 U_2 = 0$$

eines einfachen Hyperboloids ergeben, welche die Curve enthalten, so lässt sich durch Addition dieser mit constanten Factoren versehenen Gleichungen leicht die irgend einer durch sie hindurchgehenden Fläche 2. Ordnung bilden; sie ist

$$(1) \quad \lambda [U_1^2 - U_0 U_2] + \mu [U_2^2 - U_1 U_3] + \nu [U_0 U_3 - U_1 U_2] = 0.$$

Schreibt man dieselbe

$$[\nu U_0 - \mu U_1] [\nu U_3 - \lambda U_2] + [\lambda U_1 - \nu U_2] [\nu U_1 - \mu U_2] = 0,$$

so lehrt ihre Form, dass die Fläche im Allgemeinen ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche ist, und lässt unmittelbar

$$(2) \quad \nu U_0 - \mu U_1 + l [\lambda U_1 - \nu U_2] = 0; \quad \nu U_1 - \mu U_2 + l [\nu U_3 - \lambda U_2] = 0$$

als Gleichungen irgend einer Geraden der einen Erzeugung und

$$(3) \quad \nu U_0 - \mu U_1 + m [\nu U_1 - \mu U_2] = 0; \quad \lambda U_1 - \nu U_2 + m [\nu U_3 - \lambda U_2] = 0$$

als solche von einer der andern erkennen. Dieses Hyperboloid kann sich in besondern Fällen auch auf einen Kegel 2. Ordnung, ein parabolisches Hyperboloid u. s. w. reduciren. Die in der Gleichung desselben vorkommenden zwei unabhängigen Constanten $\lambda : \mu : \nu$ lassen sich durch verschiedene Bedingungen bestimmen, etwa dass die Fläche durch zwei Punkte ausserhalb des cubischen Kegelschnitts gehen soll, oder aber eine ihn schneidende Gerade enthalten soll, oder durch zwei Secanten der Curve geht, oder endlich durch eine Secante und einen beliebigen Punkt des Raums. Wir wollen uns nicht bei Aufstellung der hierher gehörigen Gleichungen aufhalten, sondern bilden nur wegen einer spätern Anwendung die

$$\begin{aligned} &[(\vartheta_0 + \vartheta_1) - (\vartheta_2 + \vartheta_3)] [U_1^2 - U_0 U_2] \\ &+ [\vartheta_0 \vartheta_1 (\vartheta_2 + \vartheta_3) - \vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_0 + \vartheta_1)] [U_2^2 - U_1 U_3] \\ &+ [\vartheta_0 \vartheta_1 - \vartheta_2 \vartheta_3] [U_0 U_3 - U_1 U_2] = 0 \end{aligned}$$

von dem Hyperboloid, welches die die beiden Curvenpunkte ϑ_0, ϑ_1, resp. ϑ_2, ϑ_3 verbindenden Sehnen enthält und erwähnen, dass die

$$(U_0 - k U_1) (U_2 - k U_3) - (U_2 - h U_3) (U_2 - k U_3) = 0$$

von einem Hyperboloid, welches ausser durch die Curve auch noch durch die sie im Punkt ϑ schneidende Gerade

$$U_0 - \vartheta U_1 - h (U_1 - \vartheta U_2) = 0; \quad U_1 - \vartheta U_2 - k (U_2 - \vartheta U_3) = 0$$

geht, bei einer andern Gelegenheit schon gefunden wurde. Da bekanntlich zur vollkommenen Bestimmung einer Fläche zweiten Grades 9 Punkte,

resp. gleichwerthige Bedingungen erforderlich sind, so erkennt man, dass die Forderung, es solle dieselbe durch einen gegebenen cubischen Kegelschnitt hindurchgehen, mit 6 gegebenen Punkten gleichbedeutend ist, indem die hierdurch schon nothwendig gewordene Natur der Fläche als einer geradlinigen eine Bedingung ersetzt.

Setzt man die für Punkte der Curve giltigen Werthe

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \vartheta^3 : \vartheta^2 : \vartheta : 1$$

in die Gleichungen (2) einer Erzeugenden aus der einen Schaar des durch die Gleichung (1) repräsentirten Hyperboloids, so werden dieselben

$$\vartheta\,[\nu\,\vartheta^2 - \mu\,\vartheta + l\,(\lambda\,\vartheta - \nu)] = 0;\ \nu\,\vartheta^2 - \mu\,\vartheta + l\,(\lambda\,\vartheta - \nu) = 0$$

und liefern zwei (reelle oder imaginäre) beide befriedigenden Werthe von ϑ, d. h. jede dem durch die Gleichung (2) bestimmten System angehörige Erzeugende wird von dem cubischen Kegelschnitt in zwei Punkten getroffen. Substituirt man dagegen die obigen Werthe in die Gleichungen (3), so werden letztere

$$(\nu\,\vartheta - \mu)\,(\vartheta + m) = 0;\ (\lambda\,\vartheta - \nu)\,(\vartheta + m) = 0$$

und geben nur einen gemeinsamen Werth für ϑ; d. h. jede Gerade aus der Schaar (3) wird von der Curve nur in einem Punkt getroffen. Bildet man die Bedingung

$$(\lambda\,l - \mu)^2 + 4\,\nu^2\,l = 0,$$

unter welcher der Ausdruck

$$\nu\,\vartheta^2 - \mu\,\vartheta + l\,(\lambda\,\vartheta - \nu)$$

ein vollständiges Quadrat wird, also mit Null verglichen gleiche Werthe von ϑ giebt, so erkennt man daraus, dass jene Bedingungsgleichung in Bezug auf l quadratisch ist, dass unter den Erzeugenden der Schaar (2) nur zwei Tangenten des cubischen Kegelschnitts vorkommen können. Man zieht hieraus folgende Sätze:

> Jeder auf einem einfachen Hyperboloid verzeichnete cubische Kegelschnitt begegnet allen geradlinigen Erzeugenden der Fläche, welche dem einen System angehören, in 2 Punkten, allen des andern Systems nur in einem; unter denen der ersten Schaar befinden sich zwei Tangenten der Curve.
>
> Wird durch einen cubischen Kegelschnitt und eine mit ihm einen Punkt gemein habende Gerade ein Hyperboloid gelegt, so hat jede diese Gerade schneidende Erzeugende des Hyperboloids mit der Curve 2 Punkte gemein,

deren letzterer sich unmittelbar aus der Vergleichung der oben angegebenen Gleichung der Fläche mit den Gleichungen (1), (2) und (3) ergibt.

Nimmt man an, ϑ_1 und ϑ_2 seien zwei aus der Gleichung

$$\nu\,\vartheta^2 - \mu\,\vartheta + l\,(\lambda\,\vartheta - \nu) = 0$$

sich ergebende Werthe von ϑ, so folgt aus den bekannten Relationen zwischen den Coefficienten einer Gleichung und ihren Wurzeln

$$\nu(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \mu - l\lambda; \quad \nu\vartheta_1\vartheta_2 = -l,$$

aus denen durch Elimination von l sich

$$\nu(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \lambda\nu\vartheta_1\vartheta_2 - \mu = 0$$

ergibt, eine Gleichung, die, wie im zweiten Capitel auseinandergesetzt, ausdrückt, dass die Punkte, in welchen der cubische Kegelschnitt die Geraden des Systems (2) trifft, in Involution sind. Daraus folgt:

> Legt man durch die beiden Punkte, in welchen die Geraden der einen Schaar eines Hyperboloids von einer auf demselben verzeichneten Raumcurve 3. Ordnung getroffen werden, und durch eine beliebige Sehne der letztern Ebenen, so bilden dieselben ein involutorisches Ebenenbüschel, dessen Doppelebenen durch die beiden unter den Geraden jener Schaar befindlichen Tangenten bestimmt sind,

und umgekehrt:

> Legt man durch irgend eine Sehne einer Raumcurve 3. Ordnung ein involutorisches Ebenenbüschel, so liegen die Verbindungslinien der Punkte, worin entsprechende Ebenen des Büschels von der Curve getroffen werden, auf einem einfachen Hyperboloid.

Es treffen nämlich entsprechende Ebenen des Büschels die Curve in Punkten ϑ_1 und ϑ_2, zwischen denen in Folge der vorausgesetzten Involution eine Gleichung von der Form

$$a(\vartheta_1 + \vartheta_2) + b\vartheta_1\vartheta_2 + c = 0$$

besteht; eliminirt man nun aus derselben und den Gleichungen

$$-U_1(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2 U_2 + U_0 = 0; \quad -U_2(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2 U_3 + U_1 = 0$$

der die betreffenden Punkte verbindenden Sehne die Grössen $\vartheta_1 + \vartheta_2$ und $\vartheta_1\vartheta_2$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_0 \\ U_2, & U_3, & U_1 \\ -a, & b, & c \end{vmatrix} = 0,$$

ein Resultat, welches der Form nach mit der Gleichung (1) übereinstimmt, also ein durch die Curve gehendes Hyperboloid repräsentirt.

Durch Combination des vorletzten Satzes mit der früher gefundenen Eigenschaft cubischer Kegelschnitte, dass die Verbindungslinien von den Punkten, in welchen ein solcher von den durch eine ihn in einem Punkt schneidende Gerade gelegte Ebenen getroffen wird, ein einfaches Hyperboloid erzeugen, erhält man den folgenden:

> Legt man durch eine einen Punkt mit einer Raumcurve 3. Ordnung gemein habende Gerade beliebige Ebenen, so sind die Punktpaare, in welchen dieselben die Curve nochmals treffen, in Invo-

lution, d. h. die durch dieselben und eine beliebige Sehne der Curve gelegten Ebenen bilden ein involutorisches Büschel,

aus dem sich leicht ein früher über die Schnittpunkte einer Raumcurve 3. Ordnung mit einem beliebigen Kegel gefundenes Resultat herleiten lässt und welcher das Analogon ist zu dem bekannten Satz aus der Geometrie der Kegelschnitte:

Wenn mehrere Sehnen eines Kegelschnitts durch denselben Punkt gehen, so sind die Paare von Geraden, die einen beliebigen Punkt des Kegelschnitts mit den Endpunkten jeder Sehne verbinden, in Involution.

Bilden wir die Gleichungen

$$\lambda\,[U_1^2 - U_0\,U_2] + \mu\,[U_2^2 - U_1\,U_3] + \nu\,[U_0\,U_3 - U_1\,U_2] = 0,$$
$$\lambda_1\,[U_1^2 - U_0\,U_2] + \mu_1\,[U_2^2 - U_1\,U_3] + \nu_1\,[U_0\,U_3 - U_1\,U_2] = 0$$

von zwei beliebigen durch denselben cubischen Kegelschnitt gehenden Hyperboloiden, so erkennen wir daraus, dass beide Gleichungen befriedigt werden durch

$$\nu\,U_0 - \mu\,U_1 + l\,(\lambda\,U_1 - \nu\,U_2) = 0;\quad \nu\,U_1 - \mu\,U_2 - l\,(\nu\,U_3 - \lambda\,U_2) = 0,$$

worin

$$l = \frac{\mu\,\nu_1 - \mu_1\,\nu}{\lambda\,\nu_1 - \lambda_1\,\nu}$$

zu setzen, dass zwei denselben cubischen Kegelschnitt enthaltende Hyperboloide sich nothwendigerweise ausserdem noch in einer Geraden schneiden. Die Gleichung dieser gemeinsamen Geraden wird für den angegebenen Werth von l

$$(\lambda\,\nu_1 - \lambda_1\,\nu)\,U_0 + (\lambda_1\,\mu - \mu_1\,\lambda)\,U_1 + (\mu_1\,\nu - \mu\,\nu_1)\,U_2 = 0;$$
$$(\lambda\,\nu_1 - \lambda_1\,\nu)\,U_1 + (\lambda_1\,\mu - \mu_1\,\lambda)\,U_2 + (\mu_1\,\nu - \mu\,\nu_1)\,U_3 = 0$$

und zeigt, dass dieselbe eine reelle oder ideelle Sehne der Curve ist. Aus dieser Eigenschaft erhält man durch Zuhülfenehmen früherer Sätze ohne weiteres den folgenden:

Eine Raumcurve 3. Ordnung, in welcher sich zwei eine gemeinsame Erzeugende habende Hyperboloide schneiden, trifft alle Geraden des Systems, dem jene Gerade angehört, auf beiden Hyperboloiden in zwei Punkten, alle Geraden aus dem andern System dagegen nur in einem.

Man erkennt hieraus, dass, wenn eine Raumcurve 4. Ordnung vertreten werden soll durch eine solche von der dritten Ordnung und eine Gerade, die letztere eine Sehne derselben sein muss.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung von mehr als 2 denselben cubischen Kegelschnitt enthaltenden Hyperboloiden; nehmen wir auf der Curve 6 Punkte $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta_6$ willkürlich an, so bestimmen sie darauf ein unebenes Sechseck und wollen wir durch die Curve und je zwei Gegenseiten desselben Hyperboloide legen. Folgen die

Eckpunkte des Sechsecks der Ordnung der natürlichen Zahlenreihe noch aufeinander, so sind die Gleichungen der 3 möglichen Hyperboloide folgende:

$$\text{(I)} \quad [(\vartheta_1 + \vartheta_2) - (\vartheta_4 + \vartheta_5)]\,[U_1^2 - U_0 U_2] + [\vartheta_1 \vartheta_2 (\vartheta_4 + \vartheta_5) - \vartheta_4 \vartheta_5 (\vartheta_1 + \vartheta_2)]\,[U_2^2 - U_1 U_3] + [\vartheta_1 \vartheta_2 - \vartheta_4 \vartheta_5]\,[U_0 U_3 - U_1 U_2] = 0,$$

$$\text{(II)} \quad [(\vartheta_2 + \vartheta_3) - (\vartheta_5 + \vartheta_6)]\,[U_1^2 - U_0 U_2] + [\vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_5 + \vartheta_6) - \vartheta_5 \vartheta_6 (\vartheta_2 + \vartheta_3)]\,[U_2^2 - U_1 U_3] + [\vartheta_2 \vartheta_3 - \vartheta_5 \vartheta_6]\,[U_0 U_3 - U_1 U_2] = 0,$$

$$\text{(III)} \quad [(\vartheta_3 + \vartheta_4) - (\vartheta_6 + \vartheta_1)]\,[U_1^2 - U_0 U_2] + [\vartheta_3 \vartheta_4 (\vartheta_6 + \vartheta_1) - \vartheta_6 \vartheta_1 (\vartheta_3 + \vartheta_4)]\,[U_2^2 - U_1 U_3] + [\vartheta_3 \vartheta_4 - \vartheta_6 \vartheta_1]\,[U_0 U_3 - U_1 U_2] = 0.$$

Da nun

$$(\vartheta_3 - \vartheta_6) \times \text{(I)} + (\vartheta_4 - \vartheta_1) \times \text{(II)} + (\vartheta_5 - \vartheta_2) \times \text{(III)} \equiv 0$$

ist, so folgt, dass die 3 Hyperboloide sich in derselben Geraden schneiden; ein Resultat, welches das schon früher in Aussicht genommene räumliche Analogon des Pascal'schen Satzes für den cubischen Kegelschnitt ist und das wir desshalb als Satz nochmals besonders hervorheben:

> Die drei Hyperboloide, welche durch einen cubischen Kegelschnitt und je ein Paar Gegenseiten eines demselben eingeschriebenen Sechsecks gehen, schneiden sich in einer und derselben Geraden, einer reellen oder ideellen Sehne des cubischen Kegelschnitts.

Dieselbe soll Characteristik des Sechsecks genannt werden und hat die Gleichungen

$$l\,U_0 - m\,U_1 + n\,U_2 = 0;\; l\,U_1 - m\,U_2 + n\,U_3 = 0,$$

worin

$$l = \vartheta_1 \vartheta_2 - \vartheta_2 \vartheta_3 + \vartheta_3 \vartheta_4 - \vartheta_4 \vartheta_5 + \vartheta_5 \vartheta_6 - \vartheta_6 \vartheta_1,$$

$$m = \vartheta_1 \vartheta_2 (\vartheta_4 + \vartheta_5) - \vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_5 + \vartheta_6) + \vartheta_3 \vartheta_4 (\vartheta_6 + \vartheta_1) - \vartheta_4 \vartheta_5 (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \vartheta_5 \vartheta_6 (\vartheta_2 + \vartheta_3) - \vartheta_6 \vartheta_1 (\vartheta_3 + \vartheta_4),$$

$$n = \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4 - \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4 \vartheta_5 + \vartheta_3 \vartheta_4 \vartheta_5 \vartheta_6 - \vartheta_4 \vartheta_5 \vartheta_6 \vartheta_1 + \vartheta_5 \vartheta_6 \vartheta_1 \vartheta_2 - \vartheta_6 \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3$$

zu setzen sind. Um zunächst kurz auf einige weitere Analogien zwischen dem Pascal'schen Sechseck und der eben beschriebenen Raumfigur hinzuweisen, bemerken wir, dass aus den gegebenen 6 Punkten je nach der gewählten Aufeinanderfolge 60 verschiedene Sechsecke möglich sind, deren jedes seine 3 Hyperboloide und seine Characteristik besitzt; es liegen dann auf jedem dieser Hyperboloide 4 Characteristiken, welche zu den Sechsecken gehören, die ein Paar gemeinsame Gegenseiten haben, wie z. B. die folgenden

(1 2 3 4 5 6), (1 2 6 4 5 3), (1 2 3 5 4 6), (1 2 6 5 4 3),

deren Characteristiken auf dem durch die Sehnen 1 2 und 4 5 gehenden

Hyperboloide liegen. Da nun jede Characteristik 3 Hyperboloiden gemein ist, so giebt es im Ganzen $\frac{3 \cdot 60}{4} = 45$ durch je 2 Gegenseiten der von den 6 Punkten bestimmten Sechsecke mögliche Hyperboloide. Ohne auf die Lage der Characteristiken auf den betreffenden Hyperboloiden und dergl. weiter einzugehen, benutzen wir den obigen Satz zur Vervollständigung und Erweiterung eines im dritten Capitel gefundenen auf das einem cubischen Kegelschnitt eingeschriebene unebene Siebeneck bezüglichen Theorems. Die in dem vorhergehenden Satz vorkommenden 3 Hyperboloide kann man nämlich entstanden denken durch 3 Paare von projectivischen Ebenenbüscheln mit je 2 Gegenseiten des auf der Curve gelegenen unebenen Sechsecks als Achsen, deren projectivische Beziehung in der Weise hergestellt wird, dass die entsprechenden Ebenen eines jeden Paars durch einen die Curve 3. Ordnung durchlaufenden Punkt (7) hindurchgehen. Hierdurch entsteht dann für jede Lage dieses letztern in Bezug auf die sechs erstern Punkte die im dritten Capitel als Analogon des Pascal'schen Sechsecks für ein auf einer Curve 3. Ordnung gelegenes Siebeneck beschriebene Raumfigur, deren Eigenschaften der ebendaselbst in mehrfachem Ausdruck gegebene Satz ausspricht und den wir jetzt dahin erweitern, dass für jede beliebige Lage des Punkts (7) auf der Curve die darin vorkommende Ebene, in welcher die Schnittlinien der Ebenen 7 1 2, 7 4 5; 7 2 3, 7 5 6; 7 3 4, 7 6 1 liegen, durch die bestimmte Gerade, welche wir als die Characteristik des Sechsecks bezeichnet haben, hindurchgeht; also:

> Legt man durch die Seiten eines auf einem cubischen Kegelschnitt gelegenen unebenen Sechsecks und einen beliebigen siebenten Punkt der Curve Ebenen, so treffen letztere die Gegenseiten des Sechsecks in Punkten, die auf einer Ebene liegen, welche immer durch den siebenten Punkt und eine bestimmte Gerade (Characteristik des Sechsecks), die eine reelle oder ideelle Sehne der Curve ist, hindurchgeht, wo auch dieser Punkt auf der Curve liegen mag.

Wir beschäftigen uns, ehe wir zur Betrachtung einiger anderen cubische Kegelschnitte enthaltenden Flächen übergehn, noch zunächst mit der Frage, ob unter den durch eine Raumcurve 3. Ordnung möglichen Flächen zweiten Grades auch Rotationsflächen vorkommen. Die Bedingungen, dass die allgemeine Gleichung einer Fläche 2. Ordnung

$$a_{00} x^2 + 2 a_{01} x y + 2 a_{02} x z + a_{11} y^2 + 2 a_{12} y z + a_{22} z^2 \\ + 2 a_{03} x + 2 a_{13} y + 2 a_{23} z + a_{33} = 0$$

eine Rotationsfläche repräsentirt, sind bekanntlich:

$$a_{00} - \frac{a_{01} a_{02}}{a_{12}} = a_{11} - \frac{a_{01} a_{12}}{a_{02}} = a_{22} - \frac{a_{02} a_{12}}{a_{01}},$$

also im Ganzen zwei und können daher für die Gleichung

$$\lambda\,[U_1^2 - U_0\,U_2] + \mu\,[U_2^2 - U_1\,U_3] + \nu\,[U_0\,U_3 - U_1\,U_2] = 0$$

eines durch die Raumcurve 3. Ordnung

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$$

gelegten Hyperboloids, weil dieselbe zwei willkürliche Constanten $\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\nu}{\lambda}$ mit sich führt, befriedigt werden. Auf die wirkliche Bildung dieser beiden Bedingungen aus den Coefficienten der vorstehenden Gleichung des Hyperboloids, nachdem dieselbe nach Potenzen von x, y, z geordnet worden, sowie die Bestimmung der Werthe von $\frac{\mu}{\lambda}$ und $\frac{\nu}{\lambda}$ einzugehen, wäre zu weitläufig und müssen wir desshalb die Bestimmung der Anzahl und Lage der durch die einzelnen Arten von cubischen Kegelschnitten möglichen Rotationshyperboloide von einem andern Gesichtspunkt aus aufnehmen. Bemerkt zu werden verdient, dass die in der eben angedeuteten Weise hergestellten zwei Bedingungsgleichungen in Folge der eigenthümlichen Zusammensetzung der Grössen a_{00}, a_{01} .... aus den Coefficienten a_0, b_0 .... a_1, b_1 .... der linearen Ausdrücke U_0, U_1, U_2, U_3 sich in Bezug auf $\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\nu}{\lambda}$ bis zum zweiten Grad reduciren und dass daher die Aufgabe im Allgemeinen vier Lösungen zulässt, die, wie wir sogleich sehen werden, für die cubische Hyperbel sämmtlich reell sind, während sie für die drei übrigen Species theilweise zusammenfallen, theilweise imaginär werden.

Eine Rotationsfläche 2. Ordnung hat mit einer Kugel eine doppelte Berührung in unendlicher Entfernung, d. h. ihre Schnittcurve mit der unendlich entfernten Ebene hat einen doppelten Contact mit dem in derselben Ebene gelegenen Kugelkreis. Da nun alle durch einen cubischen Kegelschnitt gehenden Flächen 2. Ordnung die unendlich entfernte Ebene in Kegelschnitten, welche durch die 3 unendlich entfernten Curvenpunkte gehen, schneiden, so hat man aus ihnen nur die zu bestimmen, welche zugleich mit dem in jener Ebene gelegenen imaginären Kreis einen doppelten Contact haben, was sofort geschehen kann, wenn man die Lösung der allgemeinen Aufgabe kennt, wie viel Kegelschnitte sich construiren lassen durch 3 gegebene Punkte, die einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren und wenn man weiss, wie die betreffenden Berührungssehnen liegen.

Zu dem Ende überlegen wir Folgendes: das System der durch 4 Basispunkte gehenden Kegelschnitte bestimmt auf jeder Transversalen eine involutorische Punktreihe und gilt dasselbe auch für ein System von einander in denselben zwei Punkten doppelt berührenden Kegelschnitten, was aus dem Vorigen hervorgeht, wenn je 2 der 4 Basispunkte *zusammenfallen*; es wird bei dem letztern einer der Doppelpunkte der

Involution auf der Berührungssehne liegen, weil dieselbe als doppelte Gerade auch unter die Kegelschnitte des Systems zu rechnen ist. Hieraus folgt dann umgekehrt, wenn durch zwei Punkte, s und s_1, ein Kegelschnitt gelegt werden soll, der einen gegebenen andern Kegelschnitt C doppelt berührt, dass die Berührungssehne jedenfalls durch den einen oder den andern von den Doppelpunkten a und a_1 der durch die Punkte $s\ s_1$, $l\ l_1$ bestimmten Involution geht, wobei l und l_1 die Schnittpunkte der Geraden $s\ s_1$ mit dem Kegelschnitt C bedeuten. Diese Doppelpunkte und daher auch die betreffenden Berührungssehnen sind reell, so lange von den die Involution bestimmenden Punktpaaren s, s_1 und l, l_1, das eine das andere ein-, resp. ausschliesst, d. h. also die Punkte s und s_1 innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts C liegen. Soll der doppelt berührende Kegelschnitt auch noch einen dritten Punkt s_2 enthalten, so gilt für die Doppelpunkte b und b_1 der Involution s, s_2, m, m_2 (wo m und m_2 die Schnittpunkte der Geraden $s\ s_2$ mit dem Kegelschnitt C bedeuten) ganz dasselbe und ist die Berührungssehne daher eine von den Geraden $a\ b$, $a\ b_1$, $a_1\ b$, $a_1\ b_1$, wobei man ohne weiteres erkennt, dass, wenn $a\ b$ und $a_1\ b_1$ sich in c, $a\ b_1$ und $a_1\ b$ sich in c_1 schneiden, c und c_1 die Doppelpunkte der auf der Geraden $s_1\ s_2$ durch ihre Schnittpunkte n und n_1 mit dem Kegelschnitt C und die Punkte s_1 und s_2 selbst bestimmten Involution sind. Hieraus folgt dann, wenn ein Kegelschnitt durch 3 Punkte s, s_1, s_2 beschrieben werden soll, der einen gegebenen Kegelschnitt C doppelt berührt, dass vier der Aufgabe genügende existiren, sowie dass die Berührungssehnen ein vollständiges Vierseit bilden, worin die Geraden $s\ s_1$, $s\ s_2$, $s_1\ s_2$ Diagonalen sind.

Bevor wir dieses Resultat für unsern Fall verwerthen, müssen wir einige specielle Voraussetzungen berücksichtigen, welche in Betreff der Punkte s, s_1, s_2 möglich sind. Sind zunächst dieselben alle 3 reell und liegen sämmtlich innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts C, was immer der Fall ist, wenn dieser imaginär ist, so sind alle 4 Berührungssehnen reell und hat demnach die Aufgabe 4 Lösungen. Werden zwei von den Punkten, etwa s_1 und s_2, imaginär, so werden die Doppelpunkte a, a_1, b, b_1 gleichfalls imaginär und daher auch die sie mit den reellen Punkten c und c_1 verbindenden Geraden, und es bleiben als reelle Berührungssehnen nur $a\ b_1$ und $a_1\ b$, so dass also nur 2 Lösungen der Aufgabe existiren. Lässt man weiter die Punkte s_1 und s_2 einander unendlich nahe rücken, so heisst dies, der gesuchte Kegelschnitt muss ausser dem doppelten Contact mit C auch noch die in eine bestimmte Gerade S übergehende Verbindungslinie von s_1 und s_2 im Punkt s_1 berühren und noch durch s gehen; es wird dann die auf der Geraden $s_1\ s_2$ hervorgebrachte Involution in eine einfache harmonische Theilung übergehen und die Berührungssehne durch den Punkt c, der

zu s_1 in Bezug auf n und n_1 harmonisch conjugirt ist, hindurchgehen und ausserdem durch die beiden Doppelpunkte a und a_1 der auf $s\, s_1$ bestimmten Involution; man hat daher 2 Berührungssehnen, $c\, a$ und $c\, a_1$, und mithin 2 Lösungen des Problems. Lässt man endlich alle drei Punkte einander unendlich benachbart werden, so schneiden sich ihre Verbindungslinien in dem mit ihnen zusammenfallenden Punkt; die auf ihnen bestimmten Involutionen gehen, wie vorher für die Gerade S, in harmonische Theilungen über und fallen daher die sämmtlichen Berührungssehnen in eine zusammen, welche die harmonische Polare des Punkts s in Bezug auf den Kegelschnitt ist.

Wir hatten nun die cubischen Kegelschnitte nach der Natur ihrer unendlich entfernten Punkte in derselben Weise classificirt, wie eben die verschiedenen Voraussetzungen in Betreff der Punkte s, s_1, s_2 durchgenommen wurden und liefert daher die Anwendung der eben gefundenen Resultate auf die durch die verschiedenen Arten von cubischen Kegelschnitten möglichen Rotationshyperboloide ohne weiteres folgendes Ergebniss:

> Durch die cubische Hyperbel, welche drei getrennte reelle unendlich entfernte Punkte besitzt, gehen vier reelle Rotationshyperboloide. Für die cubische Ellipse mit einem reellen und zwei imaginären Punkten im Unendlichen sind nur 2 reelle möglich. Bei der cubischen hyperbolischen Parabel, wobei 2 von den unendlich entfernten Punkten zusammenfallen, existiren gleichfalls nur 2 und endlich für die cubische Parabel nur ein einziges.

Da durch die Berührungssehnen der unendlich entfernten Curven dieser Flächen mit dem imaginären Kreis der unendlich entfernten Ebene die Lage ihrer Kreisschnitte bedingt wird, so kann man mit Berücksichtigung des obigen Resultats, dass dieselben ein vollständiges Vierseit bilden, worin die Geraden $s\, s_1$, $s\, s_2$, $s_1\, s_2$ Diagonalen sind, die Richtungen der Kreisschnittebenen für die cubische Hyperbel auf folgende Weise construiren. Man zieht durch einen beliebigen Punkt des Raumes Parallele zu den Asymptoten der Curve und halbirt die sämmtlichen von ihnen gebildeten Winkel; die sechs Halbirungslinien liegen dann zu je dreien in vier Ebenen, welche den Kreisschnittebenen jener Hyperboloide parallel sind.

Auf die Modificationen dieser Construction für die andern Arten der Raumcurven 3. Ordnung wollen wir nicht eingehen, sondern noch bei Betrachtung einer Fläche verweilen, zu deren Entstehung der früher schon gefundene und vorher benutzte Satz, dass die Verbindungslinien der Punkte, in welchen entsprechende Ebenen eines durch eine Sehne der Curve 3. Ordnung gelegten involutorischen Büschels derselben begegnen, ein einfaches Hyperboloid erzeugen, Veranlassung gibt, nämlich der Fläche, welche entsteht, wenn die Involution jenes Büschels auf-

gehoben wird, also zwei collineare an seine Stelle treten. Wir wählen als Achse derselben die Gerade $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, sodass also die Gleichungen entsprechender Ebenen in beiden sind

$$U_1 - \omega U_2 = 0$$

und

$$U_1 - \frac{a + b\omega}{c + d\omega} U_2 = 0,$$

wo a, b, c, d Constante bedeuten und die Schnittpunkte entsprechender Ebenen mit der Curve die Parameter ω und $\frac{a + b\omega}{c + d\omega}$ haben. Die Verbindungslinie derselben wird dargestellt durch

$$(c + d\omega) U_0 - [a + (b + c)\omega + d\omega^2] U_1 + (a + b\omega)\omega U_2 = 0,$$
$$(c + d\omega) U_1 - [a + (b + c)\omega + d\omega^2] U_2 + (a + b\omega)\omega U_3 = 0,$$

aus welchen Gleichungen durch Elimination von ω folgt:

$$\begin{vmatrix} bU_2 - dU_1, & 0, & bU_3 - dU_2, & 0 \\ aU_2 - (b+c)U_1 + dU_0, & bU_2 - dU_1, & aU_3 - (b+c)U_2 + dU_1, & bU_3 - dU_2 \\ cU_0 - aU_1, & aU_2 - (b+c)U_1 + dU_0, & cU_1 - aU_2, & aU_3 - (b+c)U_2 + dU_1 \\ 0, & cU_0 - aU_1, & 0, & cU_1 - aU_2 \end{vmatrix} = 0,$$

welches in Bezug auf U_0, U_1, U_2, U_3 biquadratische Resultat beweist, dass die erzeugte Fläche vom 4. Grad ist. Aus der einfachen Ueberlegung, dass auf der Curve durch die beiden Büschel zwei collineare Punktreihen entstehen, ergibt sich, dass durch jeden ihrer Punkte zwei Erzeugende hindurchgehen und sie demnach eine Strictionslinie der Fläche ist.

Achtes Capitel.

In Betreff der durch drei Curven im Raum, worunter ein oder mehrere cubische Kegelschnitte, veranlassten Regelfläche beschränken wir uns darauf, ihren Grad nach der allgemeinen für 3 Leitlinien von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 giltigen Formel[1])

$$g = R(m_1, m_2, m_3) = 2 m_1 m_2 m_3$$

anzugeben. Man hat dann für

$m_1 = 3$	3	3	3	3	3
$m_2 = 3$	3	2	3	2	1
$m_3 = 3$	2	2	1	1	1
$g = 54$	36	24	18	12	6

1) Vergl. Salmon, anal. Geom. des Raumes. Deutsch von W. Fiedler. II. Bd. p. 295. Für die andern Formeln ibid. p. 531 ff.

und reducirt sich derselbe, wenn die Curven gemeinsame Punkte haben, um $m_1 \alpha + m_2 \beta + m_3 \gamma$, wo α die Zahl der m_2 und m_3, β die der m_1 und m_3, γ die der m_1 und m_2 gemeinsamen Punkte bedeutet. Ebenso geben wir den Grad der Regelfläche, wobei eine der beiden Leitcurven fortwährend in 2 Punkten getroffen wird, nach der Formel

$$g = R\,(m_1^2, m_2) = m_2 \left\{ m_1\,(m_1 - 1) - \frac{\nu_1}{2} \right\}$$

worin ν_1 den Rang der Curve m_1, d. h. die Anzahl der von Punkten einer Geraden aus an sie möglichen Tangenten bezeichnet und wie wir früher gesehen, für den cubischen Kegelschnitt $= 4$ ist; man hat dann

$m_1 = 3$	3	3
$m_2 = 3$	2	1
$g = 12$	8	4.

Liegen zwei cubische Kegelschnitte beliebig im Raum, so kann nach der Anzahl der denselben gemeinsamen Sehnen gefragt werden, die mit den in der Fläche $R\,(3^2, 3)$ gelegenen doppelten Erzeugenden identisch sind, und wofür sich daher aus der allgemeinen Formel

$$D g\,(m_1^2, m_2) = m_2\,(m_2 - 2) \left\{ m_1\,(m_1 - 1) - \frac{3\nu_1}{2} \right\}$$
$$+ m_2\,(m_1 - 1) \left\{ \frac{1}{2}\, m_1\,(m_1 - 1) - \frac{\nu_1}{4} \right\} - \frac{\nu_2}{2} \left\{ \frac{1}{2}\, m_1\,(m_1 - 1) - \frac{\nu_1}{2} \right\}$$

zehn ergeben. Dasselbe Resultat lässt sich auch leicht herleiten, wenn man die eine Raumcurve 3. Ordnung durch das System eines ebenen Kegelschnitts, und einer denselben in einem Punkte schneidenden, aber nicht in seiner Ebene gelegenen Geraden ersetzt. Man erhält dann sofort als gemeinsame Sehnen die drei Geraden, welche die Punkte verbinden, worin die Ebene des Kegelschnitts der Raumcurve 3. Ordnung begegnet und findet die 7 übrigen durch folgende Betrachtung. Wie am Schluss dieses Capitels bewiesen werden wird, bilden die durch eine gegebene Gerade möglichen Sehnen eines cubischen Kegelschnitts eine Regelfläche vierten Grades, welche im vorliegenden Fall 8 Punkte mit dem Kegelschnitt gemein hat, worunter auch der Punkt vorkommt, in welchem die Gerade den Kegelschnitt trifft, während durch die sieben übrigen Gerade möglich sind, die dem cubischen Kegelschnitt in zwei Punkten begegnen, und sowohl mit dem ebenen Kegelschnitt, als der Geraden je einen Punkt gemein haben. Als besondere Fälle sind noch zu merken: wenn die Curven 3. Ordnung einen Punkt miteinander gemein haben, so gehen durch denselben 4 gemeinsame Sehnen; haben sie zwei gemeinsame Punkte, so ist die Verbindungslinie derselben eine gemeinsame Sehne und gehen ausser derselben noch 3 durch jeden der beiden Punkte. Für drei gemein-

same Punkte hat man unter den gemeinsamen Sehnen die 3 Verbindungslinien derselben, und ausserdem noch 2 durch jeden der Punkte gehende. Wenn endlich 4 gemeinsame Punkte vorhanden sind, so sind die sechs Verbindungslinien derselben gemeinsame Sehnen und geht ausser ihnen durch jeden Punkt noch eine. Es gibt daher, je nachdem die Curven 1, 2, 3, 4 Punkte mit einander gemein haben, 6, 3, 1, 0 Sehnen für beide, die nicht durch jene Punkte gehen. Kommt ausser den genannten 10 gemeinsamen Sehnen zweier sich in vier Punkten schneidender Raumcurven 3. Ordnung noch eine weitere vor, so gibt es deren unendlich viele und liegen die Curven auf einem einfachen Hyperboloid, das eben von diesen Sehnen erzeugt wird, wie aus der folgenden Untersuchung von auf demselben Hyperboloid gelegenen Raumcurven 3. Ordnung zu entnehmen, indem 2 solche Curven sowohl 4, als auch 5 Schnittpunkte haben können.

Um die Gleichungen aller auf dem Hyperboloid

$$U_0 U_3 - U_1 U_2 = 0$$

gelegenen Raumcurven 3. Ordnung in derselben einfachen Form zu erhalten, wie die immer benutzte

$$(1) \quad U_0 U_2 - U_1^2 = 0; \; U_1 U_3 - U_2^2 = 0,$$

welche wir gewöhnlich durch

$$(1^*) \quad U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$$

ersetzt hatten, transformiren wir durch lineare Substitutionen die Gleichung des Hyperboloids in eine andere

$$V_0 V_3 - V_1 V_2 = 0$$

von derselben Form, wobei dasselbe nur auf ein anderes Coordinatensystem bezogen wird. Es dienen hierzu die folgenden Transformationsformeln [1])

$$\frac{U_0}{a} = \lambda' \mu' V_0 + \mu' V_1 + \lambda' V_2 + V_3,$$

$$\frac{U_1}{b} = \lambda \mu' V_0 + \mu' V_1 + \lambda V_2 + V_3,$$

$$\frac{U_2}{c} = \lambda' \mu V_0 + \mu V_1 + \lambda' V_2 + V_3,$$

$$\frac{U_3}{d} = \lambda \mu V_0 + \mu V_1 + \lambda V_2 + V_3,$$

welche durch Auflösung liefern:

1) Vergl. Brioschi, sulle forme quadratiche. Annali di scienze math. e phys. comp. da B. Tortolini. A. 1854 [giugno].

$$\frac{V_0}{d} = U_0 - \lambda\, U_1 - \mu\, U_2 + \lambda\,\mu\, U_3,$$
$$-\frac{V_1}{c} = U_0 - \lambda'\, U_1 - \mu\, U_2 + \lambda'\,\mu\, U_3,$$
$$-\frac{V_2}{b} = U_0 - \lambda\, U_1 - \mu'\, U_2 + \lambda\,\mu'\, U_3,$$
$$\frac{V_3}{a} = U_0 - \lambda'\, U_1 - \mu'\, U_2 + \lambda'\mu'\, U_3,$$

und wo die darin vorkommenden Grössen $a, b, c, d, \lambda, \lambda', \mu, \mu'$ nur durch die beiden Bedingungen:

$$a\,d = b\,c = \frac{1}{(\lambda - \lambda')\;(\mu - \mu')}$$

beschränkt sind, sodass also die Zahl der in ihnen vorkommenden unabhängigen Constanten sich auf 6 reducirt. Wir erhalten durch diese Transformation auf dem Hyperboloid

$$U_0\, U_3 - U_1\, U_2 \equiv V_0\, V_3 - V_1\, V_2 = 0$$

ausser der angegebenen Curve (1) noch zwei andere mit den resp. Gleichungen

$$(2)\quad V_0\, V_2 - V_1^2 = 0;\; V_1\, V_3 - V_2^2 = 0,$$

und

$$(3)\quad V_0\, V_1 - V_2^2 = 0;\; V_2\, V_3 - V_1^2 = 0.$$

Die Anzahl der den Curven (1) und (2), sowie (1) und (3) gemeinsamen Punkte bestimmen wir nun folgendermassen; durch Einsetzen der Werthe (1*) in die Gleichungen (2) nehmen dieselben die Form

$$b\,d\,(\omega^2 - \mu)\;(\omega^2 - \mu')\,(\omega - \lambda)^2 - c^2\,(\omega^2 - \mu)^2\,(\omega - \lambda')^2 = 0,$$
$$a\,c\,(\omega^2 - \mu)\,(\omega^2 - \mu')\,(\omega - \lambda')^2 - b^2\,(\omega^2 - \mu')\;(\omega - \lambda)^2 = 0,$$

oder wenn $h = \frac{b\,d}{c^2} = \frac{b^2}{a\,c}$ gesetzt wird

$$(\omega^2 - \mu)\,[h\,(\omega^2 - \mu')\,(\omega - \lambda)^2 - (\omega^2 - \mu)\,(\omega - \lambda')^2] = 0,$$
$$(\omega^2 - \mu')\,[h\,(\omega^2 - \mu')\,(\omega - \lambda)^2 - (\omega^2 - \mu)\,(\omega - \lambda')^2] = 0$$

an und werden befriedigt durch die als Wurzeln der Gleichung

$$(\otimes)\quad h\,(\omega^2 - \mu')\;(\omega - \lambda)^2 - (\omega^2 - \mu)\,(\omega - \lambda')^2 = 0$$

sich ergebenden 4 Werthe von ω. Es erhellt hieraus, dass die Curven (1) und (2) im allgemeinen 4 (reelle oder imaginäre) Punkte mit einander gemein haben. Verfahren wir ebenso in Betreff der Gleichungen (3), so finden wir, wenn $k = \frac{c\,a}{b^2} = \frac{c^2}{a\,b}$ gesetzt wird, dafür

$$(\omega - \lambda)\,[k\,(\omega^2 - \mu)^2\,(\omega - \lambda') + (\omega^2 - \mu')^2\,(\omega - \lambda)] = 0,$$
$$(\omega - \lambda')\,[k\,(\omega^2 - \mu)^2\,(\omega - \lambda') + (\omega^2 - \mu')^2\,(\omega - \lambda)] = 0,$$

welche Gleichungen befriedigt werden durch die 5 Wurzeln von

$$k\,(\omega^2 - \mu)^2\,(\omega - \lambda') + (\omega^2 - \mu^1)^2\,(\omega - \lambda) = 0,$$

so dass also die Curven (1) und (3) sich in 5 Punkten schneiden. Es fragt sich nun, worin dies verschiedene Verhalten der Curven (2) und (3) gegen (1) seinen Grund hat, und müssen wir desshalb auf die Beziehung derselben zu den Erzeugenden des Hyperboloids zurückgehen. Diese Erzeugenden werden dargestellt für das eine System durch:

$$\lbrack U_0 - \nu\, U_1 = 0;\; U_2 - \nu\, U_3 = 0$$

und für das andere durch

$$\lbrack U_0 - \varrho\, U_2 = 0;\; U_1 - \varrho\, U_3 = 0\rbrack,$$

sodass, wie aus den Substitutionsformeln zu erkennen, die Ebenen $V_0 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ gehen durch die resp. Geraden

$$\left\{\begin{matrix} U_0 - \lambda\, U_1 = 0 \\ U_2 - \lambda\, U_3 = 0 \end{matrix}\right\};\; \left\{\begin{matrix} U_0 - \lambda'\, U_1 = 0 \\ U_2 - \lambda'\, U_3 = 0 \end{matrix}\right\};\; \left\{\begin{matrix} U_0 - \lambda\, U_1 = 0 \\ U_2 - \lambda\, U_3 = 0 \end{matrix}\right\};\; \left\{\begin{matrix} U_0 - \lambda'\, U_1 = 0 \\ U_2 - \lambda'\, U_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

des ersten Systems und

$$\left\{\begin{matrix} U_0 - \mu U_2 = 0 \\ U_1 - \mu U_3 = 0 \end{matrix}\right\};\; \left\{\begin{matrix} U_0 - \mu U_2 = 0 \\ U_1 - \mu U_3 = 0 \end{matrix}\right\};\; \left\{\begin{matrix} U_0 - \mu' U_2 = 0 \\ U_1 - \mu' U_3 = 0 \end{matrix}\right\};\; \left\{\begin{matrix} U_0 - \mu' U_2 = 0 \\ U_1 - \mu' U_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

des zweiten, und folglich die beiden Systeme von Erzeugenden auch dargestellt werden können beziehungsweise durch

$$\lbrack V_0 - \xi\, V_1 = 0;\; V_2 - \xi\, V_3 = 0\rbrack$$

und

$$\lbrack V_0 - \zeta\, V_2 = 0;\; V_1 - \zeta\, V_3 = 0\rbrack.$$

Hieraus folgt dann mit Berücksichtigung der im vorigen Capitel bewiesenen Sätze, dass die Curven (1) und (2) jeder Geraden des ersten Systems in einem, jeder des zweiten in zwei Punkten begegnen, während dagegen die Curve (3) mit jeder Geraden des ersten Systems zwei und mit jeder des zweiten einen Punkt gemein hat. Dies gibt folgenden Satz:

> Zwei auf einem Hyperboloid gelegene cubische Kegelschnitte schneiden sich in 4 Punkten, wenn jeder von ihnen mit einer Erzeugenden des Hyperboloids zwei Punkte gemein hat; sie schneiden sich in fünf Punkten, wenn diese Erzeugende von der einen Curve in 2, von der andern aber nur in einem Punkte getroffen wird.

Es gilt auch der umgekehrte Satz:

> Haben zwei cubische Kegelschnitte 5 Punkte mit einander gemein, so liegen sie auf demselben Hyperboloid,

denn die allgemeine Gleichung eines durch den ersteren von ihnen gehenden Hyperboloids enthält zwei unbestimmte Constanten, welche so gewählt werden können, dass dasselbe durch zwei Punkte der zweiten Curve geht, welche dann auch auf der Fläche liegt, weil sie 7 Punkte

mit ihr gemein hat. Man erkennt sofort mit Rücksicht auf das oben angegebene Verhalten der sich in 4, resp. 5 Punkten schneidenden, auf einem Hyperboloid gelegenen Raumcurven 3. Ordnung die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

Drei Hyperboloide, welche eine gemeinsame Erzeugende haben, schneiden sich in 4 Punkten

und

Durch 5 Punkte eines Hyperboloids können zwei Raumcurven 3. Ordnung gelegt werden, welche ganz in der Fläche desselben liegen.

Untersuchen wir nun ein Büschel von cubischen Kegelschnitten, welche durch dieselben 4 Punkte gehen, auf dem Hyperboloid, wofür sich ähnliche Eigenschaften vermuthen lassen, wie für Curvenbüschel in der Ebene, so wird ein solches dargestellt durch die Gleichungen (2), wenn man die Festsetzung trifft, dass die Grössen a, b, c, d, λ, μ, λ', μ' immer so gewählt sind, dass die Wurzeln der Gleichung (⊗) unverändert bleiben. Zu grösserer Vereinfachung wollen wir die Voraussetzung machen, dass unter den gemeinsamen Punkten die mit den Parametern 0 und ∞ vorkommen, wodurch sich in Betracht der Gleichung (⊗) ergibt:

$$h + 1 = 0;\ \mu \lambda'^2 = \mu' \lambda^2,$$

welche letztere Bedingung wir ersetzen wollen durch

$$\mu = q \lambda^2;\ \mu' = q \lambda'^2,$$

wo q eine beliebige Constante bedeutet. Es geht dann die Gleichung (⊗) selbst über in

$$2 \omega^2 - \omega (1 + q) (\lambda + \lambda') + 2 q \lambda \lambda' = 0$$

und müssen, wenn ihre Wurzeln unverändert bleiben sollen, gleichviel welche Werthe λ, λ' und q haben, zwischen diesen die Relationen

$$(1 + q) (\lambda + \lambda') = 2 a;\ q \lambda \lambda' = b$$

erfüllt sein, wo a und b bestimmte constante Werthe bedeuten und wodurch sämmtliche in der Gleichung (2) der Curve vorkommenden Constanten als Functionen von q bestimmt werden, so dass durch Variation von q successive alle Curven des Büschels erhalten werden. Die Schnittpunkte der Curven des Büschels mit den Geraden der einen oder der andern Erzeugung des Hyperboloids lassen sich bestimmen, indem man die oben für dieselben gegebenen Gleichungen

$$U_0 - \nu U_1 = 0;\ U_2 - \nu U_3 = 0,$$
$$U_0 - \varrho U_2 = 0;\ U_2 - \varrho U_3 = 0$$

ersetzt durch

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \nu \varrho : \varrho : \nu : 1$$

und diese letzteren Werthe in eine der Gleichungen (2) einsetzt, wodurch dieselbe in

$$(\varrho - \mu')(\nu - \lambda)^2 - (\varrho - \mu)(\nu - \lambda')^2 = 0$$

oder

$$a q \nu^2 - (\varrho + b)(1 + q)\nu + a\varrho = 0$$

übergeht, welche Gleichung nach ν aufgelöst die auf einer Geraden der zweiten Erzeugung gelegenen Punkte des Curvenbüschels, nach ϱ aufgelöst die auf einer der ersten gelegenen liefert. Sind ν_0 und ν_1 die sich für ν ergebenden Werthe, so ist

$$\nu_0 + \nu_1 = \frac{(\varrho + b)(1 + q)}{a q}, \quad \nu_0 \nu_1 = \frac{\varrho}{q},$$

woraus sich durch Elimination von q, wenn die Grössen M und N bestimmt werden durch

$$\varrho + b = M\varrho = N,$$

ergibt

$$a(\nu_0 + \nu_1) - M\nu_0\nu_1 - N = 0,$$

d. h. die Punkte, worin die Curven des Büschels einer Geraden der zweiten Erzeugung begegnen, sind in Involution. Durch Auflösung der obigen Gleichung nach ϱ erhält man

$$\varrho = \frac{b\nu + q\nu(b - a\nu)}{a - \nu(1 + q)}$$

als Parameter des Punkts, in welchem eine Gerade der ersten Erzeugung von der zu dem Werth q gehörigen Curve des Büschels getroffen wird. Legt man nun durch eine beliebige Gerade $U_1 = U_2 = 0$ und durch die 4 Punkte, worin 4 zu den Werthen $q = q_1, q_2, q_3, q_4$ gehörige Curven eine Gerade der ersten Erzeugung schneiden, Ebenen, so sind die Gleichungen derselben

$$U_1(a - \nu) - bU_2 - q_\nu[\nu U_1 + (b - a\nu)U_2] = 0, \quad [q_\nu = q_1, q_2, q_3, q_4]$$

und ist also das anharmonische Verhältniss dieser Ebenen von ν unabhängig, d. h. alle Geraden der ersten Erzeugung werden von den Curven des Büschels nach gleichem anharmonischen Verhältniss geschnitten.

Dieselbe Eigenschaft besteht, wie wir sogleich beweisen werden, auch für einen auf einem Kegel zweiten Grades gelegenen Büschel von Curven 3. Ordnung mit 5 gemeinsamen Punkten in Bezug auf die Strahlen des Kegels. Um zur Gleichung der Curven des Büschels zu gelangen, denken wir 6 Punkte im Raum, und zwar vier von ihnen bestimmt als Eckpunkte eines Tetraeders mit den Seitenflächen

$$V_0 = 0, \; V_1 = 0, \; V_2 = 0, \; V_3 = 0,$$

die beiden übrigen durch die Gleichungen

$$V_0 = V_1 = V_2 = V_3$$

und

$$\frac{V_0}{\alpha} = \frac{V_1}{\beta} = \frac{V_2}{\gamma} = \frac{V_3}{\delta},$$

wobei dann die Gleichungen von zwei durch die sämmtlichen 6 Punkte gehenden Kegel 2. Ordnung, deren einer seine Spitze im Punkt $V_0 = V_1 = V_2 = 0$ hat, während die des andern der Punkt $V_1 = V_2 = V_3 = 0$ ist, sind

$$\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{V_0} + \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{V_1} + \frac{\gamma(\alpha-\beta)}{V_2} = 0$$

und

$$\frac{\delta(\beta-\gamma)}{V_3} + \frac{\beta(\gamma-\delta)}{V_1} + \frac{\gamma(\delta-\beta)}{V_2} = 0. \text{ [1]}$$

Diese Kegel haben ausser dem Verbindungsstrahl ihrer Scheitel eine gleichfalls durch die 6 gegebenen Punkte gehende Raumcurve 3. Ordnung gemein. Lässt man nun den Parameter δ, der nur in der Gleichung des zweiten Kegels und seiner Spitze vorkommt, variiren, so entsteht dadurch auf dem ersten Kegel ein Büschel von cubischen Kegelschnitten, welche durch 5 feste Punkte auf demselben gehen. Eine Seite des ersten Kegels können wir darstellen durch

(a) $V_1 - \lambda V_2 = 0;\ \lambda\alpha(\beta-\gamma)V_2 + [\beta\gamma-\alpha) + \lambda\gamma(\alpha-\beta)]\ V_0 = 0$

und erhalten den Punkt, in welchem dieselbe einem von den Kegelschnitten des Büschels begegnet, indem wir die in der Ebene $V_1 - \lambda V_2 = 0$ gelegene Seite des zweiten Kegels bestimmen; es hat dieselbe die Gleichung

(b) $V_1 - \lambda V_2 = 0;\ \lambda\delta(\beta-\gamma)V_2 + [\beta(\gamma-\delta) + \lambda\gamma(\delta-\beta)]\ V_3 = 0,$

sodass also der betreffende Punkt als Schnitt der 3 in den eben aufgestellten Gleichungen (a) und (b) repräsentirten Ebenen gegeben ist.

---

1) Für die Substitutionen

$$U_1 = \gamma(\beta-\delta)V_1 + \beta(\delta-\gamma)V_2;\quad U_2 = \gamma(\beta-\alpha)V_1 + \beta(\alpha-\gamma)V_2;$$

$$\frac{U_0}{\alpha(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)} = \gamma\beta(\alpha-\delta)^2(\gamma-\beta)V_0 + \alpha\gamma(\beta-\delta)^2(\alpha-\gamma)V_1 + \beta\alpha(\gamma-\delta)^2(\beta-\alpha)V_2;$$

$$\frac{U_3}{\delta(\beta-\delta)(\delta-\gamma)} = \gamma\beta(\delta-\alpha)^2(\gamma-\beta)V_3 + \delta\gamma(\beta-\alpha)^2(\delta-\gamma)V_1 + \beta\delta(\gamma-\alpha)^2(\beta-\delta)V_2$$

werden die Gleichungen der beiden Kegel

$$U_0 U_2 - U_1^2 = 0;\ U_1 U_3 - U_2^2 = 0,$$

sodass also leicht die einer Kegelseite aus den Ausdrücken V_0, V_1, V_2, V_3 hergestellt werden kann, und die der jenen Kegeln gemeinsamen Raumcurve 3. Ordnung

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1.$$

Legen wir nun der Grösse δ verschiedene Werthe bei, etwa $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, so erhalten wir auf die angegebene Weise 4 Punkte, worin die Erzeugende (a) des ersten Kegels von auf ihm gelegenen und sich in denselben 5 Punkten schneidenden Raumcurven 3. Ordnung getroffen wird. Um das anharmonische Verhältniss dieser Schnittpunkte zu bestimmen, legen wir durch dieselben und eine beliebige Gerade, etwa $V_2 = V_3 = 0$ Ebenen und erhalten als Gleichungen derselben

$$\delta_\nu W + V_3 = 0 \quad [\delta_\nu = \delta_1', \delta_2, \delta_3, \delta_4]$$

wobei W bestimmt ist aus

$$\beta \gamma (1 - \lambda) W \equiv \lambda (\beta - \gamma) V_2 + (\lambda \gamma - \beta) V_3,$$

sodass man jetzt ohne weiteres erkennt, dass das anharmonische Verhältniss dieser 4 Ebenen unabhängig ist von der Grösse λ, d. h. von der Lage der Kegelseite.

Von den zu Anfang des Capitels besprochenen Flächen, welchen cubische Kegelschnitte angehören, wollen wir die einfachsten etwas näher betrachten, besonders um daran zu zeigen, wie die Gleichungen derselben gebildet werden können, also zunächst die Regelfläche R (3, 1, 1), welche eine Gerade beschreibt, die beständig an einem cubischen Kegelschnitt und zwei beliebig im Raume gelegenen Geraden hingleitet in derselben Weise, wie die Generatrix eines einfachen Hyperboloids an 3 Geraden, von denen keine zwei in einer Ebene liegen. Wir schreiben die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden mit Rücksicht auf die Gleichung der Curve in der Form

$$\left\{ \begin{aligned} V_0 &\equiv U_0 - (a + b) U_1 + a b U_2 = 0 \\ W_0 &\equiv U_1 - (c + d) U_2 + c d U_3 = 0 \end{aligned} \right\},$$

$$\left\{ \begin{aligned} V_1 &\equiv U_0 - (\alpha + \beta) U_1 + \alpha \beta U_2 = 0 \\ W_1 &\equiv U_1 - (\gamma + \delta) U_2 + \gamma \delta U_3 = 0 \end{aligned} \right\},$$

dann wird die die Fläche beschreibende Gerade dargestellt durch

$$W_0 - \lambda_0 V_0 = 0; \; W_1 - \lambda_1 V_1 = 0,$$

worin die Grössen λ_0 und λ_1 so zu bestimmen sind, dass die vorstehenden Gleichungen durch die Coordinaten

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$$

eines Curvenpunkts befriedigt werden. Man findet durch Einsetzen dieser Werthe zunächst

$$W_0 : V_0 : W_1 : V_1 =$$
$$(\omega - c)(\omega - d) : \omega (\omega - a)(\omega - b) : (\omega - \gamma)(\omega - \delta) : \omega (\omega - \alpha)(\omega - \beta)$$

und dann

$$\lambda_0 = \frac{(\omega - c)(\omega - d)}{\omega (\omega - a)(\omega - b)}; \; \lambda_1 = \frac{(\omega - \gamma)(\omega - \delta)}{\omega (\omega - \alpha)(\omega - \beta)},$$

für welche Werthe die obigen Gleichungen der Generatrix in

$$[\omega^3 - (a+b)\,\omega^2 - a\,b\,\omega]\,W_0 - [\omega^2 - (c+d)\,\omega + c\,d]\,V_0 = 0;$$
$$[\omega^3 - (\alpha+\beta)\,\omega^2 - \alpha\,\beta\,\omega]\,W_1 - [\omega^2 - (\gamma+\delta)\,\omega + \gamma\delta]\,V_1 = 0$$

übergehen. Setzt man darin

$$R_0 \equiv (a+b)\,W_0 + V_0; \quad R_1 \equiv (\alpha+\beta)\,W_1 + V_1;$$
$$S_0 \equiv (c+d)\,V_0 + a b\,W_1; \quad S_1 \equiv (\gamma+\delta)\,V_1 + \alpha\beta\,W_1,$$

so werden sie zu

$$\omega^3\,W_0 - \omega^2\,R_0 + \omega\,S_0 - c\,d\,V_0 = 0;$$
$$\omega^3\,W_1 - \omega^2\,R_1 + \omega\,S_1 - \gamma\,\delta\,V_1 = 0,$$

aus welchen sich durch Elimination des Parameters ω die Gleichung der gesuchten Fläche als Resultante ergibt, nämlich

$$\begin{vmatrix} T_1\,S_0 - T_0\,S_1, & T_0\,R_1 - T_1\,R_0, & T_1\,W_0 - T_0\,W_1 \\ T_0\,R_1 - T_1\,R_0, & T_1 W_0 - T_0 W_1 + R_0\,S_1 - R_1 S_0, & S_0\,W_1 - S_1\,W_0 \\ T_1\,W_0 - T_0\,W_1, & S_0 W_1 - S_1\,W_0, & W_0\,R_1 - W_1\,R_0 \end{vmatrix} = 0,$$

worin zur Abkürzung

$$T_0 \equiv c\,d\,V_0, \quad T_1 \equiv \gamma\,\delta\,V_1$$

gesetzt ist. Vorstehende Determinante ist in Bezug auf die in den als homogene Coordinaten zu betrachtenden Grössen U_0, U_1, U_2, U_3 linearen Ausdrücke R_0, R_1 .... vom sechsten Grad, und erkennt man hierin den Beweis des folgenden Satzes:

Die Regelfläche, deren Erzeugende zwei beliebige Gerade und eine Raumcurve 3. Ordnung fortwährend schneiden, ist von der sechsten Ordnung.

Es modificirt sich die Fläche für specielle Lagen der beiden Geraden gegen die Curve folgendermassen; ist zunächst in den obigen Gleichungen $a = c$, d. h. hat die eine Gerade einen Punkt mit der Curve gemein, so wird $\lambda_0 = \frac{\omega - d}{\omega\,(\omega - b)}$ und die eine der früheren in ω cubischen Gleichungen jetzt vom 2. Grade werden, nämlich

$$(\omega^2 - \omega\,b)\,W_0 - (\omega - d)\,V_0 = 0,$$

sodass, wenn $Q_0 \equiv V_0 + b\,W_0$ gesetzt wird, das Eliminationsresultat sich folgendermassen darstellen lässt

$$\begin{vmatrix} Q_0\,T_1 - d\,V_0\,S_1, & d\,V_0\,R_1 - T_1\,W_0, & -d\,V_0 \\ d V_0\,R_1 - T_1\,W_1, & -d\,V_0\,W_1 + W_0\,S_1 - R_1\,Q_0, & Q_0 \\ -d\,V_0\,W_1, & W_1\,Q_0, & W_0 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus erhellt, dass sich die Ordnung der Fläche nun um eine Einheit vermindert, dieselbe also vom fünften Grade ist. Setzen wir dann weiter auch $b = d$, d. h. ist die eine Gerade eine Sehne der Curve, so wird $\lambda_0 = \frac{1}{\omega}$ und reducirt sich die Gleichung der Regelfläche auf

$$V_0^3 W_1 - V_0^2 W_0 R_1 + V_0 W_0^2 S_1 - \gamma \delta W_0^3 V_1 = 0,$$

sodass dieselbe in diesem Fall nur von der 4. Ordnung ist. Wird anderseits angenommen $a = c$; $\alpha = \gamma$, d. h. beide Gerade hätten je einen Punkt mit dem cubischen Kegelschnitt gemein, so folgt

$$\lambda_0 = \frac{\omega - d}{\omega(\omega - b)};\ \lambda_1 = \frac{\omega - \delta}{\omega(\omega - \beta)}$$

und wird nun die Fläche als Resultante von zwei quadratischen Gleichungen dargestellt durch

$$[d V_0 W_1 - \delta V_1 W_0]^2$$
$$-[\delta V_1(V_0 + bW_0) - dV_0(V_1 + \beta W_1)][W_0(V_1 + \beta W_1) - W_1(V_0 + bW_0)] = 0,$$

woraus man ersieht, dass dieselbe unter dieser Voraussetzung gleichfalls vom 4. Grade ist. Für $a = c$, $b = d$, $\alpha = \gamma$ ist die erstere Gerade eine Sehne der Curve und die andere schneidet die Curve in nur einem Punkt; man hat dann

$$\lambda_0 = \frac{1}{\omega};\ \lambda_1 = \frac{\omega - \delta}{\omega(\omega - \beta)}$$

und daher als Gleichung der Fläche

$$V_0^2 W_1 - V_0 W_0 (V_1 + \beta W_1) + \delta V_1 W_0^2 = 0.$$

Als Gleichungen von zwei beliebigen Erzeugenden der Fläche finden sich für die vorstehenden Werthe von λ_0 und λ_1 folgende

$$[\omega W_0 - V_0 = 0;\ (\delta - \omega) V_1 - \omega (\beta - \omega) W_1 = 0],$$
$$[\omega_1 W_0 - V_0 = 0;\ (\delta - \omega_1) V_1 - \omega_1 (\beta - \omega_1) W_1 = 0];$$

es schneiden sich dieselben auf der Geraden $V_0 = W_0 = 0$ unter der Bedingung

$$\delta(\omega + \omega_1) - \omega\omega_1 - \delta\beta = 0,$$

woraus man erkennt, dass durch jeden Punkt dieser Geraden zwei Erzeugende der Fläche gehen. Aus den Gleichungen der Leitlinien für die Werthe $a = c$, $b = d$, $\alpha = \gamma$ ergibt sich sofort, dass ω und ω_1 die Parameter der Punkte sind, in welchen die beiden betreffenden Erzeugenden der Curve 3. Ordnung begegnen, und man erkennt daher aus der letzteren zwischen ihnen bestehenden Bedingungsgleichung, dass die zugehörigen Punktpaare in Involution sind, sodass also ihre betreffenden Verbindungslinien nach dem Frühern ein einfaches Hyperboloid

$$U_0 U_2 - U_1^2 + \delta(U_1 U_2 - U_0 U_3) + \delta\beta(U_1 U_3 - U_2^2) = 0$$

erzeugen, welches die Curve und ausserdem auch die Gerade $V_1 = W_1 = 0$ enthält. Nehmen wir schliesslich an, es sei $a = c$, $b = d$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, so sind beide Gerade Sehnen der Curve und findet man $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\omega}$, daher

$$\omega W_0 - V_0 = 0;\ \omega W_1 - V_1 = 0$$

als Gleichungen der Erzeugenden und

$$V_0 W_1 - V_1 W_0 = 0$$

als solche der Fläche, die demnach, wie auch schon früher gefunden, ein einfaches Hyperboloid ist.

Wir berücksichtigen nun noch die Fläche R $(3^2,1)$, welche sämmtliche durch eine beliebige Gerade möglichen Sehnen der Curve bilden, oder was dasselbe ist, den Ort der Verbindungslinien der Punkte, welche eine um eine gegebene Gerade sich drehende Ebene mit der Curve gemein hat. Jedoch wollen wir uns mit Aufstellung der ziemlich weitläufigen Gleichung nicht befassen, sondern nur angeben, wie dieselbe gefunden wird und nachweisen, dass sie vom 4. Grade ist. Im Anfang des dritten Capitels wurden die Parameterwerthe der durch einen beliebigen Raumpunkt $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ gehenden Sehne einer Curve 3. Ordnung bestimmt durch die Gleichungen

$$\omega + \vartheta = \frac{x_1 x_2 - x_0 x_1}{x_2^2 - x_1 x_3}; \quad \omega \vartheta = \frac{x_1^2 - x_0 x_2}{x_2^2 - x_1 x_3};$$

wird nun dieser Punkt als eine Gerade durchlaufend angenommen, sind also seine Coordinaten von der Form

$$x_0 = \xi_0 + \lambda \eta_0; \; x_1 = \xi_1 + \lambda \eta_1; \; x_2 = \xi_2 + \lambda \eta_2; \; x_3 = \xi_3 + \lambda \eta_3,$$

so erhält man als Gleichungen der betreffenden Sehne in Bezug auf λ quadratische Ausdrücke, aus denen durch Elimination von λ eine in Bezug auf die Coefficienten U_0, U_1, U_2, U_3 biquadratische Resultante entspringt, sodass der fragliche Ort von der vierten Ordnung ist. In dem Fall, dass die Gerade einen Punkt mit der Curve gemein hat, zerfällt er, wie sich durch Combination früherer Sätze ergibt, in ein einfaches Hyperboloid und einen Kegel 2. Ordnung, welche einen Strahl gemein haben; ist die Gerade eine Sehne der Curve, so wird er vertreten durch 2 Kegel 2. Ordnung mit einer gemeinsamen Kante.

Neuntes Capitel.

In ähnlicher Weise, wie in der Planimetrie eine Beziehung von Punkten und Geraden auf einander vermittelt wird durch einen Kegelschnitt, indem man jedem Punkt die Berührungssehne des von ihm an den Kegelschnitt möglichen Tangentenpaares als sogenannte Polare zuordnet und umgekehrt jeder Geraden den Punkt, worin sich die in den beiden ihr mit dem Kegelschnitt gemeinsamen Punkten an letzteren möglichen Tangenten schneiden, als Pol, gibt die Raumcurve 3. Ordnung *Veranlassung* zu einer solchen im Raume, wobei jedem Punkt eine Ebene

entspricht, nämlich die Ebene, welche durch die drei Berührungspunkte der von jenem Punkt an die Curve möglichen Osculationsebenen geht, und jeder Ebene ein Punkt, der Durchschnitt der in ihren 3 Schnittpunkten mit der Curve an letztere möglichen Osculationsebenen. In solcher Weise einander zugeordnete Punkte und Ebenen sollen Pol und Polarebene, oder auch Focus- und Focalebene heissen. Aus einem im dritten Capitel bewiesenen Satze folgt dann weiter, dass für das eben auseinandergesetzte Correlationssystem der Pol in seiner Polarebene liegt und umgekehrt die Polarebene durch ihren Pol hindurchgeht, denn wir hatten damals gefunden, dass zu dem Pol $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ die durch die Gleichung

$$x_3 U_0 - x_0 U_3 + 3 (x_1 U_2 - x_2 U_1) = 0$$

repräsentirte Polarebene gehört, sowie dass der Pol einer beliebigen Ebene

$$p U_0 + q U_1 + r U_2 + s U_3 = 0$$

bestimmt wird durch die Coordinaten

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = 3 s : r : q : 3 p.$$

Diese Formeln liefern den Beweis, dass die angegebene Beziehung auch dann noch möglich ist, wenn 2 jener Osculationsebenen, resp. Schnittpunkte imaginär werden.

Die vorher angegebenen Fundamentaleigenschaften von Pol und Polare in Bezug auf einen cubischen Kegelschnitt geben schon zu interessanten Folgerungen Anlass, sobald man 4 Punkte der Curve betrachtet; es bestimmen dieselben als Eckpunkte ein Tetraeder und ihre Osculationsebenen bilden ein ebensolches; beide sind einander gleichzeitig ein- und umschrieben, d. h. die Ecken eines jeden liegen in den Seitenebenen des andern. Bezeichnen wir nämlich die 4 Curvenpunkte mit ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, ihre resp. Osculationsebenen mit V_1, V_2, V_3, V_4 und weiter den Schnittpunkt der Ebenen $(V_2 V_3 V_4)$ mit x_1, den $(V_3 V_4 V_1)$ mit x_2, den $(V_4 V_1 V_2)$ mit x_3, endlich $(V_1 V_2 V_3)$ mit x_4, so liegen in Folge der besprochenen Eigenthümlichkeit folgende Punkte immer in einer Ebene

$$(\text{I.}) \left\{ \begin{array}{l} x_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \\ x_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_1 \\ x_3, \vartheta_4, \vartheta_1, \vartheta_2 \\ x_4, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \end{array} \right. \quad \text{und} \quad (\text{II.}) \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1, x_2, x_3, x_4 \\ \vartheta_2, x_3, x_4, x_1 \\ \vartheta_3, x_4, x_1, x_2 \\ \vartheta_4, x_1, x_2, x_3 \end{array} \right.$$

Bedenkt man nun dass die Schnittlinie $(V_1 V_2)$ identisch ist mit der Kante $x_3 x_4$, und ebenso $(V_3 V_4)$ mit $x_1 x_2$, so schneidet die Gerade $x_1 \vartheta_2$ offenbar $(V_3 V_4)$ und $\vartheta_1 \vartheta_2$, aber wegen der ersten Zeile in (I.) auch $\vartheta_3 \vartheta_4$ und wegen der zweiten in (II.) auch $x_3 x_4$ oder das damit identische $(V_1 V_2)$, sodass also die 4 Geraden

$$(V_1 V_2), (V_3 V_4), \vartheta_1 \vartheta_2, \vartheta_3 \vartheta_4,$$

von denen keine zwei in einer Ebene liegen, sämmtlich von $x_1 \vartheta_2$ getroffen werden. Auf gleiche Weise ergibt sich dann, dass dieselben Geraden auch noch von $x_2 \vartheta_1$, $x_3 \vartheta_4$ und $x_4 \vartheta_3$ sämmtlich geschnitten werden, also auch umgekehrt selbst jene schneiden.

Man zieht hieraus den Satz:

> Von zwei einander gleichzeitig ein- und umgeschriebenen Tetraedern liegen eine beliebige Kante des ersteren, ihre Gegenkante, ferner die des andern, welche ihre Endpunkte in den durch die erstere gehenden Flächen hat, sowie deren Gegenkante, auf einem einfachen Hyperboloid.

Es mag nicht unerwähnt bleiben, dass, wie die oben angegebene Eigenthümlichkeit der von 4 Punkten und ihren Osculationsebenen bestimmten beiden Tetraeder benutzt werden kann zur Construction von beliebigen Punkten und Osculationsebenen eines cubischen Kegelschnitts, von dem 3 Punkte mit ihren Osculationsebenen bekannt sind, auch umgekehrt mit Hilfe des letztern nicht nur einander gleichzeitig ein- und umbeschriebene Tetraeder, sondern allgemein derartige n-Ecke und n-Flache gefunden werden können.

Substituirt man für die obigen Coordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ eines Punkts Werthe von der Form $x_0 + \lambda y_0 : x_1 + \lambda y_1 : x_2 + \lambda y_2 : x_3 + \lambda y_3$, die einem Punkte seiner Verbindungslinie mit dem Punkt $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$ angehören, in die Gleichung seiner Polarebene, so kann letztere geschrieben werden

$$x_3 U_0 - x_0 U_3 + 3(x_1 U_2 - x_2 U_1) + \lambda [y_3 U_0 - y_0 U_3 + 3(y_1 U_2 - y_2 U_1)] = 0$$

und setzt sich demnach zusammen aus denen der Polarebenen jener 2 Punkte; ein Resultat, welches folgenden Satz veranlasst:

> Die Polarebenen von sämmtlichen Punkten einer Geraden schneiden sich in einer bestimmten Geraden,

und umgekehrt:

> Die Pole aller Ebenen, welche sich in einer Geraden schneiden, liegen auf einer geraden Linie.

Zwei derartige Gerade heissen reciprok; werden die Gleichungen der einen in der Form:

$$l U_0 + m U_1 + n U_2 = 0; \; p U_1 + q U_2 + r U_3 = 0$$

geschrieben, so sind die der andern:

$$(m q - n p) U_0 + 3 r (m U_1 + n U_2) = 0;$$
$$3 l (p U_1 + q U_2) + (m q - n p) U_3 = 0,$$

welche aus dem Vorigen durch die Annahmen $\lambda = -\frac{x_3}{y_3}$ und $\lambda = -\frac{x_0}{y_0}$ hergeleitet werden können. Aehnlich wie vorher lässt sich auch der *Beweis* von folgenden Sätzen bewirken:

Die Polarebenen sämmtlicher Punkte einer beliebigen Ebene laufen durch einen Punkt in ihr, den Pol,

und umgekehrt,

Die Pole sämmtlicher Ebenen, welche durch einen festen Punkt gehen, liegen in einer gleichfalls durch den Punkt gehenden Ebene, seiner Polarebene,

an die wir als allgemeinstes Princip der besprochenen Correlation folgenden anschliessen:

Durchläuft ein Punkt eine beliebige Oberfläche n^{ter} Ordnung, so umhüllen seine respectiven Polarebenen in Rücksicht auf einen cubischen Kegelschnitt eine Fläche n^{ter} Classe in der Weise, dass die Polarebenen der letzteren in Bezug auf denselben cubischen Kegelschnitt die erstere Oberfläche erzeugen.

Zu den Punkten der Curve gehören als Polaren die betreffenden Osculationsebenen und umgekehrt ist der Pol einer Osculationsebene ihr Berührungspunkt, gerade wie bei den ebenen Kegelschnitten die Polaren von Punkten auf ihnen die resp. Tangenten sind und die Pole der letztern ihre bezüglichen Berührungspunkte. Die Schnittlinie von zwei Osculationsebenen und die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte sind daher Paare von reciproken Geraden. Es folgt weiter, dass eine Tangente der Curve zu betrachten ist als ein Paar zusammenfallender reciproker Geraden. Die Frage, ob es noch andere solche sich selbst reciproke Gerade gibt, lässt sich durch eine einfache Reflexion dahin beantworten, dass in jeder Ebene unzählig viele derartige existiren, nämlich alle durch den Pol der Ebene gehenden. Die Schnittlinien von 2 Osculationsebenen, deren, wie aus dem Früheren bekannt, jede Ebene nur eine enthält, und die dazu reciproken Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte, von welchen durch jeden Punkt des Raums eine einzige geht, lassen eben desshalb eine besondere Bedeutung für das auf cubische Kegelschnitte begründete System des Entsprechens räumlicher Gebilde erwarten, mit deren Aufsuchung wir uns zunächst zu beschäftigen haben, wobei wir zugleich erkennen werden, in welcher Beziehung diese Polaritätsverhältnisse mit den der Tangentenfläche des cubischen Kegelschnitts einschreibbaren Kegelschnitten stehen.

Wir hatten im vierten Kapitel den Satz bewiesen:

Die Pole einer Ebene in Bezug auf die in der Tangentenfläche einer Raumcurve 3. Ordnung möglichen Kegelschnitte liegen auf einem Kegelschnitt

und gezeigt, dass wenn die Gleichung der ersten Ebene war

$$U_1 - \vartheta U_2 = 0,$$

die der letzteren ist

$$2 U_0 - 3 \vartheta U_1 - 3 \vartheta^2 U_2 + 2 \vartheta^3 U_3 = 0.$$

Es wird sich zeigen, dass der zweiten Ebene dieselben Eigenschaften in

Bezug auf die erstere zukommen, und sollen beide Ebenen daher conjugirt genannt werden. Zu dem Ende suchen wir die allgemeinsten Gleichungen von zwei conjugirten Ebenen zu ermitteln, gehen also statt von der obigen Gleichung

$$U_1 - \vartheta U_2 = 0$$

als der der gegebenen Ebene aus von der allgemeineren

$$(a) \quad U_0 - (\lambda + \mu + \nu) U_1 + (\lambda \mu + \lambda \nu + \mu \nu) U_2 - \lambda \mu \nu U_3 = 0.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} V_0 &\equiv U_0 - 3 \nu U_1 + 3 \nu^2 U_2 - \nu^3 U_3, \\ V_1 &\equiv U_0 - (2 \nu + \mu) U_1 + \nu (2 \mu + \nu) U_2 - \mu \nu^2 U_3, \\ V_2 &\equiv U_0 - (2 \mu + \nu) U_1 + \mu (2 \nu + \mu) U_2 - \mu^2 \nu U_3, \\ V_3 &\equiv U_0 - 3 \mu U_1 + 3 \mu^2 U_2 - \mu^3 U_3, \end{aligned}$$

sodass die 4 Ebenen $V_0 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ ein mit der Curve in derselben Beziehung stehendes Tetraeder bilden, wie das seither immer benutzte Coordinatentetraeder, so kann die Gleichung derselben ersetzt werden durch

$$V_0 : V_1 : V_2 : V_3 = x^3 : x^2 : x : 1,$$

wobei

$$x = \frac{\omega - \nu}{\omega - \mu}$$

zu nehmen ist. Die Gleichung (a) der gegebenen Ebene wird dann in diesem neuen System

$$V_1 - k V_2 = 0,$$

worin

$$k = \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu},$$

hat also die vorher benutzte besondere Form und man erhält daher als solche der conjugirten Ebene

$$2 V_0 - 3 k V_1 - 3 k^2 V_2 + 2 k^3 V_3 = 0,$$

oder beim Rückgang auf das ursprüngliche Coordinatensystem

$$(b) \quad U_0 - (\lambda' + \mu' + \nu') U_1 + (\lambda' \mu' + \lambda' \nu' + \mu' \nu') U_2 - \lambda' \mu' \nu' U_3 = 0,$$

worin

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\lambda (\mu + \nu) - 2 \mu \nu}{2 \lambda - (\mu + \nu)}, \\ \mu' &= \frac{\mu (\nu + \lambda) - 2 \nu \lambda}{2 \mu - (\nu + \lambda)}, \\ \nu' &= \frac{\nu (\lambda + \mu) - 2 \lambda \mu}{2 \nu - (\lambda + \mu)} \end{aligned}$$

zu setzen sind. Diese letzten Gleichungen geben aber nach λ, μ, ν *aufgelöst*

$$\lambda = \frac{\lambda' (\mu' + \nu') - 2 \mu' \nu'}{2 \lambda' - (\mu' + \nu')},$$
$$\mu = \frac{\mu' (\nu' + \lambda') - 2 \nu' \lambda'}{2 \mu' - (\nu' + \lambda')},$$
$$\nu = \frac{\nu' (\lambda' + \mu') - 2 \lambda' \mu'}{2 \nu' - (\lambda' + \mu')},$$

also Ausdrücke von derselben Form, wie die vorigen und beweisen eben damit, dass die Ebene (a) die Pole der Ebene (b) in Bezug auf die in der Tangentenfläche möglichen Kegelschnitte enthält, also die Beziehung zwischen den beiden Ebenen eine durchaus gegenseitige ist.

Um die Schnittlinie der beiden conjugirten Ebenen (a) und (b) zu bestimmen, kann man mit Benutzung der durch die Curve vermittelten Reciprocität die Gleichungen der Verbindungslinie ihrer Pole aufsuchen. Schreiben wir die Gleichung (a) folgendermassen

$$(a') \quad U_0 - \sigma_0 U_1 + \sigma_1 U_2 - \sigma_2 U_3 = 0,$$

wobei also

$$\sigma_0 \equiv \lambda + \mu + \nu, \; \sigma_1 \equiv \lambda \mu + \lambda \nu + \mu \nu, \; \sigma_2 \equiv \lambda \mu \nu,$$

so hat ihr Pol die Coordinaten

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = 3 \sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 : 3;$$

ebenso finden sich für die Ebene (b), wenn in ihrer Gleichung

$$s_0 \equiv \lambda' + \mu' + \nu', \; s_1 \equiv \lambda' \mu' + \lambda' \nu' + \mu' \nu', \; s_2 \equiv \lambda' \mu' \nu'$$

gesetzt werden, die Coordinaten des Pols aus

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = 3 s_2 : s_1 : s_0 : 3,$$

und lassen sich dann die Werthe von s_0, s_1, s_2 vermöge der zwischen den Grössen $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ stattfindenden Relationen folgendermassen durch σ_0, σ_1, σ_2 ausdrücken

$$s_0 = \frac{3 (\sigma_0^2 \sigma_1 + 9 \sigma_0 \sigma_2 - 6 \sigma_1^2)}{27 \sigma_2 + 2 \sigma_0^3 - 9 \sigma_0 \sigma_1},$$
$$s_1 = \frac{3 (- \sigma_0 \sigma_1^2 + 6 \sigma_0^2 \sigma_2 - 9 \sigma_1 \sigma_2)}{27 \sigma_2 + 2 \sigma_0^3 - 9 \sigma_0 \sigma_1},$$
$$s_2 = \frac{9 \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 - 27 \sigma_2^2 - 2 \sigma_1^3}{27 \sigma_2 + 2 \sigma_0^3 - 9 \sigma_0 \sigma_1}$$

Die Verbindungslinie dieser beiden Pole hat die Gleichungen

$$(c) \quad p U_0 + q U_1 + r U_2 = 0; \; p U_1 + q U_2 + r U_3 = 0$$

worin

$$p = \sigma_0^2 - 3 \sigma_1; \; q = \sigma_0 \sigma_1 = 9 \sigma_2; \; r = \sigma_1^2 - 3 \sigma_0 \sigma_2$$

zu setzen sind und ist sie, wie die Gleichheit der Coefficienten in vorstehenden Gleichungen beweist, eine reelle oder ideelle Sehne der Curve, deren

Schnittpunkten die Parameter ϑ_1 und ϑ_2 zukommen, welche sich aus den Gleichungen

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{q}{p}; \quad \vartheta_1 \vartheta_2 = \frac{r}{p}$$

ergeben. Die dazu reciproke Schnittlinie der conjugirten Ebenen (a) und (b) ist nach dem Frühern dann die Schnittlinie der zu den beiden Punkten ϑ_1 und ϑ_2 gehörigen Osculationsebenen und wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$(q^2 - pr)\, U_0 - 3\, r\, (q\, U_1 - r\, U_2) = 0;$$
$$3\, p\, (p\, U_1 - q\, U_2) + (q^2 - p\, r)\, U_3 = 0.$$

Man hat daher den Satz:

Je zwei conjugirte Ebenen schneiden sich in einer Geraden, durch welche zwei Osculationsebenen des cubischen Kegelschnitts gehen und geht daher die zu dieser Geraden reciproke Verbindungslinie der Pole jener conjugirten Ebenen durch die Berührungspunkte der genannten Osculationsebenen.

Die erstere Gerade mag die Directrix der beiden conjugirten Ebenen, die letztere ihre Focale genannt werden und werden wir später sehen, welche Eigenschaften dieser Directrix, deren, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, jede Ebene ihre bestimmte hat, ohne Rücksicht auf die conjugirte Ebene zukommen.

Es liegt nun zunächst die Frage nahe, ob durch dieselbe Directrix mehr als ein Paar conjugirter Ebenen geht und ob auf einer Focalen mehr als ein Paar conjugirter Pole liegen. Wir kehren desshalb zu den früher aufgestellten Gleichungen

$$U_1 - \vartheta\, U_2 = 0$$

und

$$2\, U_0 - 3\, \vartheta\, U_1 - 3\, \vartheta^2\, U_2 + 2\, \vartheta^3\, U_3 = 0$$

von einem Paar conjugirter Ebenen zurück, deren Focale durch

$$U_0 - \vartheta\, U_1 + \vartheta^2\, U_2 = 0; \quad U_1 - \vartheta\, U_2 + \vartheta^2\, U_3 = 0$$

repräsentirt wird, und vergleichen die letztere mit der oben durch

$$p\, U_0 + q\, U_1 + r\, U_2 = 0; \quad p\, U_1 + q\, U_2 + r\, U_3 = 0$$

dargestellten Focalen der Ebenen (a) und (b). Sollen beide identisch sein, so muss

$$q = p\, \vartheta; \quad r = p\, \vartheta^2$$

sein, vermittelst welcher Gleichungen, die die Pole der Ebenen (a) und (b) bestimmenden Grössen σ_0, σ_1, σ_2, s_1, s_2, s_3 durch nachstehende Bedingungen beschränkt werden:

$$p = \sigma_0^2 - 3\, \vartheta\, \sigma_0 + 9\, \vartheta^2; \quad \sigma_1 = \vartheta\, (\sigma_0 - 3\, \vartheta); \quad \sigma_2 = -\, \vartheta^3;$$
$$s_0 = \frac{3\, \vartheta\, (\sigma_0 - \sigma\, \vartheta)}{2\, \sigma_0 - 3\, \vartheta}; \quad s_1 = \vartheta\, (\sigma_0 - 3\, \vartheta); \quad s_2 = -\, \vartheta^3,$$

sodass die Gleichungen (a) und (b) werden zu

$$(\odot) \quad \begin{array}{l} U_0 - 3\,\vartheta^2\, U_2 + \vartheta^3\, U_3 - \sigma_0\,[U_1 - \vartheta\, U_2] = 0; \\ U_0 - 3\,\vartheta^2\, U_2 + \vartheta^3\, U_3 - s_0\,[U_1 - \vartheta\, U_2] = 0. \end{array}$$

Es bedeutet darin σ_0 eine willkürliche Constante, von welcher s_0 in der angegebenen linearen Weise abhängt, sodass also vorstehende Gleichungen eine unendliche Menge von Ebenen darstellen, welche sämmtlich durch die Gerade

$$2\,U_0 - 3\,\vartheta\, U_1 - 3\,\vartheta^2\, U_2 + 2\,\vartheta^3\, U_3 = 0;\; U_1 - \vartheta\, U_2 = 0$$

hindurchgehen. Schreibt man die zwischen σ_0 und s_0 bestehende Re lation in der Form

$$2\,\sigma_0\, s_0 - 3\,\vartheta\,(\sigma_0 + s_0) + 18\,\vartheta^2 = 0,$$

so lehrt sie, dass die durch die Gleichungen ($\odot$) repräsentirten conjugirten Ebenenpaare in Involution sind, sowie dass die Doppelebenen des Büschels die darunter vorkommenden Osculationsebenen sind. Man hat daher die Sätze:

> Jede Gerade, worin sich 2 Osculationsebenen eines cubischen Kegelschnitts schneiden, ist die Achse eines von in Bezug auf denselben conjugirten Ebenen gebildeten involutorischen Büschels, und sind jene Osculationsebenen die Doppelebenen des letztern,

und

> Jede Sehne eines cubischen Kegelschnitts enthält die Pole von einem Büschel conjugirter Ebenen, und zwar bilden dieselben auf ihr eine involutorische Punktreihe, deren Doppelpunkte ihre beiden Schnittpunkte mit der Curve sind,

im Anschluss an welche auch noch folgender unmittelbar aus der Symmetrie zwischen den Grössen λ, μ, ν einerseits und λ', μ', ν' anderseits in den oben dazwischen gegebenen Relationen hervorgehender hier eine Stelle finden mag:

> Die 6 Punkte, worin eine Raumcurve 3. Ordnung von 2 conjugirten Ebenen getroffen wird, sind in Involution, d. h. legt man durch sie und eine beliebige Sehne der Curve Ebenen, so entsteht ein involutorisches Ebenenbüschel.

Um den Centralpunkt der auf der Focalen gebildeten Involution zu finden, hat man nur eine Parallelebene zu ihr durch die zugehörige Directrix zu legen, welche also durch den unendlich entfernten Punkt von ihr geht, und dann die conjugirte Ebene zu bestimmen, deren Schnittpunkt mit der Focalen der gesuchte Centralpunkt ist.

Hat der cubische Kegelschnitt zwei parallele Osculationsebenen, so gibt es nach dem ersten der vorigen Sätze ein Parallelebenenbüschel von conjugirten Ebenen, dessen Centralebene der unendlich entfernten Ebene conjugirt ist und daher mit der die Mittelpunkte der der Tangentenfläche der Curve eingeschriebenen Kegelschnitte enthaltenden Ebene

identisch ist. Mit Rücksicht auf die im sechsten Capitel gefundenen Resultate bemerken wir, dass für die cubische Ellipse die beiden Doppelebenen jenes involutorischen Büschels von parallelen conjugirten Ebenen reell sind, während sie für die cubische Hyperbel imaginär sind und bei der cubischen hyperbolischen Parabel zusammenfallen, sodass also im letzteren Fall keine Involution im eigentlichem Sinne stattfindet.

Die in den letzten Sätzen vorkommenden Pole von conjugirten Ebenen sollen conjugirte Punkte in Bezug auf den cubischen Kegelschnitt genannt werden, denn es ergibt sich aus der dargelegten Reciprocität, dass die Polarebenen eines beliebigen Punkts in Bezug auf alle durch den cubischen Kegelschnitt möglichen Kegel 2. Ordnung einen bestimmten Kegel 2. Ordnung umhüllen, dessen Spitze in derselben Beziehung zum ersteren Punkte steht. Es sollen dann auch weiter die hierbei entstehenden Kegelflächen, sowie die im reciproken Satze vorkommenden Kegelschnitte conjugirt heissen, eine Benennung, die wir dann weiter auch auf alle von conjugirten Elementen gebildeten Figuren ausdehnen wollen, und wofür eine Anzahl nicht uninteressanter Sätze, betreffend conjugirte Dreiecke (ebene sowohl als körperliche), conjugirte Tetraeder u. dgl., existiren, die wir jedoch ihrer untergeordneten Bedeutung wegen hier übergehen müssen.

Aus dem Frühern weiss man, dass durch jeden Punkt des Raumes eine Focale[1]), d. h. Linie der Pole eines Büschels von conjugirten Ebenen, geht, und wurden auch die Gleichungen derselben für den betreffenden Punkt daselbst angegeben. Reciprok hierzu existirt in der Ebene

$$l\, U_0 + m\, U_1 + n\, U_2 + h\, U_3 = 0$$

nur eine Directrix, d. h. Achse eines Büschels von conjugirten Ebenen, darstellbar als Schnitt der Ebenen

$$(q^2 - p\,r)\; U_0 - 3\,r\,(U_1\,q - U_2\,r) = 0;$$
$$(q^2 - p\,r)\; U_3 + 3\,p\,(U_1\,p - U_2\,q) = 0,$$

deren Berührungspunkte bedingt werden durch

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{q}{p} = \frac{m\,n - 9\,h\,l}{3\,l\,n - m^2},\quad \vartheta_1\,\vartheta_2 = \frac{r}{p} = \frac{3\,h\,m - n^2}{3\,l\,n - m^2},$$

sodass also die betreffende Gerade immer reell ist, auch wenn diese Ebenen imaginär sein sollten. Ist ein Punkt der Pol einer Ebene, so

[1]) Es mag hier kurz auf den Zusammenhang der Theorie der Raumcurven 3. Ordnung mit der der sogenannten algebraischen Strahlensysteme hingewiesen werden. Die Sehnen einer Raumcurve 3. Ordnung bilden ein Strahlensystem erster Ordnung von der dritten Classe, dessen Brennflächen sich auf die Curve reduciren. (Vgl. Kummer in Berliner Monatsberichten 1865, p. 288.)

ist die durch ihn gehende Focale und die in jener Ebene gelegene Directrix ein Paar reciproker Geraden. Da sich nun in jedem Punkt des Raumes drei (reelle oder imaginäre) Osculationsebenen schneiden, so gehen durch jeden Punkt 3 Directricen und zwar werden zwei davon imaginär, sobald zwei Osculationsebenen imaginär sind; ebenso liegen in jeder Ebene 3 Focalen, die Verbindungslinien der Punkte, welche sie mit der Curve gemein hat, und zwar bleibt, sobald 2 dieser Schnittpunkte imaginär sind, nur ihre Verbindungslinie als in der Ebene gelegene reelle Focale übrig.

Ein einfaches Kriterium zur Entscheidung über die Natur der in einer Ebene gelegenen Focalen, resp. der durch einen Punkt gehenden Directricen liefern uns einige auf der nachstehenden Entwickelung basirende Sätze. Es waren oben unter (*a*) und (*b*) die allgemeinsten Gleichungen von zwei conjugirten Ebenen gegeben worden und unter (*c*) die Gleichung der Verbindungslinie ihrer Pole, die dann auch die Focale sämmtlicher durch die Schnittlinie jener Ebenen gehenden conjugirten Ebenenpaare ist. Dieselbe trifft die Curve in zwei reellen Punkten und gehen folglich durch jene Achse zwei reelle Osculationsebenen, wenn

$$q^2 - 4pr > 0$$

oder für die oben angegebene Bedeutung der Grössen p, q, r, wenn

$$27\sigma_2^2 - 18\sigma\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0^2\sigma_1^2 + 4\sigma_1^3 + 4\sigma_0^3\sigma_2 > 0.$$

Diese letztere Bedingungsgleichung ist aber identisch mit der, dass die Gleichung

$$\omega^3 - \omega^2\sigma_0 + \omega\sigma_1 - \sigma_2 = 0,$$

woraus sich die Parameter der Schnittpunkte der Ebene (*a'*), die mit (*a*) identisch ist, und der Curve als Wurzelwerthe ergeben, zwei complexe Wurzeln hat. Hieraus ziehen wir dann den Satz:

> Wenn eine Focale den cubischen Kegelschnitt in zwei reellen Punkten trifft, und demnach die zugehörige Directrix der Schnitt von zwei reellen Osculationsebenen ist, so begegnet jede durch die letztere mögliche Ebene der Curve nur in einem reellen Punkt, dagegen trifft eine solche die Curve in drei reellen Punkten, wenn die Focale zwei imaginäre Punkte mit der Curve gemein hat,

oder:

> Jede Ebene eines Büschels von conjugirten Ebenen, trifft den cubischen Kegelschnitt in drei reellen Punkten oder nur in einem, je nachdem die Doppelelemente jenes involutorischen Büschels imaginär oder reell sind.

Reciprok hierzu hat man:

> Wenn durch eine Directrix zwei reelle Osculationsebenen gehen, also die zugehörige Focale den cubischen Kegelschnitt in 2 reellen

> **Punkten trifft, so ist durch jeden Punkt der Directrix nur eine Osculationsebene möglich, dagegen gibt es deren drei, sobald die Directrix der Schnitt von 2 imaginären Osculationsebenen ist,**

und

> **Durch einen Punkt gehen drei reelle Osculationsebenen eines cubischen Kegelschnitts oder nur eine, je nachdem die auf der zugehörigen Focalen gelegene involutorische Punktreihe imaginäre oder reelle Doppelpunkte hat.**

Das analoge Verhalten aller zu derselben Directrix gehörigen Ebenen bezüglich ihrer Schnittpunkte mit der Curve offenbart sich weiter in folgenden Sätzen über die in diesen Ebenen enthaltenden conjugirten Kegelschnitte, welche leicht auf rein geometrischem Wege mit Berücksichtigung schon erwiesener Eigenschaften erhalten werden.

> **Alle zu demselben Büschel gehörigen conjugirten Kegelschnitte liegen auf einem einfachen Hyperboloid,**

und

> **Die Mittelpunkte aller zu einem Büschel gehörigen conjugirten Kegelschnitte liegen auf einem Kegelschnitt, dessen Ebene durch die Focale geht, die zur Achse des Büschels reciprok ist,**

u. s. w.

Schliesslich bleibt nur noch zu untersuchen, in welcher Beziehung die Directrix einer Ebene zum Pol der Ebene steht; um dabei den Rechnungsaufwand möglichst zu vermindern, benutzen wir wieder die beiden conjugirten Ebenen

$$U_1 - \vartheta\, U_2 = 0;\ 2\, U_0 - 3\, \vartheta\, U_1 - 3\, \vartheta^2\, U_2 + 2\, \vartheta^3\, U_3 = 0,$$

welche in Folge der Substitutionen

$$x = U_0;\ y = -\vartheta^3\, U_3;\ z = \vartheta^3\, U_3 - 3\, \vartheta^2\, U_2 + 3\, \vartheta\, U_1 - U_0;$$
$$w = 2\, U_0 - 3\, \vartheta\, U_1 - 3\, \vartheta^2\, U_2 + 2\, \vartheta^3\, U_3$$

sich darstellen lassen durch

$$x + y + z = 0;\ w = 0,$$

wobei dann

$$3\,(y - z) - w = 0;\ 3\,(z - x) - w = 0;\ 3\,(x - y) - w = 0$$

die Gleichungen der 3 sich im Pol der Ebene $w = 0$ scheidenden Osculationsebenen sind, sodass die in dieser Ebene gelegenen Verbindungslinien des Pols mit den der Ebene und der Curve gemeinsamen Punkten repräsentirt werden durch

$$w = 0;\ [y - z = 0;\ z - x = 0;\ x - y = 0].$$

Die Directrix der Ebene hat die Gleichung

$$[w = 0;\ x + y + z = 0]$$

und die Seiten des durch den cubischen Kegelschnitt in der Ebene

$w = 0$ bestimmten Dreiecks sind

$$w = 0;\ [7x + y + z = 0;\ x + 7y + z = 0;\ x + y + 7z = 0].$$

Bezeichnen wir die in Parenthese stehenden Gleichungen kurz mit $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, so ist

$$A_1 - A_2 \equiv y - z = 0;\ A_2 - A_0 \equiv z - x = 0;\ A_0 - A_1 \equiv x - y = 0,$$

und erhält man demnach als Gleichungen des zu je einer dieser 3 Geraden und die sich auf ihr schneidenden Dreieckseiten conjugirten vierten harmonischen Strahles folgende:

$$A_1 + A_2 \equiv 2x + 8y + 8z = 0;\ A_2 + A_0 \equiv 8x + 2y + 8z = 0;$$
$$A_0 + A_1 \equiv 8x + 8y + 2z = 0,$$

es schneiden dieselben die betreffenden Gegenseiten in Punkten, die auf der Geraden

$$A_0 + A_1 + A_2 \equiv x + y + z = 0$$

d. h. der Directrix liegen, sodass also diese für jede Ebene ohne weiteres gefunden werden kann, wenn die Schnittpunkte der Ebene mit der Curve und ihr Pol bekannt sind.

Zehntes Capitel.

Auf die in den vorhergehenden Capiteln dargelegten Eigenschaften der cubischen Kegelschnitte stützen sich eine Reihe von auf diese Curven bezüglichen Constructionsaufgaben, mit deren wichtigsten wir uns im Folgenden beschäftigen wollen und die sich, wie dies die dualistische Natur der Curven motivirt, immer paarweise einander gegenüberstellen lassen.

Sind zunächst sechs Punkte, resp. sechs Osculationsebenen eines cubischen Kegelschnitts gegeben, so können weitere Punkte, resp. Osculationsebenen auf verschiedene Weise ermittelt werden; um, was der nächstliegende Fall sein wird, { den in einer durch 2 der gegebenen Punkte gehenden Ebene gelegenen dritten Curvenpunkt / die durch einen Punkt auf der Schnittlinie von 2 der gegebenen Ebenen gehende dritte Osculationsebene } zu finden, so ergibt sich aus den Sätzen des vierten Capitels:

Die durch 2 der gegebenen Punkte, etwa a und b, gehende Ebene wird von den Seitenflächen des von den 4 übrigen Punkten gebildeten Tetraeders in 4 Geraden

Die den auf der Schnittlinie (AB) von zweien der gegebenen 6 Osculations-Ebenen gelegenen Punkt mit den Eckpunkten des von den übrigen 4 Ebenen gebildeten

geschnitten, die mit der Geraden $(a\ b)$ als Tangenten einen Kegelschnitt bestimmen, dessen durch a und b gehende Tangenten sich in dem gesuchten Punkte schneiden.

Tetraeders verbindenden Geraden bestimmen mit der Geraden (AB) als Seiten einen Kegel 2. Ordnung, der die Ebenen A und B in zwei Geraden schneidet, welche in der gesuchten Osculationsebene liegen.

oder man benutzt die Erzeugung der Raumcurve 3. Ordnung durch 2 projectivische Strahlenbündel, resp. 2 collineare Ebenen und gelangt dadurch zu folgender Construction:

Die der durch die Punkte a und b gehenden Ebene E, die wir als zum Strahlenbündel $a\ c$, $a\ d$, $a\ e$, $a\ f$ . . . gehörig annehmen, im Bündel $b\ c$, $b\ d$, $b\ e$, $b\ f$ . . . entsprechende E_1 schneidet die erstere in einer Geraden, welche von dem ihr in ersterem Bündel entsprechenden Strahl in dem gesuchten Curvenpunkte getroffen wird.

Der dem auf der Geraden (AB) angenommenen Punkte P, den wir als zum ebenen Systeme $A\ C$, $A\ B$, $A\ E$, $A\ F$ . . . gehörend betrachten, im System $B\ C$, $B\ D$, $B\ E$, $B\ F$. . . entsprechende P_1 bestimmt mit P eine Gerade, durch welche sowie durch die ihr im ersten System entsprechende die gesuchte Osculationsebene hindurchgeht.

Dieselbe Erzeugungsart des cubischen Kegelschnitts führt uns auch zu einer Construction der Tangente, { welche durch einen der 6 gegebenen Punkte, etwa durch a hindurchgeht / welche in einer der 6 gegebenen Ebenen, etwa in A liegt }; sie ist

der dem Strahl $(a\ b)$ des Büschels $b\ c$, $b\ d$, $b\ e$ . . . in dem andern Büschel $a\ c$, $a\ d$, $a\ e$ . . . entsprechende,

die der Geraden $(A\ B)$ des ebenen Systems $B\ C$, $B\ D$, $B\ E$ . . . . in dem System AC, $A\ D$, $A\ E$. . . . entsprechende,

was sich auf ähnliche Weise begründen lässt, wie die analoge Behauptung bei Erzeugung der ebenen Kegelschnitte durch zwei collineare Strahlenbüschel, resp. Gerade. Eine andere Construction von Tangenten ergibt sich aus dem im dritten Capitel bewiesenen Satze von dem einer Raumcurve 3. Ordnung eingeschriebenen Siebeneck und dem reciproken dazu über ein Siebenflach, das von Osculationsebenen der Curve gebildet wird, nämlich:

In jedem von Punkten einer Raumcurve 3. Ordnung gebildeten unebenen Siebeneck liegen die Punkte, worin die Ebenen (1 2 3), (2 3 4), (3 4 5) den Gegenseiten (5 6), (6 7), (7 1) begeg-

In jedem von Osculationsebenen einer Raumcurve 3. Ordnung gebildeten Siebenflach schneiden die Ebenen, welche die Punkte (1 2 3), (2 3 4), (3 4 5) mit den resp. Schnittlinien (5 6), (6 7), (7 1) bestim-

nen, mit dem Punkt (3) in einer Ebene.[1])

men, sich in einem Punkt der Ebene (3).

Lässt man nun die Verbindungs-, resp. Schnittlinie von zweien der in diesen Sätzen vorkommenden Elemente in eine Tangente übergehn, wobei diese Elemente, etwa die Punkte, resp. Ebenen (1) und (2) einander unendlich nahe rücken, so ist

durch den Schnittpunkt der Ebene (2 3 4) mit der Geraden (6 7) und den von (3 4 5) mit der Geraden (7 2) und den Punkt (3) eine Ebene bestimmt, welche die Gerade (5 6) in einem Punkte trifft, der mit der Geraden (2 3) eine Ebene bestimmt, welche die Tangente des Punkts (2) enthält. Ebenso wird durch die Schnittpunkte von (2 7 6) und (3 4), von (7 6 5) mit (2 3) und den Punkt (7) eine Ebene bestimmt, welche die Gerade (4 5) in einem Punkte

durch die den Punkt (2 3 4) und die Gerade (6 7) enthaltende Ebene, und die durch (3 4 5) und (7 2) gehende und die Ebene (3) ein Punkt bestimmt, welcher mit der Geraden (5 6) eine Ebene bestimmt, die von der Geraden (2 3) in einem Punkt getroffen wird, durch den die in der Ebene (2) enthaltene Tangente geht. Ebenso schneiden sich die durch (2 7 6) und (3 4), (7 6 5) und (2 3) bestimmte Ebene und die Ebene (7) in einem Punkte, welcher mit der Geraden (4 5) eine

1) Vorstehender Satz gibt, indem man successive 2 oder 3 Eckpunkte zusammenfallen lässt, wobei eine Seite in eine Tangente und eine Ebene durch 3 Punkte in eine Osculationsebene übergeht, Veranlassung zu einer Reihe von Specialitäten, von denen wir einige hersetzen wollen.

In jedem einer Raumcurve 3. Ordnung eingeschriebenen Fünfeck treffen die Osculationsebene einer Ecke und die in dieser Ecke berührenden Ebenen, welche durch die beiden Nachbarecken gehen, die resp. Gegenseiten in Punkten, die mit jener Ecke in einer Ebene liegen.

In jedem einer Raumcurve 3. Ordnung eingeschriebenen Viereck schneiden die Tangentenebenen zweier Gegenecken, welche durch dieselbe von den beiden andern Gegenecken gehen, und die Ebene dieser 3 Ecken die bezüglichen Verbindungslinien der ersteren Ecken mit der vierten und die Tangente der letzteren in Punkten, welche mit der mittlern der 3 ersten Ecken in einer Ebene liegen.

In jedem einer Raumcurve 3. Ordnung eingeschriebenen Viereck wird die Tangente einer Ecke von der Osculationsebene der Gegenecke und die in der ersteren Ecke sich schneidenden Seiten von den Tangentenebenen der zweiten Ecke, welche die beiden übrigen Gegenecken enthalten, in Punkten geschnitten, welche mit jener zweiten Ecke in derselben Ebene liegen.

U. s. w.

Der erste von diesen Sätzen kann, wie leicht zu entnehmen, benutzt werden, wenn die Osculationsebenen und die Tangente eines Punkts einer Raumcurve 3. Ordnung und ausserdem noch 4 Punkte derselben gegeben sind, den Berührungspunkt zu finden.

trifft, der mit (7 2) in einer Ebene liegt, die gleichfalls die Tangente des Punkts (2) enthält, sodass also ihre Schnittlinie mit der vorherbestimmten Ebene die gesuchte Tangente ist.

eine Ebene bestimmt, die von (7 2) in einem Punkte getroffen wird, durch welchen gleichfalls die in der Ebene (2) enthaltene Tangente geht, sodass also die Verbindungslinie dieser beiden Punkte die gesuchte Tangente ist.

Wenn die { durch den Punkt (2) gehende / in der Ebene (2) gelegene } Tangente bekannt ist,

so lässt sich, wenn noch 4 weitere { Curvenpunkte / Osculationsebenen } gegeben sind,

{ die Osculationsebene des Punkts (2) / der Berührungspunkt der Ebene (2) } folgendermassen bestimmen:

Die Tangentenebenen am Punkt (2), welche durch (6) und (3) gehen, treffen die Geraden (3 4) und (5 6) in Punkten, die mit (2) eine Ebene bestimmen, welche die Gerade (4 5) in einem Punkte trifft, durch den die Osculationsebene des Punkts (2) geht.

Die Punkte, worin die in der Ebene (2) gelegene Tangente die Ebenen (6) und (3) trifft, bestimmen mit den resp. Geraden (3 4) und (5 6) Ebenen, durch deren Schnittpunkt mit der Ebene (2) und durch die Gerade (4 5) eine Ebene bestimmt wird, welche die in (2) gelegene Tangente im Berührungspunkt trifft.

Die Entstehung der Raumcurven 3. Ordnung durch 2 Kegel 2. Ordnung mit einer gemeinsamen Kante, resp. 2 beliebig im Raume gelegene Kegelschnitte mit einer gemeinschaftlichen Tangente, aus welcher sich die in den angegebenen Constructionen benutzten Sätze durch synthetische Betrachtungen herleiten lassen, gibt noch weitere Mittel zu ihrer Lösung an die Hand. Man erhält, um, wenn 6 { Punkte / Osculationsebenen } einer Raumcurve 3. Ordnung gegeben sind, { den in einer durch 2 dieser Punkte gehende Ebene E liegenden dritten Curvenpunkt / die durch einen auf der Schnittlinie von 2 dieser Ebenen liegenden Punkt P mögliche 3. Osculationsebene } zu finden, wenn man bedenkt, dass { durch Verbindung irgend zweier mit den jedesmaligen 5 übrigen Curvenpunkten zwei Kegel 2. Ordnung entstehen / jede dieser Ebenen von den jedesmaligen 5 übrigen in Tangenten eines Kegelschnitts getroffen wird }, nachstehende Construction, indem man mit Rücksicht auf

die Sätze von Pascal und Brianchon die $\left\{\begin{matrix}\text{Strahlen jener Kegel}\\ \text{Tangenten jener Kegelschnitte}\end{matrix}\right\}$ sucht, welche $\left\{\begin{matrix}\text{sich in der gegebenen Ebene schneiden}\\ \text{durch den gegebenen Punkt gehen}\end{matrix}\right\}$:

Eine durch die Schnittlinie der Ebene (1 2 3) und (1 6 2), sowie durch die von (1 4 5) und *E* gelegte Ebene schneidet die Ebene (1 5 6) in einer Geraden, die mit dem Punkt 3 eine Ebene bestimmt, welche die *E* in einer Geraden schneidet, die den gesuchten Punkt enthält; ebenso schneidet die durch den Schnitt von (2 3 4) mit (2 6 1) und den von (2 4 5) mit *E* gelegte Ebene die Ebene (2 5 6) in einer Geraden, die mit dem Punkt 3 eine Ebene bestimmt, deren Schnittpunkt mit der vorherbestimmten Geraden der gesuchte Punkt ist.

Der den Verbindungslinien der Punkte (1 2 3) mit (1 6 2) und (1 4 5) mit *P* gemeinsame Punkt bestimmt mit dem Punkt (1 5 6) eine Gerade, welche die Ebene 3 in einem Punkte trifft, dessen Verbindungslinie mit *P* in der gesuchten Ebene liegt; ebenso liefert der als Schnitt der Verbindungslinien von (2 3 4) mit (2 6 1), und von (2 4 5) mit *P* erhaltene Punkt in Verbindung mit dem Punkt (2 5 6) eine Gerade, durch deren Schnittpunkt mit der Ebene 3 die gesuchte Osculationsebene gehen muss, sodass dieselbe durch ihn und die vorhergefundene Gerade gegeben ist.

Die Construction rechts gewinnt eine gefälligere Form, wenn man sie dahin abändert, dass man in einer 3 von den gegebenen Punkten enthaltenden Ebene die Punkte aufsucht, worin sie von den sich in der Ebene schneidenden Kegelseiten getroffen wird; es liegen dieselben offenbar auf der der Ebene *E* mit der Ebene gemeinsamen Geraden und werden gefunden als Schnittpunkte dieser Geraden mit den beiden Kegelschnitten, welche in der Ebene (4 5 6) bestimmt werden durch die Punkte 4, 5, 6 und die Punkte, worin diese Ebene von den Strahlen (1 2) und (1 3), resp. (2 3) getroffen wird.

Um die Tangente in dem soeben gefundenen Curvenpunkt zu construiren, hat man nur zu bedenken, dass, wenn die Punkte 1 und 2 zu Eckpunkten eines Coordinatentetraeders in der im dritten Kapitel auseinandergesetzten Weise genommen werden, also die Curve dargestellt wird durch

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1,$$

die Ebene *E* repräsentirt ist durch

$$U_1 - \vartheta\, U_2 = 0,$$

wo, wie wir früher gesehen, ϑ den Parameter des in dieser durch die Punkte 1 und 2, zu denen die Parameterwerthe 0 und ∞ gehören, gehenden Ebene gelegenen dritten Curvenpunktes ist. Die beiden von

den Punkten 1 und 2 aus durch die Curve gelegten Kegel 2. Ordnung haben die Gleichungen

$$U_0\,U_2 - U_1^2 = 0;\quad U_1\,U_3 - U_2^2 = 0,$$

und die Gleichungen der Tangente in ϑ sind

$$U_0 - 2\,\vartheta\,U_1 + \vartheta^2\,U_2 = 0;\quad U_1 - 2\,\vartheta\,U_2 + \vartheta^2\,U_3 = 0;$$

es stellen dieselben zwei Ebenen dar, welche die Kegel längs den Geraden

$$\begin{Bmatrix} U_0 - \vartheta\,U_1 = 0 \\ U_1 - \vartheta\,U_2 = 0 \end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix} U_1 - \vartheta\,U_2 = 0 \\ U_3 - \vartheta\,U_3 = 0 \end{Bmatrix},$$

d. h. den Verbindungslinien ihrer Scheitel mit dem Punkt ϑ berühren. Die Tangente des Punkts ϑ wird demnach erhalten als Schnittlinie der die durch die Strahlen 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, resp. 2 1, 2 3, 2 4, 2 5, 2 6 bestimmten Kegel längs ihrer in der Ebene E gelegenen Seiten berührenden Ebenen.

Die Osculationsebene eines Punkts wird gleichfalls mit Rücksicht auf die eben benutzte analytische Darstellung der Curve leicht zu construiren sein in Folge der Bemerkung, dass die Ebene $U_0 = 0$, welche, wie dies früher nachgewiesen worden, die Curve im Punkt 1 osculirt, den von diesem Punkt als Scheitel aus durch die Curve gelegten Kegel $U_0\,U_2 - U_1^2 = 0$ längs der Seite $U_0 = 0$, $U_1 = 0$, d. h. längs der Tangente der Curve in jenem Punkt berührt, welche Eigenschaft selbstverständlich für alle Curvenpunkte gilt.

Was schliesslich die allgemeinste hierher gehörige Aufgabe betrifft, nämlich { die in einer beliebigen Ebene gelegenen Punkte einer Raumcurve 3. Ordnung | die durch einen beliebigen Punkt gehenden 3 Osculationsebenen einer Raumcurve 3. Ordnung } zu bestimmen, wenn 6 { Curvenpunkte | Osculationsebenen } gegeben sind, so sind

in der betreffenden Ebene zwei Kegelschnitte bestimmt durch die 5 Punkte, worin dieselbe einerseits von den Strahlen (1 2), (1 3), (1 4), (1 5), (1 6), andererseits von (2 1), (2 3), (2 4), (2 5), (2 6) getroffen wird; die drei Punkte, welche dieselben ausser dem durch den Strahl (1 2) bestimmten Punkt noch gemein haben, sind die gesuchten *Curvenpunkte*.	zwei Kegel 2. Ordnung mit dem betreffenden Punkt als Scheitel gegeben durch die 5 Tangentenebenen, welche er mit den Geraden (1 2), (1 3), (1 4), (1 5), (1 6), resp. (2 1), (2 3), (2 4), (2 5), (2 6) liefert; die 3 Tangentenebenen, welche die Kegel ausser der die Gerade (1 2) enthaltenden noch gemein haben, sind die gesuchten Osculationsebenen.

Es kommt somit die Aufgabe zurück auf die Construction der zweien Kegelschnitten gemeinschaftlichen Punkte, resp. Tangenten, da aus der letzteren die der zweien concentrischen Kegeln 2. Ordnung gemeinschaftlichen Tangentenebenen unmittelbar sich ergibt. [1])

Man ist durch die vorher angegebene Construction der Tangenten nun auch im Stande, die Asymptoten eines durch 6 Punkte bestimmten cubischen Kegelschnitts zu ermitteln. Zunächst lassen sich die Richtungen derselben finden, indem man für die beiden die Curve bestimmenden Kegel 1 (2 3 4 5 6) und 2 (1 3 4 5 6) diejenigen Seiten aufsucht, welche einander parallel sind, was in der Weise gemacht werden kann, dass man durch den Scheitel des einen Kegels einen zum andern parallelen legt, beide mit einer Ebene schneidet und die den so erhaltenen Kegelschnitten ausser dem auf dem Strahle (1 2) gelegenen drei gemeinsamen Punkte aufsucht. Die die beiden ersteren Kegel 1 (2 3 4 5 6) und 2 (1 3 4 5 6) längs eines solchen Paares paralleler Seiten tangirenden Ebenen schneiden sich dann in der Tangente des nach der Richtung der betreffenden Seiten in unendlicher Ferne gelegenen Curvenpunkts, d. h. in einer Asymptote des cubischen Kegelschnitts. Hierdurch sind dann auch zugleich die durch die Curve möglichen Cylinder 2. Ordnung ermittelt, deren längs der betreffenden Asymptote berührende Ebenen die Osculationsebenen der Curve in den unendlich entfernten Punkten sind.

Es lässt sich dann eine weitere Reihe von Aufgaben bilden, indem die sechs die Raumcurve 3. Ordnung bestimmenden Elemente nicht alle gleichartig angenommen werden, also zunächst etwa 5 Punkte und eine Osculationsebene, 4 Punkte und 2 Osculationsebenen u. s. w. Wir wollen nicht weiter auf dieselben eingehen, sondern nur bemerken, dass in dem Fall, wo die Osculationsebenen zu irgend welchen der gegebenen Punkte gehören, die Auflösung auf denselben Principien beruht wie vorher, und besonders erinnern an die sich unmittelbar aus dem im neunten Capitel gefundenen Satz, dass 4 Punkte eines cubischen Kegelschnitts ein Tetraeder bilden, welches dem von ihren Osculationsebenen gebildeten gleichzeitig ein- und umschrieben ist, ergebende Construction von weiteren Punkten, resp. Osculationsebenen, sobald 3 Punkte nebst den zugehörigen Osculationsebenen bekannt sind. Es können ferner als Bestimmungsstücke Gerade gegeben sein, welche Sehnen der Curve resp. Schnittlinien von 2 Osculationsebenen derselben sein sollen und stützt sich deren Lösung mit Ausnahme der nächstliegenden, wo 5 Punkte und eine

1) In Betreff der Aufsuchung der den Kegelschnitten gemeinsamen Punkte, resp. Tangenten verweisen wir auf Jacob Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie. II. Theil. Bearbeitet von Dr. Heinrich Schröter. §. 53. pag. 386 ff. oder auch Chasles, traité des sections coniques. 1re partie. Chap. XIII. § IV. p. 223.

Gerade gegeben ist und die wir eingehender betrachten wollen, auf die im siebenten Capitel erörterten Beziehungen zwischen einer Raumcurve 3. Ordnung und den durch sie hindurchgehenden Hyperboloiden. Bezeichnen wir die gegebenen 5 Curvenpunkte mit 1, 2, 3, 4, 5 und die Gerade, welche Sehne werden soll, mit g, so wird die gesuchte Curve erhalten als Schnitt zweier Kegel 2. Ordnung, deren Scheitel auf g liegen und welche durch die 5 gegebenen Punkte gehen. In Folge des auf den Kegel übertragenen Pascal'schen Theorems müssen sich dann, wenn mit s der unbekannte Scheitel irgend eines dieser Kegel bezeichnet wird, die Ebenenpaare (s 1 2), (s 4 5); (g 1), (s 3 4); (g 5), (s 2 3) in 3 Geraden p, q, r schneiden, die auf einer Ebene E liegen. Von den Geraden q und r kennt man nun je einen Punkt, nämlich auf q den Punkt α, worin sich (g 1) und (3 4) treffen, und auf r den Punkt β, worin sich (g 5) und (2 3) begegnen; da dann die Verbindungslinie (α β) auch in der Ebene E liegen muss, so muss die Gerade p den Linien g, (1 2), (4 5), (α β) begegnen und ist daher die Aufgabe zurückgeführt auf die andere, eine Gerade zu bestimmen, welche 4 gegebene Gerade schneidet. Diese letztere hat bekanntlich [1]) zwei Lösungen, sodass also nur 2 auf der Geraden g gelegene Kegelscheitel und mithin nur eine den Anforderungen genügende Raumcurve 3. Ordnung existirt.

Ehe wir zu den auf in der Fläche eines Hyperboloids gelegenen Raumcurven 3. Ordnung bezüglichen Aufgaben übergehen, mag noch die Construction der durch einen Punkt des Raumes möglichen Sehne, resp. der in einer Ebene gelegenen Schnittlinie von 2 Osculationsebenen, wie sich derselbe aus den am Schluss des vorigen Capitels gegebenen Erörterungen ergibt, bemerkt werden, nämlich:

Man construirt die 3 durch den Punkt möglichen Osculationsebenen mit ihren Berührungspunkten, deren Ebene die 3 ersteren Ebenen in auch durch den Punkt gehenden Geraden schneidet; bestimmt man dann zu jeder von diesen letzteren und den in derselben Ebene gelegenen Kanten des von den 3 Osculationsebenen gebildeten körperlichen Dreiecks die 4. harmonische Gerade, so schneiden sich die durch sie und die betr. Gegenkante bestimmten Ebenen in der gesuchten Geraden.

Man construirt die 3 in der Ebene gelegenen Curvenpunkte, sowie ihre Osculationsebenen und verbindet den Durchschnittspunkt der letzteren mit jedem der 3 ersteren; dann bestimmt man zu jeder dieser Verbindungslinien und den durch dieselbe Ecke gehenden Seiten des von 3 Curvenpunkten gebildeten Dreiecks den vierten harmonischen Strahl, deren Schnittpunkte mit den betreffenden Gegenseiten auf der gesuchten Geraden liegen.

1) *Vergl.* Steiner, systematische Entwicklung etc. pag. 243.

Wir beschäftigen uns nun noch mit einigen Constructionen von Raumcurven 3. Ordnung, welche einer bestimmten Fläche 2. Ordnung angehören sollen und stellen zunächst die Aufgabe, durch 5 auf einem einfachen Hyperboloid gegebene Punkte einen cubischen Kegelschnitt zu bestimmen, der ganz in der Fläche liegt. Es wird derselbe mit Rücksicht auf die im zweiten Capitel angegebene Erzeugung von Raumcurven 3. Ordnung durch projectivische Gebilde erhalten als Ort der Punkte, worin ein Ebenenbüschel, dessen Achse durch 2 der gegebenen Punkte geht und von einer dazu projectivischen Regelschaar des Hyperboloids getroffen wird. Die projectivische Beziehung beider Gebilde wird vermittelt durch 3 Paare entsprechender Elemente, etwa die Ebenen 1 2 (3, 4, 5) und die durch die Punkte 3, 4, 5 gehenden Geraden der einen oder der andern Erzeugung und gibt es demnach zwei der Aufgabe genügende Curven.

Im siebenten Capitel hatten wir das verschiedene Verhalten der Raumcurven 3. Ordnung gegen die Erzeugenden des einen oder andern Systems von durch sie gehenden Hyperboloiden kennen gelernt und liegt desshalb die Frage nahe, ob unter den Geraden, deren jede zwei Punkte mit der Curve gemein hat, auch Tangenten derselben vorkommen und wie sie zu finden sind. Der ebendaselbst bewiesene Satz, dass die durch eine Sehne der Curve und die resp. beiden auf jeder Erzeugenden gelegenen Curvenpunkte gehenden Ebenen in Involution sind, gibt die Lösung, dass die gesuchten Tangenten in den beiden Doppelebenen dieses involutorischen Ebenenbüschels liegen.

Diese Existenz von Tangenten unter den Erzeugenden eines durch einen cubischen Kegelschnitt gehenden Hyperboloids führt uns dann auf die Aufgabe, wenn 4 Punkte der Fläche gegeben sind und eine bestimmte Erzeugende, eine darauf gelegene Raumcurve 3. Ordnung zu construiren, welche durch die 4 Punkte geht und jene Erzeugende berührt. Wählt man auf der Erzeugenden 2 beliebige Punkte, so kann durch jeden von ihnen und die 4 gegebenen Punkte ein cubischer Kegelschnitt gelegt werden, der noch einen Punkt mit dieser Erzeugenden gemein hat, und bestimmen die beiden auf diese Weise erhaltenen Punktpaare nach einem früher bewiesenen Satze auf die Erzeugenden eine involutorische Punktreihe, deren Doppelelemente die Punkte sind, worin die gesuchten Curven 3. Ordnung dieselbe berühren, sodass also ihre Construction als durch 5 Punkte gehend ausgeführt werden kann.

Schliesslich geben wir eine einfache Lösung der Aufgabe, wenn zwei auf einem Hyperboloid gelegene Raumcurven 3. Ordnung gegeben sind, die eine bestimmte Erzeugende in je 2 Punkten schneiden, ihre 4 Schnittpunkte zu construiren. Legt man durch die gegebene Erzeugende einen Ebenenbüschel, so werden dadurch beide Curven projectivisch aufeinander bezogen und sind die in einer Ebene des Büschels liegenden

Curvenpunkte homolog. Eine Gerade aus der Schaar, welcher die gegebene nicht angehört, bestimmt dann mit jedem Paar homologer Curvenpunkte entsprechende Ebenen zweier coaxialer projectivischer Ebenenbüschel, deren Doppelebenen die den beiden Curven gemeinsamen Punkte enthalten.

Anhang.

Wir geben schliesslich noch eine Andeutung von der im Eingang erwähnten Bedeutung der cubischen Kegelschnitte für die Mechanik, wobei sich zeigen wird, dass sich der im neunten Capitel auseinandergesetzten dualen Beziehung zwischen Raumgebilden vermittelst einer Raumcurve 3. Ordnung eine statische Bedeutung abgewinnen lässt.

Man kann bekanntlich [1]) Kräfte im Raum, welche auf ein starres Punktsystem wirken, immer ersetzen durch eine Einzelkraft R, die durch einen beliebig angenommenen Punkt ξ, η, ζ des Raumes geht und deren Componenten sind

$$A = \Sigma X, \; B = \Sigma Y, \; C = \Sigma Z,$$

wobei ΣX, ΣY, ΣZ die Summen der parallel zu den Coordinatenachsen thätigen Componenten der gegebenen Kräfte sind und also $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ist und durch ein Kräftepaar, welches aus den drei parallel zu den Coordinatenebenen wirkenden Paaren mit den resp. Momenten

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= L - (\eta\, C - \zeta\, B), \\ \mathfrak{M} &= M - (\zeta\, A - \xi\, B), \\ \mathfrak{N} &= N - (\xi\, B - \eta\, A) \end{aligned}$$

resultirt und demnach das Moment $\mathfrak{G} = \sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}$ hat. Vorstehende Formeln lehren, dass, wenn der Punkt ξ, η, ζ, durch den die Einzelkraft geht, fixirt ist, die Ebene des resultirenden Paares völlig bestimmt ist und umgekehrt, dass, sowie die Ebene des letzteren als gegeben angenommen wird, jene Kraft durch einen bestimmten in ihr gelegenen Punkt gehen muss. Denn es bildet die Achse des Paares mit den Coordinatenachsen Winkel α, β, γ, welche bestimmt sind durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{G}}, \; \cos\beta = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{G}}, \; \cos\gamma = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{G}},$$

---

1) Vergl. Duhamel, anal. Mechanik. Deutsch herausgegeben von Schlömilch. *Bd. I, p. 59.*

so dass man hat

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \mathfrak{L} : \mathfrak{M} : \mathfrak{N}$$

und ist demnach die Gleichung der Ebene des Paares, weil dieselbe durch den Punkt ξ, η, ζ gehen muss

$$(x-\xi)\,\mathfrak{L} + (y-\eta)\,\mathfrak{M} + (z-\zeta)\,\mathfrak{N} = 0$$

oder für die obigen Werthe von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$

$$(x-\xi)\,L + (y-\eta)\,M + (z-\zeta)\,N + (x\,\zeta - \xi\,z)\,B + (y\,\xi - \eta\,x)\,C + (z\,\eta - \zeta y)\,A = 0.$$

Wird andererseits die Ebene des Paares, also auch seine Achsenrichtung als gegeben angenommen, so müssen, wenn

$$p\,x + q\,y + r\,z + s = 0$$

die Gleichung seiner Ebene ist, die Relationen

$$p : q : r = \mathfrak{L} : \mathfrak{M} : \mathfrak{N} = L - (\eta\,C - \zeta\,B) : M - (\zeta\,A - \xi\,C) : N - (\xi\,B - \eta\,A)$$

und

$$p\,\xi + q\,\eta + r\,\zeta + s = 0$$

bestehen, woraus sich

$$\xi = \frac{q\,N - r\,M - s\,A}{p\,A + q\,B + r\,C};\quad \eta = \frac{r\,L - p\,N - s\,B}{p\,A + q\,B + r\,C};$$

$$\zeta = \frac{p\,M - qL - sC}{p\,A + qB + rC}$$

als Coordinaten des Punkts, durch den dann die Einzelkraft R gehen muss, ergeben. Dass das auf die angegebene Weise vermittelte Entsprechen von Punkten und Ebenen dasselbe ist wie die im neunten Capitel erörterte Beziehung zwischen Pol und Polarebene in Bezug auf eine Raumcurve 3. Ordnung, wird ohne weiteres erkannt, wenn man aus den daselbst für homogene Coordinaten aufgestellten Formeln solche für Parallelcoordinaten herleitet. Zu dem Ende seien

$$\begin{aligned} U_0 &\equiv a_0\,x + b_0\,y + c_0\,z = 0,\\ U_1 &\equiv a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = 0,\\ U_2 &\equiv a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = 0,\\ U_3 &\equiv a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + 1 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der damals benutzten Fundamentalebenen in der Normalform, sodass also die homogenen Coordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ eines Punkts ξ, η, ζ erhalten werden durch Substitution von ξ, η, ζ in vorstehende Formeln. Werden nun die sich hierdurch ergebenden Werthe in die Gleichung

$$x_3\,U_0 - x_0\,U_3 + 3\,(x_1\,U_2 - x_2\,U_1) = 0$$

der zum Punkt $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ gehörigen Polarebene eingesetzt, und für U_0, U_1 ... die oben gegebenen Werthe geschrieben, so liefert das nach $x\,y\,z$ geordnete Resultat





